

Mikhaild Flores P.

ÁLGEBRA

Teoría y práctica

- ▶ Exámenes UNI desarrollados por temas y con claves
- ▶ Actualizado según últimos prospectos
- ▶ Desarrollo completo de todo el curso
- ▶ Nuevos problemas resueltos y propuestos tipo UNI
- ▶ Claves para todos los problemas propuestos

COLECCIÓN
UNIVERSIDAD
SAPIENS

Editorial
San
Marcos

Mikhaild Flores P.

ÁLGEBRA

Teoría y práctica



ÁLGEBRA: TEORÍA Y PRÁCTICA
COLECCIÓN UNICIENCIA SAPIENS
MIKHAILD FLORES P.

- © Mikhaild Flores P., 2007
Asesoría académica: Salvador Timoteo V.
- © Editorial San Marcos E. I. R. L., editor
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima, Lima, Lima
Teléfono: 331-1522
RUC: 20260100808
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Diseño de portada: Gustavo Tuppia
Composición de interiores: Gina Condori
Responsable de edición: Alex Cubas

Primera edición: 2007
Segunda edición: 2014
Tercera edición: 2015
Primera reimpresión: abril de 2018
Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.º 2018-03930
ISBN: 978-612-315-276-5
Registro de proyecto editorial N.º 31501011800267

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra
sin la previa autorización escrita del autor y el editor.

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Teléfono: 433-7611
E-mail: ventasoficina@editorialsanmarcos.com
www.editorialsanmarcos.com

Impresión:
Editorial San Marcos de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344

Publicado en mayo de 2018

ÍNDICE

Presentación.....	11
-------------------	----

CAPÍTULO 01: LÓGICA PROPOSICIONAL

Biografía: Gottlob Frege	13
Enunciado.....	14
Proposición.....	14
Variables lógicas.....	14
Clases de proposiciones.....	14
Conectivos lógicos.....	14
Tablas de verdad o Wittgenstein.....	14
Estudio de los conectivos lógicos.....	14
Tautología, contradicción y contingencia.....	15
Problemas resueltos.....	17
Problemas de examen de admisión UNI.....	29
Problemas propuestos.....	32

CAPÍTULO 02: CONJUNTOS

Biografía: Georg Cantor	39
Definición.....	40
Nomenclatura.....	40
Relación de pertenencia ($\in$).....	40
Determinación de un conjunto.....	40
Clases de conjuntos.....	40
Relaciones entre conjuntos.....	40
Comparación entre conjuntos.....	41
Representación gráfica de los conjuntos.....	41
Operaciones con conjuntos.....	41
Número de elementos de un conjunto.....	43
Problemas resueltos.....	45
Problemas de examen de admisión UNI.....	58
Problemas propuestos.....	60

CAPÍTULO 03: EXPONENTES Y RADICALES EN $\mathbb{R}$

Biografía: Christoph Rudolf	67
Leyes de exponentes.....	68
Ecuaciones exponenciales.....	70
Problemas resueltos.....	71
Problemas de examen de admisión UNI.....	82
Problemas propuestos.....	84

CAPÍTULO 04: EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Biografía: Jean D'Alembert.....	89
Conceptos previos.....	90
Expresiones algebraicas.....	90
Expresiones trascendentes.....	91
Término algebraico.....	91
Clasificación de las expresiones algebraicas.....	91
Valor numérico de un polinomio y cambio de variables.....	91
Problemas resueltos.....	93

Problemas de examen de admisión UNI.....	97
Problemas propuestos.....	98

CAPÍTULO 05: GRADOS

Biografía: Simon Stevin.....	101
Definición.....	102
Clases de grados.....	102
Problemas resueltos.....	104
Problemas de examen de admisión UNI.....	108
Problemas propuestos.....	109

CAPÍTULO 06: POLINOMIOS ESPECIALES

Biografía: Évariste Galois.....	113
Definición.....	114
Polinomio homogéneo.....	114
Polinomio ordenado.....	114
Polinomio completo.....	114
Polinomio completo y ordenado.....	114
Polinomios idénticos.....	114
Polinomios idénticamente nulos.....	114
Problemas resueltos.....	116
Problemas de examen de admisión UNI.....	120
Problemas propuestos.....	123

CAPÍTULO 07: MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA - PRODUCTOS NOTABLES

Biografía: Adrien-Marie Legendre.....	127
Multipliación algebraica.....	128
Productos notables.....	128
Problemas resueltos.....	131
Problemas de examen de admisión UNI.....	143
Problemas propuestos.....	144

CAPÍTULO 08: DIVISIÓN ALGEBRAICA - COCIENTES NOTABLES

Biografía: Paolo Ruffini.....	149
División algebraica.....	150
División de polinomios.....	150
Regla de Ruffini.....	152
Teorema del residuo.....	153
Divisibilidad polinómica.....	154
Residuos especiales.....	155
Cocientes notables.....	155
Problemas resueltos.....	157
Problemas de examen de admisión UNI.....	169
Problemas propuestos.....	171

CAPÍTULO 09: FACTORIZACIÓN

Biografía: Jean-Robert Argand.....	177
Definición.....	178
Polinomio primo.....	178
Métodos de factorización.....	178
Factorización recíproca o recurrente.....	184
Método de los artificios.....	186
Factorización simétrica y alternativa.....	187
Problemas resueltos.....	189

Problemas de examen de admisión UNI.....	198
Problemas propuestos.....	200

CAPÍTULO 10: MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO FRACCIONES ALGEBRAICAS

Biografía: William Homer.....	205
Máximo común divisor (MCD).....	206
Mínimo común múltiplo (MCM).....	206
Fracciones algebraicas.....	208
Problemas resueltos.....	213
Problemas de examen de admisión UNI.....	218
Problemas propuestos.....	219

CAPÍTULO 11: POTENCIACIÓN - BINOMIO DE NEWTON

Biografía: Isaac Newton.....	225
Factorial de un número entero y positivo.....	226
Cofactorial o semifactorial.....	226
Análisis combinatorio.....	227
Binomio de Newton.....	232
El triángulo de Pascal o Tartaglia.....	237
Problemas resueltos.....	239
Problemas de examen de admisión UNI.....	250
Problemas propuestos.....	252

CAPÍTULO 12: RADICACIÓN

Biografía: Gerolamo Cardano.....	257
Definición.....	258
Clasificación.....	258
Homogeneización de radicales.....	258
Valor aritmético de un radical.....	258
Valor algebraico de un radical.....	258
Raíz cuadrada de polinomios.....	258
Transformación de radicales dobles a suma o diferencia de radicales simples o sencillos.....	259
Racionalización.....	261
Problemas resueltos.....	263
Problemas de examen de admisión UNI.....	273
Problemas propuestos.....	275

CAPÍTULO 13: NÚMEROS COMPLEJOS

Biografía: Lodovico Ferrari.....	281
Cantidades imaginarias.....	282
Potencias de la unidad imaginaria.....	282
Número complejo.....	282
Representación gráfica de los números complejos.....	283
Operaciones con números complejos.....	283
Propiedades de las raíces cúbicas de la unidad.....	285
Fórmula de Euler.....	285
Problemas resueltos.....	288
Problemas de examen de admisión UNI.....	300
Problemas propuestos.....	303

CAPÍTULO 14: MATRICES Y DETERMINANTES

Biografía: Gabriel Cramer.....	309
Matrices.....	310
Orden de una matriz.....	310

Matrices especiales	310
Igualdad de matrices	310
Operaciones con matrices	310
Transpuesta de una matriz	311
Taza de una matriz A $[Traz(A)]$	312
Matrices cuadradas especiales	312
Características notables de algunas matrices cuadradas	312
Determinantes	312
Menor complementario de una componente	313
Determinante de Vandermonde	313
Matriz inversa	313
Problemas resueltos	316
Problemas de examen de admisión UNI	331
Problemas propuestos	333

CAPÍTULO 15: TEORÍA DE ECUACIONES

Biografía: Al-Juarismi	341
Igualdad	342
Clasificación	342
Conjunto solución de una ecuación (CS)	342
Clases de ecuaciones	342
Teorema para transformar ecuaciones en equivalentes	342
Ecuaciones de primer grado	343
Sistemas de ecuaciones	347
Sistema de ecuaciones lineales o de primer grado	348
Sistemas lineales: el método de eliminación de Gauss y Gauss-Jordan	354
Ecuaciones de segundo grado	360
Ecuaciones de grado superior	365
Ecuaciones recíprocas	367
Sistemas de ecuaciones de segundo grado y grado superior	368
Ecuaciones cúbicas y cuárticas	369
Problemas resueltos	373
Problemas de examen de admisión UNI	386
Problemas propuestos	389

CAPÍTULO 16: DESIGUALDADES - INECUACIONES - VALOR ABSOLUTO

Biografía: Bernhard Riemann	401
Desigualdades	402
Axiomas de relación de orden	402
Relaciones que expresan desigualdades	402
Clases de desigualdades	402
Intervalo	403
Propiedades generales de las desigualdades	403
Inecuaciones	404
Gráfica de desigualdades con dos variables	407
Valor absoluto	411
Ecuaciones con valor absoluto	411
Inecuaciones con valor absoluto	412
Problemas resueltos	415
Problemas de examen de admisión UNI	429
Problemas propuestos	432

CAPÍTULO 17: PROGRAMACIÓN LINEAL

Biografía: George Dantzig	443
Definición	444

Desigualdades lineales.....	444
Sistema de inecuaciones.....	444
Problema general.....	446
Problemas resueltos.....	452
Problemas de examen de admisión UNI.....	462
Problemas propuestos.....	465

CAPÍTULO 18: SUCESIONES Y SERIES

Biografía: Gustav Dirichlet.....	469
Sucesiones.....	470
Series.....	470
Problemas resueltos.....	474
Problemas de examen de admisión UNI.....	483
Problemas propuestos.....	485

CAPÍTULO 19: PROGRESIONES

Biografía: Fibonacci.....	491
Progresión.....	492
Progresiones aritméticas (PA).....	492
Progresiones geométricas (PG).....	495
Problemas resueltos.....	499
Problemas de examen de admisión UNI.....	506
Problemas propuestos.....	508

CAPÍTULO 20: RELACIONES Y FUNCIONES

Biografía: Leonhard Euler.....	513
Definiciones previas.....	514
Relación.....	514
Función.....	514
Domínio y rango de una función.....	514
Función de variable real.....	515
Funciones especiales y representación gráfica.....	517
Gráfica de funciones de formas especiales.....	518
Tipos de funciones: inyectiva, suryectiva, biyectiva.....	519
Operaciones con funciones.....	520
Composición de funciones.....	520
Funciones monótonas crecientes y decrecientes.....	520
Función inversa.....	521
Función exponencial.....	521
Gráfica de la función exponencial.....	521
Función exponencial de base e.....	522
Inecuaciones exponenciales.....	522
Función logarítmica.....	523
Gráfica de la función logarítmica.....	523
Problemas resueltos.....	525
Problemas de examen de admisión UNI.....	536
Problemas propuestos.....	538

CAPÍTULO 21: LOGARITMOS

Biografía: John Napier.....	547
Definición.....	548
Igualdades fundamentales.....	548
Propiedades generales.....	548
Cologarítmico (colog).....	549
Antilogarítmico (antilog).....	549

Logaritmos como progresiones	549
Sistema de logaritmos	549
Logaritmos de números negativos	550
Operaciones con logaritmos decimales.....	551
El número e y los logaritmos naturales	552
Problemas resueltos.....	555
Problemas de examen de admisión UNI	562
Problemas propuestos.....	564

CAPÍTULO 22: LÍMITES Y DERIVADAS

Biografía: Gottfried Leibniz	569
Límite.....	570
Formas determinadas.....	570
Formas indeterminadas.....	570
Derivadas	571
Regla de L'Hospital-Bernoulli	572
Máximos, mínimos y representación gráfica de funciones.....	575
Problemas resueltos.....	576
Problemas de examen de admisión UNI	588
Problemas propuestos.....	590

PRESENTACIÓN

Este texto propone el desarrollo de los conceptos más elementales del curso, para llegar a temas recientemente incorporados en los exámenes de admisión, según el prospecto de la UNI. En suma, la intención es que el estudiante encuentre un curso completo de Álgebra elemental de acuerdo a las últimas exigencias.

En cuanto a la propuesta pedagógica de cada tema, el joven estudiante encontrará la teoría respectiva y luego su parte práctica, es decir, una primera que consta de ejercicios de aplicación y la otra, donde se proponen problemas resueltos, problemas de examen de admisión UNI y problemas propuestos con claves.

La sección de ejercicios de aplicación, se ha considerado en aquellos capítulos que, según nuestra experiencia, ofrecen cierta dificultad en su comprensión; son ejercicios bastante sencillos. Y tienen como intención que el estudiante vaya familiarizándose con esta parte de la ciencia matemática sin problemas. Incluso puede servir de material de aula a los profesores de educación secundaria, ya que están dosificados de menor a mayor grado de dificultad, además de contar con sus respuestas respectivas después de los enunciados. En cuanto a la sección de problemas resueltos y propuestos, estos están presentados de acuerdo al grado de dificultad de los mismos. Las repuestas de estos últimos, se encuentran al final de cada capítulo.

Se ha sido cuidadoso en cuanto a la teoría expuesta, respetando la rigurosidad matemática, pero a su vez se ha sido concreto en muchos aspectos ya que (como se entenderá) la dimensión del libro no lo permite; de la misma manera, se emplea un lenguaje sencillo en cuanto a la explicación teórica y en la parte práctica se ha utilizado el criterio de lo fácil a lo complejo, por eso es que si el lector da un recorrido visual a las páginas, notará que (en la parte de ejercicios, problemas resueltos y propuestos) los primeros de ellos son muy fáciles y progresivamente se van haciendo un poco más difíciles en cuanto a su resolución, es decir, el libro es para estudiantes de todo nivel.

En cuanto a los capítulos, el estudiante podrá encontrar los temas clásicos de: lógica proposicional, conjuntos, exponentes y radicales en $\mathbb{R}$, expresiones algebraicas, grados, polinomios especiales, multiplicación algebraica, productos notables, división algebraica, cocientes notables, factorización, MCD y MCM, fracciones algebraicas, potenciación, binomio de Newton, radicación, números complejos, teoría de ecuaciones, desigualdades, inecuaciones, sucesiones y series, progresiones, logaritmos. Se han incluido los capítulos de: matrices y determinantes, programación lineal, relaciones y funciones, límites y derivadas.

Esperamos que esta publicación logre convertirse en un importante auxiliar pedagógico para todos los estudiantes de educación secundaria, preuniversitaria y superior, además que logre aportar en su preparación para afrontar con éxito el examen de admisión y en su posterior desarrollo profesional. Si este texto logra ser parte fundamental en la construcción de un futuro profesional peruano, entonces nos daremos por satisfechos.

El Editor

Lógica

proposicional

01

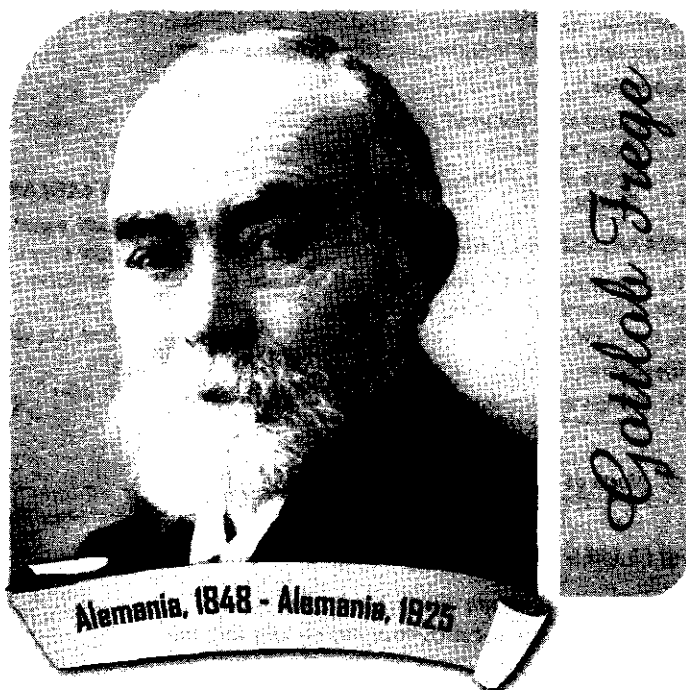
capítulo

Friedrich Ludwig Gottlob Frege nació el 8 de noviembre de 1848 en Wismar y murió el 26 de julio de 1925 en Bad Kleinen. Fue un matemático, lógico y filósofo alemán, padre de la lógica matemática y la filosofía analítica. Frege es ampliamente reconocido como el mayor lógico desde Aristóteles. Comenzó sus estudios en la Universidad de Jena en 1869 trasladándose a Gotinga para completar sus estudios de Física, Química, Filosofía y Matemáticas, licenciándose en esta última en 1873.

En 1879, Frege publicó su revolucionaria obra titulada *Conceptografía o Escritura de conceptos*, en la que sentó las bases de la lógica matemática moderna. Mediante la introducción de una

nueva sintaxis, con la inclusión de los llamados cuantificadores «para todo» o «para al menos un» permitió formalizar una enorme cantidad de nuevos argumentos. También fue el primero en distinguir la caracterización formal de las leyes lógicas de su contenido semántico.

Frege fue un defensor del logicismo y de la idea de que las matemáticas son reducibles a la lógica, en el sentido de que las verdades de la matemática son deducibles de las verdades de la lógica. Sin embargo, su defensa del logicismo era de alcance limitado, aplicándola solo a la aritmética y a la teoría de conjuntos, puesto que Frege permaneció en gran medida kantiano respecto de la geometría. Su obra titulada *Leyes básicas de la aritmética* fue un intento de llevar a cabo el proyecto logicista.



« ENUNCIADO

Es toda frase u oración (escrita o hablada).

Ejemplos:

- El muro está hecho de ladrillo.
- Quiero ese juguete.
- ¡Fuera!
- ¿Quién es?
- $2 + 3 = 5$

« PROPOSICIÓN

Es aquel enunciado al que se le puede asignar solamente uno de los llamados valores de verdad (verdadero o falso).

Ejemplos:

- El azufre es de color amarillo.
- Los mamíferos son vertebrados.
- Los canguros se encuentran en Australia.

No se consideran proposiciones a las preguntas, interjecciones, mandatos, deseos, dudas o a cualquier otro enunciado que no indique una verdad o falsedad.

Ejemplos:

- ¿Cuál es tu nombre?
- ¡Eder, ayúdame!
- Apaga el ventilador.
- ¡Fuera!

« VARIABLES LÓGICAS

En el lenguaje de la lógica las proposiciones se denotan por lo general con las siguientes letras del alfabeto: p, q, r, s, t, etc.

Ejemplos:

P: Felipe es futbolista
p

Q: Mario es ingeniero y Rosa es doctora
p q

« CLASES DE PROPOSICIONES

Simples o atómicas

Son aquellas que están compuestas de una sola proposición.

Ejemplos:

p: Roberto estudia.

q: La mesa es de color marrón.

Pueden ser de dos tipos:

- I. **Predicativa:** cuando establece una característica o cualidad del sujeto.

Ejemplo:

p: Pedro es basquetbolista.

- II. **Relacionante:** cuando establece una comparación entre dos o más sujetos.

Ejemplo:

q: Eder es más fuerte que Jorge.

Compuestas o moleculares

Aquellas que están compuestas de dos o más proposiciones.

Ejemplos:

Pedro es marino y Raúl es gimnasta
p q

Luis se encuentra en Lima o se encuentra en Europa
p q

« CONECTIVOS LÓGICOS

Son símbolos que permiten ligar o enlazar una proposición con otra. Entre los cuales tenemos:

Símbolo	Operación	Significado
$\sim$	negación	no p
$\vee$	disyunción inclusiva	p o q
$\vee$ o Δ	disyunción exclusiva	o p o q
$\wedge$	conjunción	p y q
$\Rightarrow$	condicional	p entonces q
$\Leftrightarrow$	bicondicional	p si y solo si q

« TABLAS DE VERDAD O WITTGENSTEIN

Toda variable lógica p puede ser sustituida por cualquier enunciado y sus posibles valores de verdad son:

Verdadero (V)

Falso (F)

Para dos variables:

	p	q
N	V	V
	V	F
	F	V
	F	F

Para tres variables:

	p	q	r
N	V	V	V
	V	V	F
	V	F	V
	V	F	F
	F	V	V
	F	V	F
	F	F	V
	F	F	F

De donde: $N = 2^n$; ($n = n.^{\circ}$ de variables)

« ESTUDIO DE LOS CONECTIVOS LÓGICOS

Negación ($\sim$)

Tiene como significado no; no es cierto que; es falso que, etc.

Ejemplo:

Sea p: La nube es blanca.

Su negación será $\sim p$: La nube no es blanca.

Siendo su tabla de verdad:

p	$\sim p$
V	F
F	V

Disyunción (V)

Disyunción débil o inclusiva (V). Tiene como significado (O). Indica dentro de la proposición que la ocurrencia de uno de ellos no descarta la ocurrencia del otro.

Ejemplo:

El veneno es mortal o dañino
 $p \quad \vee \quad q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Fuerte o exclusiva (Δ o ∇). Tiene como significado (O... o...). Indica dentro de una proposición molecular la ocurrencia de uno de los hechos más no la de ambos.

Ejemplo:

O Luis se encuentra en Lima o se encuentra en Brasil
 $p \quad \Delta \quad q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjunción ($\wedge$)

Cuando se usa el término de enlace (y), también puede hacerse la consideración para las siguientes palabras: pero, sin embargo, además, aunque, a la vez, no obstante, dado que, etc.

Ejemplo:

$2 + 2 = 4$ y $3 + 4 = 7$
 $p \quad \wedge \quad q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Condicional ($\Rightarrow$)

Cuando se usa el conectivo (entonces) y se puede cambiar por: luego, por lo tanto, ya que, es consecuencia.

Ejemplo:

Si estudias entonces apruebas.

$p \quad \Rightarrow \quad q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional ($\Leftrightarrow$)

Está representado por el (si y solo si).

Ejemplo:

Todo número es par si y solo si es divisible por 2.
 $p \quad \Leftrightarrow \quad q$

Su tabla de verdad es:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

El valor de verdad de las proposiciones compuestas se puede determinar a partir del valor de verdad de sus componentes.

◀ TAUTOLOGÍA, CONTRADICCIÓN Y CONTINGENCIA

Evaluar una fórmula proposicional consiste en hallar su tabla de valores de verdad, pueden ser:

Tautología

Si todos los valores de verdad son verdaderos.

Contradicción

Si todos los valores de verdad son falsos.

Contingencia

Si algunos valores de verdad son verdaderos y otros falsos.

Ejemplo:

1. De las siguientes proposiciones:

- I. Tokio es la capital de Japón, es una proposición verdadera.
- II. Ricardo Palma fue arequipeño, es una contradicción.

III. $\sim p \vee q$ tiene la misma tabla de valores de verdad que $p \Rightarrow q$.

IV. ¡Vamos Boys!, es una proposición.

Determinar sus valores de verdad.

Resolución:

I. Verdadera

II. Falsa, es una afirmación.

III.

p	q	$\sim p$	$\vee$	q	p	$\Rightarrow$	q
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	F

↑ iguales ↑

Verdadera, tiene la misma tabla de valores de verdad.

IV. Falsa, las exclamaciones no son proposiciones.

2. Al evaluar la fórmula lógica: $[(p \wedge q) \vee \sim p] \Rightarrow p$
Se obtiene que su tabla de valores de verdad es equivalente a:

I. q II. $p \wedge q$ III. $\sim q$
IV. p V. $\sim p$

Resolución:

Evaluando la fórmula, se tendrá:

p	q	$[(p \wedge q) \vee \sim p]$	$\Rightarrow$	p
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	F	V	F

(1) (3) (2) (4)

El resultado (4) es equivalente a la proposición p.
Respuesta (IV).

3. De las proposiciones:

I. $3 + 4 = 7$, es una tautología.

II. ¡Arriba Perú!, es una proposición.

III. José es un buen estudiante, aprobará el ciclo en la universidad, es una disyunción.

IV. $(p \Rightarrow q) \vee (\sim r \Rightarrow t)$, es una contingencia.

Determinar sus valores de verdad.

Resolución:

I. Falsa, es una proposición.

II. Falsa, es un enunciado.

III. Falsa, la coma (,) intermedia indica (entonces), luego se trata de una condicional.

IV. Verdadera, ya que:

p	q	r	t	$(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow t)$
V	V	V	V	F
V	V	V	F	F
V	V	F	V	F
V	V	F	F	F
V	F	V	V	V
V	F	V	F	V
V	F	F	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	V	F	V
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.

Se trata de una contingencia. La proposición es verdadera.

4. Si la proposición compuesta:

$[(p \Rightarrow q) \vee (q \vee \sim r)]$ es falsa; determine los valores de verdad de p; q y r.

Resolución:

Por condición:

$$[(p \Rightarrow q) \vee (q \vee \sim r)] \equiv F$$

Entonces:

$(p \Rightarrow q) \equiv F$; donde solo se cumple si $p \equiv V$ y $q \equiv F$.

$(q \vee \sim r) \equiv F$; de lo anterior se sabe que $q \equiv F$; luego $\sim r$ debe ser F, entonces $r \equiv V$.

Finalmente: $p \equiv V$; $q \equiv F$ y $r \equiv V$

5. Si la proposición compuesta:

$(p \Rightarrow q) \vee \sim[(q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim q)] \vee \sim(p \vee r)$ es falsa, determine los valores de verdad de p, q y r.

Resolución:

Sea: $a \equiv (p \Rightarrow q)$; $b \equiv \sim[(q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim q)]$ y $c \equiv \sim(p \vee r)$

Entonces se tendrá:

$a \vee b \vee c \equiv F$; donde solo es posible si $a \equiv F$; $b \equiv F$ y $c \equiv F$.

Entonces: $a \equiv (p \Rightarrow q) \equiv F$ (así: $p \equiv V$ y $q \equiv F$)

$b \equiv \sim[(q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim q)] \equiv F$ y $c \equiv \sim(p \vee r) \equiv F$

$[(q \wedge \sim r) \vee (r \wedge \sim q)] \equiv V$ $p \vee r \equiv V$

$\underbrace{F \quad F}_{F} \quad \underbrace{V \quad V}_{V}$ como $p \equiv V$ $r \equiv V$ o F

Finalmente: $p \equiv V$; $q \equiv F$; $r \equiv V$

6. Determine si estas proposiciones son moleculares o atómicas.

I. La teoría de Newton es correcta pero la de Einstein más moderna.

II. Si una persona se corta la yugular por lo tanto se desangra.

III. $x + 1 = 3$

IV. Fortunato cobra su sueldo y no trabaja.

Resolución:

 I. 2 proposiciones $\Rightarrow$ Molecular
1 conjunción (pero)

 II. 2 proposiciones $\Rightarrow$ Molecular
1 condicional (por lo tanto)

 III. 1 proposición $\Rightarrow$ Atómica

 IV. 2 proposiciones $\Rightarrow$ Molecular
1 conjunción (y)

7. De las siguientes proposiciones compuestas:

- Si: $5 + 3 = 7$, entonces $7 < 6$
- 8 es mayor que 4 o 7 es menor que 5.
- $\sqrt{16} = 4$ y $-3^2 = 9$
- $2 < 4 \Leftrightarrow 12 + 5 < 4 + 5$

Determine sus valores de verdad.

Resolución:

- Si: $5 + 3 = 7$, entonces $7 < 6$

$$\begin{array}{ccc} F & \Rightarrow & F \\ & & \equiv V \end{array}$$
- 8 es mayor que 4 o 7 es menor que 5

$$\begin{array}{ccc} V & \vee & F \\ & & \equiv V \end{array}$$
- $\sqrt{16} = 4$ y $-3^2 = 9$

$$\begin{array}{ccc} V & \wedge & F \\ & & \equiv F \end{array}$$
- $2 < 4 \Leftrightarrow 12 + 5 < 4 + 5$

$$\begin{array}{ccc} V & \Leftrightarrow & F \\ & & \equiv F \end{array} \therefore VVFF$$

 8. Se sabe que: $(p \wedge q) \equiv V$; $(q \Rightarrow t) \equiv F$ y se afirma:

- $\sim[(q \wedge p) \wedge p]$
- $\sim(\sim p \vee t) \vee q$
- $[\sim p \vee (q \wedge \sim t)] \Leftrightarrow \sim(q \Rightarrow t)$

Determinar cuáles son verdaderas.

Resolución:

 De: $p \wedge q \equiv V \Rightarrow p \equiv V$; $q \equiv V$

 Pero: $q \Rightarrow t \equiv F$

 Entonces: $q \equiv V$; $t \equiv F$

 En I: $\sim[(V \wedge V) \wedge V] \equiv \sim[V \wedge V] \equiv \sim[V] \equiv \sim F \equiv V$

 En II: $\sim(F \vee F) \vee V \equiv \sim F \vee V \equiv V \vee V \equiv V$

 En III: $[F \vee (V \wedge V)] \Leftrightarrow \sim(V \Rightarrow F) \equiv [V] \Leftrightarrow V \equiv V$
 $\therefore$ Todas son verdaderas

 9. Si la proposición: $\sim[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim s)]$ es verdadera, determinar el valor de verdad de p, q, r, s.

Resolución:

$$\begin{array}{ccc} \sim[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim s)] \equiv V \\ (\underbrace{\sim p \wedge q}_V) \Rightarrow (\underbrace{\sim r \Rightarrow \sim s}_F) \equiv F \end{array}$$

 Donde: $\sim p \wedge q \equiv V$
 $\therefore p \equiv F$; $q \equiv V$

También:

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\sim r}_V \Rightarrow \underbrace{\sim s}_F \equiv F & \therefore & r \equiv F; s \equiv V \end{array}$$

10. Dadas las proposiciones:

- $p \wedge (\sim q \vee r)$; $r \equiv V$
- $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(q \vee p)$; $q \equiv V$
- $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$; $r \equiv V$

Determinar si la información es suficiente o no para hallar el valor de verdad de las proposiciones.

Resolución:

 I. $p \wedge (\sim q \vee r)$; $r \equiv V$

$$\begin{array}{ccc} & & \underbrace{\sim q \vee r}_V \\ & & \underbrace{\quad}_V \end{array} \quad \text{No es suficiente}$$

 II. $(p \vee q) \Leftrightarrow \sim(q \vee p)$; $q \equiv V$

$$\begin{array}{ccc} & & \underbrace{\sim(q \vee p)}_V \\ & & \underbrace{\quad}_F \end{array} \quad \text{Sí es suficiente}$$

 III. $(\sim p \vee q) \Rightarrow r$; $V(r) = V$

$$\begin{array}{ccc} & & \underbrace{\sim p \vee q}_V \\ & & \underbrace{\quad}_V \end{array} \quad \text{Sí es suficiente}$$

 $\therefore$ Solo II y III cumplen la condición.


PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Simbolizar: "Si Julieta es española entonces es aficionada a la fiesta brava y Julieta no es aficionada a la fiesta brava por lo tanto, no es española". Determinar su tabla de verdad.

Resolución:

Sea p: Julieta es española

q: Es aficionada a la fiesta brava

p	q	$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$					
V	V	V	F	F	V	F	
V	F	F	F	V	V	F	
F	V	V	F	V	V	V	
F	F	V	V	V	V	V	
		(1)	(3)	(2)	(4)		
Tautología							

2. Sabiendo que la proposición: $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow s)$ es falsa; reduzca el valor de verdad de:

$$[(\sim r \vee q) \wedge q] \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$$

Resolución:

$$(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow s) \equiv F$$

$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
V	F	F	F
F		F	

Entonces:

$$\begin{aligned} [(\sim r \vee q) \wedge q] \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s] &\equiv [(V \vee V) \wedge V] \\ &\Leftrightarrow [(F \vee F) \wedge F] \\ &\equiv V \Leftrightarrow F \equiv F \end{aligned}$$

3. Si $p \Downarrow q$ se define por $(\sim p) \wedge (\sim q)$. Hallar el equivalente de $\sim(p \Downarrow q)$.

Resolución:

$$\begin{aligned} \sim(p \Downarrow q) &\equiv \sim[(\sim p) \wedge (\sim q)] \\ &\equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)] \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \end{aligned}$$

Se tiene:

$$(p \Downarrow q) \equiv (\sim p) \wedge (\sim q)$$

Entonces:

$$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p) \equiv (\sim p \Downarrow q) \vee (\sim q \Downarrow p)$$

4. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es equivalente de: "Es necesario pagar 10 soles y ser socio para ingresar al teatro"?

- No ingresar al teatro o pagar 10 soles y ser socio.
- Pagar 10 soles o ser socio, y no ingresar al teatro.
- Pagar 10 soles y ser socio, o no ingresar al teatro.
- Pagar 10 soles o ser socio, e ingresar al teatro.

Resolución:

p : pagar 10 soles

q : ser socio

r : ingresar al teatro

$$r \Rightarrow (p \wedge q) \equiv \sim r \vee (p \wedge q)$$

Pagar 10 soles y ser socio, o no ingresar al teatro.

5. Si $(\sim(q \Rightarrow p)) \Rightarrow (s \Rightarrow r)$ es falsa, determinar el valor veritativo de las proposiciones adjuntas; siendo w y t proposiciones lógicas.

$$I. (\sim r \Leftrightarrow p) \Rightarrow t$$

$$II. q \vee (t \Rightarrow w)$$

$$III. (p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow s)$$

Resolución:

$$\sim(q \Rightarrow p) \Rightarrow (s \Rightarrow r) \text{ es } F$$

Entonces: $\sim(q \Rightarrow p)$ es V y $s \Rightarrow r$ es F

De donde: $(q \Rightarrow p)$ es F

Es decir: q es V y p es F; s es V y r es F.

$$I. (\sim r \Leftrightarrow p) \Rightarrow t$$

$$\begin{array}{c} V \Leftrightarrow F \\ \hline F \Rightarrow ? \\ \hline V \end{array}$$

$$II. q \vee (t \Rightarrow w)$$

$$\begin{array}{c} V \vee ? \\ \hline V \end{array}$$

$$III. (p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow s)$$

$$\begin{array}{c} F \Leftrightarrow F \quad V \Leftrightarrow V \\ \hline V \Leftrightarrow V \\ \hline V \end{array}$$

$$\therefore VVV$$

6. Clasificar las siguientes proposiciones:

$$I. (p \Delta q) \Leftrightarrow (q \Delta \sim p)$$

$$II. [p \Delta (p \vee t)] \Delta (\sim t \vee p)$$

$$III. (p = q) \Rightarrow q$$

Como tautología (T), contradicción (F) o contingencia (C).

Resolución:

Hagamos la tabla de verdad en cada caso:

i.

p	q	$(p \Delta q)$	$\Leftrightarrow$	$(q \Delta \sim p)$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Es una contradicción (F)

ii.

p	t	$[p \Delta (p \vee t)]$	Δ	$(\sim t \vee p)$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V

Es una tautología (T)

iii.

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\Rightarrow$	q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Es una contingencia (C)

$$\therefore FTC$$

7. Señale la secuencia correcta, al determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F), si $(p \Delta q) \wedge p$ es verdadera:

- $p \Delta (\sim q \Rightarrow p)$
- $p \Rightarrow [(\sim p \vee q) \Delta (p \Delta q)]$
- $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \Delta \sim q)$

Resolución:

$(p \Delta q) \wedge p$ es V, entonces $(p \Delta q)$ es V y p es V; q es F.

- $p \Delta (\sim q \Rightarrow p)$

$$\begin{array}{c} V \Rightarrow V \\ \hline V \Delta V \\ \hline F \end{array}$$

- $p \Rightarrow [(\sim p \vee q) \Delta (p \Delta q)]$

$$\begin{array}{c} F \vee F \quad V \\ \hline F \Delta V \\ \hline V \Rightarrow V \\ \hline V \end{array}$$

- $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (p \Delta \sim q)$

$$\begin{array}{c} V \wedge V \quad V \Delta V \\ \hline V \Rightarrow F \\ \hline F \end{array}$$

$\therefore$ FVF

8. Si la siguiente proposición: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow t)$, es falsa, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $(r \Rightarrow t) \vee \sim r$
- $[(r \Rightarrow p) \wedge (t \vee r)] \vee (\sim t)$
- $(\sim p \Rightarrow r) \vee \sim t$

Resolución:

$(p \wedge \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow t)$ es F

entonces: $(p \wedge \sim q)$ es V y $(r \Rightarrow t)$ es F,

entonces: p es V; q es F; r es V y t es F

- $(r \Rightarrow t) \vee \sim r \equiv (V \Rightarrow F) \vee F \equiv (F) \vee F \equiv F$

- $[(r \Rightarrow p) \wedge (t \vee r)] \vee (\sim t)$
 $\equiv [(V \Rightarrow V) \wedge (F \vee V)] \vee (V)$
 $\equiv [(V) \wedge (V)] \vee V \equiv V$

- $(\sim p \Rightarrow r) \vee \sim t \equiv (F \Rightarrow V) \vee V \equiv (V) \vee V \equiv V$

$\therefore$ FVV

9. Dada la siguiente fórmula lógica $S: (r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow r)$; indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- Si p y q son verdaderas, para que S sea verdadera el valor de verdad de r siempre es F.
- Si r es falsa y S es falsa, entonces q es F.
- Si r es verdadera y P es falsa, entonces S es V.

Resolución:

Si $(r \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow r)$

- p es V y q es V

$$S = (r \Rightarrow V) \Leftrightarrow (F \Rightarrow r)$$

$$\equiv (V) \Leftrightarrow (V) \equiv V$$

S siempre es V, para cualquier valor de r . (F)

- r es F y S es F, se tiene:

$$(F \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow F) \equiv F$$

$$(V) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow F) \equiv F$$

$$\Rightarrow (\sim q \Rightarrow F) \equiv F$$

$$\Rightarrow \sim q \equiv V; q \text{ es F}$$

(V)

- r es V y p es F, se tiene:

$$S = (V \Rightarrow F) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow V)$$

$$S = (F) \Leftrightarrow (V) = F$$

(F)

$\therefore$ FVF

10. Simplificar la siguiente proposición compuesta: $[p \Rightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{ [p \Rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \Rightarrow r)] \}$.

Resolución:

$$[p \Rightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{ [p \Rightarrow (q \wedge \sim r)] \wedge [p \wedge (q \Rightarrow r)] \} = S$$

Nótese que:

$$p \Rightarrow (q \wedge \sim r) \wedge p \equiv \sim(\sim q \vee r)$$

$$\equiv p \Rightarrow \sim(q \Rightarrow r)$$

$$\equiv \sim p \vee \sim(q \Rightarrow r)$$

$$\equiv \sim[p \wedge (q \Rightarrow r)]$$

Luego, S quedará así:

$$S = [p \Rightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{ \sim[p \wedge (q \Rightarrow r)] \wedge [p \wedge (q \Rightarrow r)] \}$$

$$S = [p \Rightarrow (q \vee \sim r)] \wedge \{ \sim t \wedge t \}$$

$$S = [p \Rightarrow (q \vee \sim r)] \wedge F \equiv F$$

11. Simplificar la siguiente proposición compuesta: $\sim \{ (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim(\sim p \Rightarrow \sim q) \} \vee (p \Rightarrow \sim q)$.

Resolución:

$$\sim \{ (\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge \sim(\sim p \Rightarrow \sim q) \} \vee (p \Rightarrow \sim q)$$

$$\equiv \sim \{ [(q \vee \sim p) \wedge \sim(p \vee \sim q)] \vee (\sim p \vee \sim q) \}$$

$$\equiv \sim \{ [(q \vee \sim p) \wedge (\sim p \wedge q)] \vee (\sim p \vee \sim q) \}$$

$$\equiv \sim \{ [(q \vee \sim p) \wedge \sim p] \wedge q \vee (\sim p \vee \sim q) \}$$

$$\equiv \sim \{ [(\sim p) \wedge q] \vee (\sim p \vee \sim q) \}$$

$$\text{pues: } (q \vee \sim p) \wedge \sim p \equiv \sim p$$

$$\equiv \sim \{ [(\sim p \wedge q) \vee \sim p] \vee \sim q \}$$

$$\equiv \sim \{ (\sim p) \vee \sim q \}$$

$$\equiv \sim(\sim p) \wedge \sim(\sim q) \equiv p \wedge q$$

12. Simplificar la siguiente proposición compuesta: $[\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)] \vee [(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p]$.

Resolución:

$$[\sim p \Rightarrow \sim(p \Rightarrow q)] \vee [(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p]$$

$$\equiv [\sim p \Rightarrow \sim(\sim p \vee q)] \vee [(p \wedge (\sim p \vee q)) \Rightarrow p]$$

$$\equiv [\sim p \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \vee [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \Rightarrow p]$$

$$\equiv [p \vee (p \wedge \sim q)] \vee [(F \vee (p \wedge q)) \Rightarrow p]$$

$$\equiv [p] \vee [(p \wedge q) \Rightarrow p]$$

$$\text{pues: } p \vee (p \wedge \sim q) \equiv p; F \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge q$$

$$\equiv p \vee [(\sim p \wedge q) \vee p]$$

$$\equiv p \vee [(\sim p \vee \sim q) \vee p]$$

$$\equiv p \vee [V \vee \sim q]; \text{ pues } \sim p \vee p \equiv V$$

$$\equiv p \vee [V] \equiv V$$

13. Si $\#$ es un operador lógico definido por:

$$p \# q \equiv \{p \vee [(r \Rightarrow p) \wedge p]\} \Delta \{q \wedge (p \Leftrightarrow \sim p)\}$$

Hallar $p \# q$

Resolución:

$$p \# q \equiv \{p \vee [(r \Rightarrow p) \wedge p]\} \Delta \{q \wedge \underbrace{(p \Leftrightarrow \sim p)}_F\}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_F$$

$$\Rightarrow p \# q \equiv \{p \vee [(\sim r \vee p) \wedge p]\} \Delta F$$

$$p \# q \equiv \{p \vee (p)\} \Delta F = \underbrace{p \vee p}_{V} \Delta \underbrace{F}_{F} = V$$

$$\therefore p \# q = p$$

14. Si $\sim(\sim(p \Delta q)) \Rightarrow \sim(r \wedge p)$ es una proposición compuesta falsa, determine ¿cuál(es) de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $(\sim p \wedge m) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$

II. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (s \wedge q)$

III. $(x \vee \sim y) \Rightarrow (p \wedge r \wedge \sim q)$

Resolución:

$$\sim(\sim(p \Delta q)) \Rightarrow \sim(r \wedge p) \text{ es F}$$

$$\text{Entonces: } p \Delta q \text{ es V y } \sim(r \wedge p) \text{ es F}$$

De donde: $r \wedge p$ es V; es decir: r es V y p es V; como $p \Delta q$ es V, entonces q es F.

I. $(\underbrace{\sim p}_F \wedge m) \Rightarrow (x \Leftrightarrow y)$

$$\underbrace{F \wedge ?}_F \Rightarrow ?$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_V$$

II. $(p \Rightarrow r) \Rightarrow (s \wedge q)$

$$\underbrace{V \Rightarrow V}_V \Rightarrow \underbrace{? \wedge F}_F$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_F$$

III. $(x \vee \sim y) \Rightarrow (\underbrace{p \wedge r}_V \wedge \underbrace{\sim q}_V)$

$$? \Rightarrow \underbrace{V \wedge V}_V$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_V$$

$\therefore$ Son verdaderas I y III.

15. De las siguientes proposiciones:

I. $p \Rightarrow (p \vee q)$

II. $(p \wedge q) \Rightarrow p$

III. $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

IV. $[p \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \vee \sim p$

Son tautológicas.

Resolución:

I. $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv \sim p \vee (p \vee q)$

$$\equiv (\sim p \vee p) \vee q \equiv V \vee q \equiv V$$

Es una tautología

II. $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv \sim(p \wedge q) \vee p$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee p \equiv (\sim p \vee p) \vee \sim q$$

$$\equiv (V) \vee \sim q \equiv V$$

Es una tautología

III. Como $\sim q \Rightarrow \sim p \equiv p \Rightarrow q$, entonces:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

$$\equiv \underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\equiv r} \Leftrightarrow \underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\equiv r}$$

$$\equiv r \Leftrightarrow r \equiv V$$

Es una tautología

IV. $[p \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \vee \sim p$

$$\equiv [p \wedge (p \vee q)] \vee \sim p$$

$$\equiv (p) \vee \sim p \equiv V$$

Es una tautología

$\therefore$ I, II, III y IV

16. En relación a la proposición compuesta:

$$T: [p \Rightarrow (q \wedge r)] \Delta [p \wedge (\sim q \vee \sim r)]$$

Indique cuál de los siguientes enunciados son correctos:

I. S es una contradicción.

II. S es una contingencia.

III. S es una tautología.

Resolución:

La proposición T se puede mejorar así:

$$T: [p \Rightarrow (q \wedge r)] \Delta [p \wedge \sim(q \wedge r)]$$

$$\equiv [p \Rightarrow (q \wedge r)] \Delta \sim[p \vee (q \wedge r)]$$

$$\equiv [p \Rightarrow (q \wedge r)] \Delta \sim[p \Rightarrow (q \wedge r)]$$

Por lo que T tiene la forma $a \Delta \sim a$, y como a , $\sim a$ son de valores opuestos, entonces $a \Delta \sim a$ es V siempre; por lo tanto, T es una tautología.

$\therefore$ Solo III es correcto.

17. La siguiente proposición:

$$[(\sim p \vee q) \vee \sim(p \wedge \sim q)] \wedge [p \wedge \sim r]; \text{ es equivalente a:}$$

I. $(p \Rightarrow q) \wedge \sim(p \Rightarrow r)$

II. $(p \wedge q) \vee \sim(p \Rightarrow r)$

III. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge r)$

IV. $\sim(p \wedge q) \Rightarrow r$

V. $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)$

Resolución:

$$[(\sim p \vee q) \vee \sim(p \wedge \sim q)] \wedge (p \wedge \sim r)$$

$$\equiv \{(\sim p \vee q) \vee [\sim p \vee \sim(\sim q)]\} \wedge (p \wedge \sim r)$$

$$\equiv [\sim p \vee q] \vee [\sim p \vee q] \wedge \sim(\sim p \vee r)$$

$$\equiv [\sim p \vee q] \wedge \sim(\sim p \vee r)$$

$$\equiv (p \Rightarrow q) \wedge \sim(p \Rightarrow r)$$

$\therefore$ Es equivalente a I.

18. Si $*$ es un operador lógico definido mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Simplificar la proposición: $(p * q) * (q * p)$

Resolución:

p	q	$p * q$	$\sim(p \vee q)$
V	V	F	F (V)
V	F	F	F (V)
F	V	F	F (V)
F	F	V	V (F)

Se nota que:

$$p * q \equiv \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

También, nótese que:

$$p * q \equiv q * p \wedge r * r \equiv \sim r$$

$$\text{Luego: } (p * q) * (q * p) \equiv (p * q) * (p * q)$$

$$\equiv \sim(p * q) \equiv \sim[\sim(p \vee q)]$$

$$\equiv p \vee q$$

19. Si $*$ es un operador lógico definido mediante la tabla adjunta, tal que $(s * t) * (t * s)$ es verdadero.

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Hallar el valor de verdad de $\sim(s * t)$.

Resolución:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Al igual que en el problema anterior:

$$p * q \equiv \sim(q \Rightarrow p) \equiv q \wedge \sim p$$

$$\text{Luego: } (s * t) * (t * s) \equiv (t \wedge \sim s) * (s \wedge \sim t)$$

$$\equiv (s \wedge \sim t) \wedge \sim(t \wedge \sim s)$$

$$\equiv (s \wedge \sim t) \wedge (\sim t \vee s)$$

$$\equiv s \wedge [\sim t \wedge (\sim t \vee s)]$$

$$\equiv s \wedge (\sim t) \equiv \sim(s \Rightarrow t) \text{ es V}$$

Entonces: $s \Rightarrow t$ es F

Luego: s es V y t es F

$$\sim(s * t) \equiv \sim(t \wedge \sim s) \equiv \sim t \vee s$$

$$\equiv t \Rightarrow s \text{ es V}$$

$$\therefore \sim(s * t) \text{ es V}$$

20. Si $\square$ es un operador lógico definido mediante la siguiente tabla:

p	q	$p \square q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Simplificar la proposición:

$$[p \square (\sim p \square q)] \square q$$

Resolución:

p	q	$p \square q$	$\sim(q \Rightarrow p)$
V	V	F	F (V)
V	F	F	F (V)
F	V	V	V (F)
F	F	F	F (V)

Se nota que: $p \square q \equiv \sim(q \Rightarrow p) \equiv q \wedge \sim p$

$$\text{Luego: } [p \square (\sim p \square q)] \square q \equiv [p \square (q \wedge \sim p)] \square q$$

$$\equiv [(q \wedge \sim p) \wedge \sim p] \square q$$

$$\equiv [q \wedge (p \wedge \sim p)] \square q$$

$$\equiv [q \wedge (F)] \square q \equiv F \square q$$

$$\equiv q \wedge (\sim F) \equiv q \wedge V \equiv q$$

21. Si p, q, x, z, y, t son proposiciones lógicas, tal que cumplen las condiciones: $p \Delta q$ es verdadera, $\sim x \Rightarrow y$ es verdadera, indicar el valor de la verdad de las siguientes proposiciones:

I. $z \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

II. $p \Leftrightarrow \sim q$

III. $(\sim x \wedge \sim y) \Rightarrow t$

Resolución:

$$p \Delta q \text{ es } V \wedge \sim x \Rightarrow y \text{ es } V$$

Luego: p y q tienen valores opuestos

$$(\sim x \Rightarrow y \equiv x \vee y) \text{ es } V$$

I. $z \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

V pues uno de ellos es V

$$\equiv z \Rightarrow V \equiv V$$

II. $p \Leftrightarrow \sim q$ es V

pues p y $\sim q$ tienen el mismo valor.

III. $(\sim x \wedge \sim y) \Rightarrow t \equiv \sim(x \vee y) \Rightarrow t$

$$\equiv \sim(V) \Rightarrow t \equiv F \Rightarrow t \equiv V$$

$$\therefore VVV$$

22. Simplificar la proposición:

$$\sim\{[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \vee q))]\} \Rightarrow \sim(p \vee q)$$

Resolución:

$$\sim\{[(\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge (\sim p \vee q))]\} \Rightarrow \sim(p \vee q)$$

$$\equiv \sim\{[(\sim p \vee q) \vee [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)]]\} \Rightarrow \sim(p \vee q)$$

F

$$\equiv \sim\{[(\sim p \vee q) \vee (p \wedge q)]\} \Rightarrow \sim(p \vee q)$$

$$\equiv \sim\{[\sim(\sim p \vee q) \vee (p \wedge q)] \vee \sim(p \vee q)\}$$

Por una de las leyes de Morgan:

$$\equiv [\sim(\sim p \vee q) \vee (p \wedge q)] \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv [\sim(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q)] \vee [(p \wedge q) \wedge (p \vee q)]$$

F

$$\equiv (p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p \wedge [q \wedge (p \vee q)]$$

q

$$\equiv p \wedge q$$

23. Si se cumple:

$$(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r) \equiv (s \wedge t) \Leftrightarrow (\sim s \vee \sim t)$$

Simplificar la proposición:

$$[(p \wedge r) \Rightarrow (s \vee t)] \wedge (q \wedge t)$$

Resolución:

$$(s \wedge t) \Leftrightarrow (\sim s \vee \sim t)$$

$$\equiv (s \wedge t) \Leftrightarrow \sim(s \wedge t) \equiv F$$

Es decir: $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$ es F

Entonces: $(\sim p \wedge q)$ es V y $(p \vee r)$ es F, de donde puede notarse que p es F; q es V y r es V.

Luego: $[(p \wedge r) \Rightarrow (s \vee t)] \wedge (q \wedge t)$

$$\begin{array}{c} F \wedge V \\ \underbrace{\quad \Rightarrow \quad ?} \\ \equiv \quad V \quad \wedge \quad (q \wedge t) \\ \equiv q \wedge t \equiv V \wedge t \equiv t \end{array}$$

24. Hallar el valor de verdad de:

$$M = [(p \wedge q) \Rightarrow r] + [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

Resolución:

$$M = [(p \wedge q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

$$M = [\sim(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\sim q \vee r)]$$

$$M = [\sim(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [\sim p \vee (\sim q \vee r)]$$

$$M = [\sim(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(\sim p \vee \sim q) \vee r]$$

$$M = [\sim(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [\sim(p \wedge q) \vee r]$$

$$M = s \Leftrightarrow s \equiv V \quad \therefore M \text{ es una tautología}$$

25. Simplificar: $\{[\sim(q \Rightarrow p)] \wedge [\sim(p \vee \sim q)]\} \vee \sim q$

Resolución:

$$\{[\sim(q \Rightarrow p)] \wedge [\sim(p \vee \sim q)]\} \vee \sim q$$

$$\equiv \sim[(q \Rightarrow p) \vee (p \vee \sim q)] \vee \sim q$$

$$\equiv \sim[(\sim q \vee p) \vee (p \vee \sim q)] \vee \sim q$$

$$\equiv \sim[\sim q \vee p] \vee \sim q$$

$$\text{pues: } r \vee r \equiv r$$

$$\equiv \sim[(\sim q \vee p) \wedge q]$$

$$\equiv \sim[(\sim q \wedge q) \vee (p \wedge q)]$$

$$\equiv \sim[F \vee (p \wedge q)] \equiv \sim(p \wedge q)$$

$$\equiv \sim p \vee \sim q \equiv p \Rightarrow \sim q \quad \text{o también } \equiv q \Rightarrow \sim p$$

26. Si se define: $p \nabla q \equiv \sim p \wedge \sim q$, simplificar:

$$M = [(p \nabla q) \nabla q] \nabla [(p \nabla p) \nabla \sim p]$$

Resolución:

$$p \nabla q \equiv \sim p \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$$

$$M = \underbrace{[(p \nabla q) \nabla q]}_r \nabla \underbrace{[(p \nabla p) \nabla \sim p]}_s$$

$$r \equiv (p \nabla q) \nabla q \equiv (\sim p \wedge \sim q) \nabla q$$

$$\equiv \sim(\sim p \wedge \sim q) \wedge \sim q$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge \sim q$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$s \equiv (p \nabla p) \nabla \sim p \equiv \sim(p \vee p) \nabla \sim p$$

$$\equiv \sim p \nabla \sim p \equiv \sim(\sim p) \wedge \sim(\sim p)$$

$$\equiv p \wedge p \equiv p$$

$$\text{Luego: } M = (p \wedge \sim q) \nabla p$$

$$M = \sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim p$$

$$M = (\sim p \vee q) \wedge \sim p \quad \therefore M = \sim p$$

27. Si se conoce $[(p * q) * r] * s$ es F, además:

p	q	p * q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Determinar los valores de verdad de los siguientes enunciados:

I. $p \Rightarrow r$ II. $s \Rightarrow r$ III. $\sim p \Rightarrow q$

Resolución:

De la tabla, se puede notar que: $p * q \equiv q \Rightarrow p$

Además: $[(p * q) * r] * s$ es falsa

$s \Rightarrow (p * q) * r$ es falsa

Entonces: s es V y $(p * q) * r$ es F

$r \Rightarrow (p * q)$ es falsa, de donde r es V y $(p * q)$ es F; y entonces: q es V y p es F.

Luego:

I. $p \Rightarrow r$ es V II. $s \Rightarrow r$ es V

F V V V

III. $\sim p \Rightarrow q$ es V

V V

28. Si definimos # como: $p \# q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$

Determine una expresión equivalente de $p \# q$.

Resolución:

$$p \# q \equiv (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$$

$$\equiv [p \wedge (\sim p \vee \sim q)] \vee [q \wedge (\sim p \vee \sim q)]$$

$$\equiv [(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)] \vee [(q \wedge \sim p) \vee (q \wedge \sim q)]$$

$$\equiv [F \vee (p \wedge \sim q)] \vee [(q \wedge \sim p) \vee F]$$

$$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

$$\equiv \sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)$$

$$\equiv \sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p)$$

$$\equiv \sim[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

$$\equiv \sim(p \Leftrightarrow q)$$

29. Sea $A = \{1; \{1; 1\}; \{1\}; \{1; 1; 1\}\}$, determine la secuencia correcta, al determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. A tiene 4 elementos

II. $\{1\} \in A$

III. $\{1\} \subset A$

Resolución:

$$A = \{1; \{1; 1\}; \{1\}; \{1; 1; 1\}\}$$

$$\Rightarrow A = \{1; \{1\}; \{1\}; \{1\}\}$$

$$\Rightarrow A = \{1; \{1\}\}$$

I. A tiene 2 elementos. (F)

II. $\{1\}$ es un elemento de A, por lo que: $\{1\} \in A$ (V)

III. Tenga en cuenta que: si $x \in A \Rightarrow \{x\} \subset A$

Como: $1 \in A \Rightarrow \{1\} \subset A$ (V)

30. Si p, q, r, s, t, u y w son proposiciones lógicas tal que: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ es falsa, $q \Leftrightarrow (p \Rightarrow t)$ es falsa, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones, es:

- I. $\sim t \wedge (r \Rightarrow w)$ II. $q \vee (\sim r \Rightarrow u)$
 III. $t \Rightarrow (s \Delta r)$

Resolución:

Si: $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ es F $\Rightarrow p$ es V y $q \Rightarrow r$ es F

Entonces: p es V; q es V y r es F

$q \Leftrightarrow (p \Rightarrow t)$ es F.

Entonces $p \Rightarrow t$ es F y como p es V

Entonces t es F

- I. $\sim t \wedge (r \Rightarrow w) \equiv V \wedge (F \Rightarrow w)$
 $\equiv V \wedge (V) \equiv V$

- II. $q \vee (\sim r \Rightarrow u) \equiv V \vee (\sim F \Rightarrow u) \equiv V$

- III. $t \Rightarrow (s \Delta r) \equiv F \Rightarrow (s \Delta r) \equiv V \quad \therefore VVV$

31. Se sabe que x es un conjunto tal que: $x \in P(A)$. Para todo conjunto A . Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- I. $x \cap x = x, \forall A$ II. $x - A = x, \forall A$
 III. $(A - x) \cup (x - A) = A, \forall A$

Resolución:

$x \in P(A), \forall A \Rightarrow x \subset A$

- I. $x \cap x = x, \forall A$ (V)

- II. $x - A = x, \forall A$ (F)

Como $x \subset A \Rightarrow x - A = \emptyset$

- III. $(A - x) \cup (x - A) = A$ (F)

Es igual a: $A - x$

$\therefore VFF$

32. Sea el conjunto $A = \{0; 1; \{1\}; \{0; 1\}; \{0\}\}$ y las siguientes proposiciones:

- I. $\{1\} \in A$ II. $\{0; 1\} \in A$
 III. $\{1\} \subset A$ IV. $\{0; \{1\}\} \subset A$

V. $\{\{0\}\} \subset A$

Determinar el número de proposiciones verdaderas.

Resolución:

$A = \{0; 1; \{1\}; \{0; 1\}; \{0\}\}$

- I. $\{1\} \in A$ (V)

- II. $\{0; 1\} \in A$ (V)

- III. $\{1\} \subset A$ (V)

- IV. $\{0; \{1\}\} \subset A$ (V), pues $0 \in A \wedge \{1\} \in A$.

- V. $\{\{0\}\} \subset A$ (V), pues $\{0\} \in A$

$\therefore$ Las 5 son verdaderas

33. Sean los conjuntos $A = \{\{1; \{1\}\}; \{\emptyset\}\}$, y $B = \{\{1\}; 4; \emptyset\}$. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. $\{n(P(A))\} \in B$

- II. $A \cap B \notin A$, entonces $\emptyset \notin P(A) \cap B$

- III. $\{1\} \in A$, si y solo si $A - B \in P(A)$

- IV. $\{\{1\}; \emptyset\} \in P(B)$

Resolución:

$A = \{\{1; \{1\}\}; \{\emptyset\}\}$

$B = \{\{1\}; 4; \emptyset\}$

$n(A) = 2 \Rightarrow n(P(A)) = 2^2 = 4$

- I. $\{n(P(A))\} = \{4\} \in B$ (F)
 pues: $\{4\} \subset B$

- II. $A \cap B \notin A \Rightarrow \emptyset \notin P(A) \cap B$

F; pues: $A \cap B = \emptyset \subset A$

Luego, la proposición es (V)

- III. $\{1\} \in A \Leftrightarrow A - B \in P(A)$

F V, pues: $A - B = A$

Luego, la proposición es (F)

- IV. $\{\{1\}; \emptyset\} \in P(B)$; V, pues $\{\{1\}; \emptyset\} \subset B$

$\therefore FVVF$

34. Indicar el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

- I. $\forall x \in \mathbb{R}, x^x \in \mathbb{R}$

- II. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{R}: x^y \in \mathbb{R}$

- III. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{Q}: x^y \in \mathbb{Q}$

Resolución:

- I. $\forall x \in \mathbb{R}: x^x \in \mathbb{R}$ (F),
 pues: $(-0.5)^{-0.5} \notin \mathbb{R}$

- II. $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{R}: x^y \in \mathbb{R}$ (F)
 pues: $(-\frac{1}{3})^{-0.5} \notin \mathbb{R}$

- III. $\forall x \in \mathbb{R}: \exists y \in \mathbb{Q}: x^y \in \mathbb{Q}$ (F),
 pues: $x^y \notin \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}$

$\therefore FFF$

35. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \Leftrightarrow x > 0\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / (x^2/16) \in A\}$, halle el número de elementos de B .

Resolución:

$A = \{x \in \mathbb{R} / x < 1 \Leftrightarrow x > 0\}$

$p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$x < 1 \Leftrightarrow x > 0 \equiv (x < 1 \wedge x > 0) \vee (x \geq 1 \wedge x \leq 0) \equiv$

$\equiv x < 1 \wedge x > 0 \equiv x \in \langle 0; 1 \rangle$

$A = \langle 0; 1 \rangle; B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2/16 \in A\}$

$\Rightarrow 0 < x^2/16 < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 16$

$\Rightarrow B = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

$\therefore n(B) = 7$

36. Sea el conjunto $A = \{3; 5; \{2; 8\}\}$, halle el valor de verdad de cada una de las proposiciones:

- I. $\exists x \in P(A) / 2 \in x$

- II. $\exists x \in P(A) / \{2; 8\} \subset x$

- III. $\exists x \in P(A) / \{\emptyset\} \subset x$

- IV. $\exists x \in P(A) / \{3\} \subset x$

Resolución:

$A = \{3; 5; \{2; 8\}\}$

- I. $\exists x \in P(A) / 2 \in x$ (F)

No hay un subconjunto $x \subset A$, de modo que: $2 \in x$.

$$\text{II } \exists x \in P(A) / \{2; 8\} \mid 1 \in x(F)$$

$$\{2; 8\} \in A \Rightarrow \{2; 8\} \subset x \subset A$$

$$\text{III. } \exists x \in P(A) / \{\emptyset\} \subset x \quad (F)$$

pues $\{\emptyset\} \notin A$.

$$\text{IV. } \exists x \in P(A) / \{3\} \subset x \quad (V)$$

$$\text{Pues: } 3 \in A \wedge \{3\} \subset \{3; 5\} \subset A$$

$\therefore$ FFFV

37. Si el valor de verdad de la siguiente proposición:
 $(r \vee s) \Rightarrow [(p \wedge \sim s) \Rightarrow (p \wedge \sim q)]$ es falso, hallar el
 valor de verdad de las proposiciones:

I. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ II. $q \wedge (\sim p \vee \sim s)$

III. $(\sim p \Rightarrow r) \vee \sim s$

Resolución:

$$(*3) \quad (*1) \quad (*2)$$

$$(r \vee s) \Rightarrow [(p \wedge \sim s) \Rightarrow (p \wedge \sim q)]$$

$$\begin{array}{ccc} \text{V} & \text{V} & \text{V} \\ \text{V} & \text{F} & \text{V} \\ \text{F} & \text{V} & \text{F} \\ \text{F} & \text{F} & \text{V} \end{array}$$

De (*1) $\left\{ \begin{array}{l} P \text{ es V} \\ \sim s \text{ es V} \Rightarrow s \text{ es F} \end{array} \right.$

De (*2) $\sim q \text{ es F} \Rightarrow q \text{ es V}$

De (*3) $r \vee s \equiv V$; $r \text{ es V}$

$$\downarrow \downarrow$$

Luego tenemos:

I) $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ II) $q \wedge (\sim p \wedge \sim s)$

$$\begin{array}{ccc} \text{V} & \text{F} & \text{V} \\ \text{F} & \text{V} & \text{V} \end{array}$$

(F) (V)

III) $(\sim p \Rightarrow r) \vee \sim s$

$$\begin{array}{ccc} \text{F} & \text{V} & \text{V} \\ \text{V} & \text{V} & \text{V} \end{array}$$

(V)

38. Simplificar la siguiente proposición:

$$t = \{(\sim p \vee q) \vee [(p = q) \wedge r]\} \wedge q$$

Resolución:

Sabemos que: $p = q \equiv \sim p \vee q$

$$t = \{(\sim p \vee q) \vee [(\sim p \vee q) \wedge r]\} \wedge q$$

Absorción

$$t = (\sim p \vee q) \wedge q$$

$$t = q \wedge (q \vee \sim p) \Rightarrow t = q$$

Absorción

39. Se definen las operaciones:

$$p * q = \sim p \Rightarrow \sim q \wedge p \# q = \sim p \wedge q$$

Simplificar:

$$[(\sim p) * q] \# [(\sim q) \# p]$$

Resolución:

$$\sim p * q = \sim(\sim p) \Rightarrow \sim q = p \Rightarrow \sim q = \sim p \vee \sim q = \sim(p \wedge q)$$

$$\sim q \# p = \sim(\sim q) \wedge p = q \wedge p = p \wedge q$$

Entonces:

$$\begin{aligned} [(\sim p) * q] \# [(\sim q) \# p] &= [\sim(p \wedge q)] \# [p \wedge q] \\ &= (p \wedge q) \wedge (p \wedge q) \\ &= p \wedge q \end{aligned}$$

40. Sabiendo que:

p	q	p o q
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

y si $[(p \vee q) \vee r] \vee s$, es falso

Hallar los valores de verdad de:

I) $p \Rightarrow r$ II) $s \Rightarrow r$ III) $\sim p \Rightarrow q$

Resolución:

De la tabla de verdad:

$p \vee q$, es Falso $\Rightarrow p$ es F $\wedge$ q es V

$[(p \vee q) \vee r] \vee s$ es falso

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{F} & \text{V} & \downarrow \\ \text{F} & \text{V} & \downarrow \\ & \text{F} & \text{V} \end{array}$$

p es F
q es V
r es V
s es V

I. $p \Rightarrow r$ II. $s \Rightarrow r$ III. $\sim p \Rightarrow q$

$$\begin{array}{ccc} \text{F} \Rightarrow \text{V} & \text{V} \Rightarrow \text{V} & \text{V} \Rightarrow \text{V} \\ \text{V} & \text{V} & \text{V} \end{array}$$

41. A que es igual: $\{(p = q) \wedge [(p = q) \vee r]\} \wedge q$

Resolución:

$$\{(p = q) \wedge [(p = q) \vee r]\} \wedge q; \text{ Absorción}$$

$$(p = q) \wedge q; \text{ Condicional}$$

$$(\sim p \vee q) \wedge q; \text{ Conmutativa}$$

$$(q \vee \sim p) \wedge q; \text{ Conmutativa}$$

Absorción

42. Simplificar el esquema: $\{(\sim p \vee q) \vee [(p = q) \wedge r]\} \wedge q$

Resolución:

Se sabe que: $p = q \equiv \sim p \vee q$

Con lo cual: $\{(\sim p \vee q) \vee [(\sim p \vee q) \wedge r]\} \wedge q$

Absorción

Luego se tendrá:

$$\begin{array}{ccc} (\sim p \vee q) \wedge q; & (q \vee \sim p) \wedge q; & q \wedge (q \vee \sim p) \equiv q \\ \text{Conmutativa} & \text{Conmutativa} & \text{Absorción} \end{array}$$

43. Simplificar la siguiente proposición:

$$\sim [\sim(p \wedge \sim q) \Rightarrow p] \vee q$$

Resolución:

Se sabe que: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$; luego aplicamos esta propiedad dentro del corchete.

$$\sim [(p \wedge \sim q) \vee p] \vee q; \quad \sim [p \vee (p \wedge \sim q)] \vee q$$

Conmutativa Absorción

$$\sim(p) \vee q \equiv \sim p \vee q \equiv p = q$$

44. Simplificar el esquema: $(\sim p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
Resolución:

 Dado que: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$; entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} (\sim p \wedge q) \Rightarrow (\sim q \vee p); & \quad \sim (\sim p \wedge q) \vee (\sim q \vee p) \\ \text{Condiciona} & \quad (p \vee \sim q) \vee (\sim q \vee p) \\ & \quad \text{Conmutativa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (p \vee \sim q) \vee (p \vee \sim q) & \equiv p \vee \sim q \\ \text{Idempotencia} & \end{aligned}$$

 45. Si: $p \odot q \equiv [(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \vee q] \wedge p$
Simplificar:

$$\{[(\sim p \wedge r) \odot q] \odot (p \odot q)\} \odot (p \vee r)$$

Resolución:

 Vamos a redefinir $p \odot q$

$$p \odot q \equiv \{[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \vee q\} \wedge p$$

Aplicando dos veces condicional:

$$p \odot q \equiv \{[\sim(\sim p \vee q) \vee p] \vee q\} \wedge p$$

$$\text{Por Morgan: } \equiv \{[(p \wedge \sim q) \vee p] \vee q\} \wedge p$$

$$\text{Por absorción, dos veces: } \equiv (p \vee q) \wedge p \equiv p$$

$$\therefore p \odot q \equiv p$$

Luego, en la expresión a simplificar:

$$\begin{aligned} & \{[(\sim p \wedge r) \odot q] \odot (p \odot q)\} \odot (p \vee r) \\ & \equiv [(\sim p \wedge r) \odot q] \odot (p \odot q), \text{ (definición de } \odot) \\ & \equiv (\sim p \wedge r) \odot q \\ & \equiv \sim p \wedge r \end{aligned}$$

46. La proposición equivalente a:

No es un buen estudiante, sin embargo destaca en el fútbol es:

- No es cierto que, sea un buen estudiante o no destaque en fútbol.
- Es un buen estudiante o no destaca en fútbol.
- No es un buen estudiante y no destaca en fútbol.
- No es cierto que, no sea un buen estudiante y destaque en fútbol.
- No es el caso que, sea buen estudiante y no destaque en el fútbol.

Resolución:

Consideremos:

 p : es un buen estudiante

 q : destaca en fútbol

 Formalizando: no p , sin embargo q

Simbolizando:

$$\equiv \sim p \wedge q$$

$$\equiv \sim(p \vee \sim q), \text{ por Morgan}$$

Resulta:

- No es cierto que, sea un buen estudiante o no destaque en fútbol.

47. Si el siguiente esquema es falso:

$$\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge s\} \Rightarrow (q \vee r)$$

Hallar el valor de verdad de:

$$I. [(p \vee s) \wedge q] \Rightarrow (r \vee s)$$

$$II. p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \wedge s)]$$

$$III. (\sim p \wedge q) \Rightarrow [p \vee (\sim q \vee r)]$$

Resolución:

Sabemos que:

$$\{[(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge s\} \Rightarrow (q \vee r) \equiv F$$

$$\bullet q \vee r \equiv F \Rightarrow q \equiv F; r \equiv F$$

$$\bullet [(p \wedge q) \Rightarrow r] \wedge s \equiv V$$

$$s \equiv V; p \equiv F$$

$$\text{Además: } (p \wedge q) \Rightarrow r \equiv V$$

$$\begin{aligned} & F \quad F \\ & F \end{aligned}$$

Luego:

$$I. [(p \vee s) \wedge q] \Rightarrow (r \vee s) \equiv V$$

$$\begin{aligned} & V \quad F \\ & V \\ & F \end{aligned}$$

$$II. p \Rightarrow [q \Rightarrow (r \wedge s)] \equiv V$$

$$\begin{aligned} & F \\ & V \end{aligned}$$

$$III. (\sim p \wedge q) \Rightarrow [p \vee (\sim q \vee r)] \equiv V$$

$$\begin{aligned} & F \\ & F \end{aligned}$$

$$\therefore VVV$$

48. El equivalente de la proposición:

"Hay que pagar 100 soles y ser socio para ingresar al teatro" es:

- No ingresar al teatro o pagar 100 soles, y ser socio.
- Pagar 100 soles o ser socio, y no ingresar al teatro.
- Pagar 100 soles y ser socio, o no ingresar al teatro.
- Pagar 100 soles y no ser socio, y entrar al teatro.
- No es cierto que se pague 100 soles o sea socio, o ingrese al teatro.

Resolución:

Formalizando tenemos:

 p : pagar 100 soles

 q : ser socio

 r : ingresar al teatro

 Simbolizando se tiene: hay que p y q para r

$$\equiv (p \wedge q) \Rightarrow r, \text{ por condicional: } \equiv \sim(p \wedge q) \vee r$$

 $\therefore$ No es cierto que se pague 100 soles y sea socio, o ingrese al teatro.

49. Si la proposición compuesta:

 $\sim \{ \sim(t \Rightarrow s) \wedge \sim[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \Delta p)] \}$ es falsa, ¿cuántas de las proposiciones p , q , r , s y t son verdaderas?

Resolución:

Sea:

$$I. \underbrace{\sim\{(\sim(t \Rightarrow s) \wedge \sim[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \Delta p)])\}}_{V} \equiv F$$

$$II. \underbrace{\sim(t \Rightarrow s)}_V \wedge \underbrace{\sim[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \Delta p)]}_V \equiv V$$

$$III. \sim(t \Rightarrow s) \equiv V \\ t \Rightarrow s \equiv F \Rightarrow t = V; s = F$$

$$IV. \underbrace{\sim[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \Delta p)]}_F \equiv V$$

$$\text{Luego: } \underbrace{(\sim p \wedge q)}_V \Rightarrow \underbrace{(r \Delta p)}_F \equiv F$$

$$\text{Entonces: } \underbrace{\sim p}_V \wedge \underbrace{q}_V \equiv V \\ \Rightarrow p = F; q = V$$

$$\text{También: } r \Delta p \equiv F \\ r \Delta F \equiv F \Rightarrow r = F$$

∴ Son verdaderos: 2

50. Si: $p \vee (r \Rightarrow w) \equiv \sim(t \Rightarrow t) \vee \sim(p \Rightarrow p)$
Simplificar la proposición molecular:
 $[(p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge \{[(\sim t \vee q) \wedge (q \Rightarrow \sim q)] \vee \sim t\}]$

Resolución:

$$p \vee (r \Rightarrow w) \equiv \sim(t \Rightarrow t) \vee \sim(p \Rightarrow p) \\ \equiv \underbrace{\sim(\sim t \vee t)}_V \vee \underbrace{\sim(\sim p \vee p)}_V \\ \equiv F \vee F \equiv F$$

$$p \vee (r \Rightarrow w) \equiv F \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ F & V & F \\ & \downarrow & \\ & F & \end{array}$$

Reemplazando estos valores en la proposición pedida:

$$[(p \Rightarrow (q \wedge r)) \wedge \{[(\sim t \vee q) \wedge (q \Rightarrow \sim q)] \vee \sim t\}] \\ \begin{array}{l} \uparrow \\ F \\ \hline V \quad \wedge \{[(\sim t \vee q) \wedge (\sim q \vee \sim q)] \vee \sim t\} \\ \quad \quad \quad \text{Idempotencia} \\ V \quad \wedge \{[(\sim t \vee q) \wedge \sim q] \vee \sim t\} \\ \quad \quad \quad \text{Absorción} \\ V \quad \wedge \{[(\sim q \wedge \sim t)] \vee \sim t\} \\ \quad \quad \quad \text{Absorción} \\ V \quad \wedge \sim t \equiv \sim t \end{array}$$

51. "El equivalente de la proposición: Si Juan es deportista, mantiene una dieta estricta"

Es:

- I. O Juan es deportista o mantiene una dieta estricta.
- II. Juan no es deportista y mantiene una dieta estricta.
- III. Juan mantiene una dieta estricta o no es deportista.

IV. Juan es deportista y no mantiene una dieta estricta.

V. Juan no es deportista y no mantiene la dieta estricta.

Resolución:

Simbolizando:

Si Juan es deportista, mantiene una dieta estricta.

p : Juan es deportista

q : mantiene una dieta estricta

Si: $p, q \equiv p \Rightarrow q$ Equivalente: $\sim p \vee q$, por condicional

Luego:

"Juan no es deportista o mantiene una dieta estricta".

$\equiv$ "Juan mantiene una dieta estricta o no es deportista".

52. Si vas al estadio pierdes tu dinero. Si no vas al estadio, vas a la playa.

Si no fuiste a la playa, entonces:

- I. No fuiste al estadio.
- II. No perdiste tu dinero.
- III. Pierdes tu dinero.
- IV. Fuiste al estadio y ganaste dinero.
- V. Perdiste tu dinero y no fuiste a la playa.

Resolución:

Consideremos:

p : vas al estadio

q : pierdes tu dinero

r : vas a la playa

Simbolizando los enunciados, tenemos:

$$I. p \Rightarrow q$$

$$II. \sim p \Rightarrow r$$

Por propiedad de la condicional:

$$\sim p \Rightarrow r \equiv \sim r \Rightarrow \sim(\sim p), \quad \text{transposición.} \\ \equiv \sim r \Rightarrow p, \quad \text{doble negación}$$

$$III. \sim r \Rightarrow p$$

$$\text{De I y III: } \sim r \Rightarrow p \wedge p \Rightarrow q$$

$$\therefore \sim r \Rightarrow q \text{ (transitiva)}$$

Luego:

"Si no vas a la playa entonces pierdes tu dinero".

53. Si la proposición:

$$(\sim p \wedge q) \Rightarrow [(p \wedge r) \vee t] \equiv F$$

Hallar el valor de verdad de:

$$I. \sim[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim t)]$$

$$II. (\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)]$$

$$III. \sim \{ \sim [\sim (p \Rightarrow q) \Rightarrow (s \wedge w)] \}$$

Resolución:

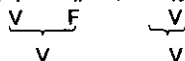
$$\text{De: } \underbrace{(\sim p \wedge q)}_V \Rightarrow \underbrace{[(p \wedge r) \vee t]}_F \equiv F$$

$$\bullet \underbrace{\sim p}_V \wedge \underbrace{q}_V \equiv V \quad p \equiv F; q \equiv V$$

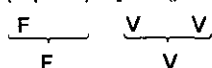
$$\bullet \underbrace{(p \wedge r)}_F \vee \underbrace{t}_F \equiv F \quad t \equiv F$$

Luego, analizando cada caso:

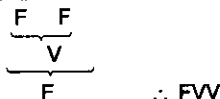
$$I. \sim[(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow (r \vee \sim t)] \equiv F$$



$$II. (\sim q \wedge \sim r) \vee [\sim t \wedge (p \vee q)] \equiv V$$



$$III. \# \{ \# [\sim(p \Rightarrow p) \Rightarrow (s \wedge w)] \} \equiv V$$



$\therefore FVV$

54. De la falsedad de: $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow \sim s)$

Hallar el valor de verdad de:

$$I. \sim(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p$$

$$II. \sim(\sim r \wedge s) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$$

$$III. p \Rightarrow \sim[q \Rightarrow \sim(s \Rightarrow r)]$$

Resolución:

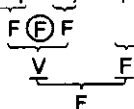
Del problema:

$$(p \Rightarrow \sim q) = F \Rightarrow \begin{cases} p = V \\ q = V \end{cases}$$

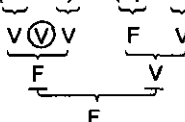
$$(\sim r \Rightarrow \sim s) = F \Rightarrow \begin{cases} r = F \\ s = V \end{cases}$$

Al reemplazar, se tendrá:

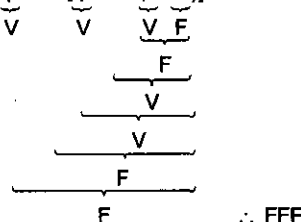
$$I. \sim(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p$$



$$II. \sim(\sim r \wedge s) \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$$

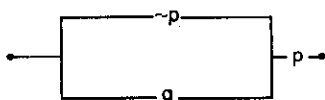


$$III. p \Rightarrow \sim[q \Rightarrow \sim(s \Rightarrow r)]$$



$\therefore FFF$

55. Hallar el equivalente del circuito:



Resolución:

Reduciendo el circuito:

$$(\sim p \vee q) \wedge p$$

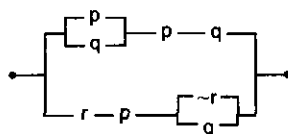
Conmutativa

$$p \wedge (\sim p \vee q)$$

Absorción

$$\therefore p \vee q$$

56. Si el costo de cada llave en la instalación mostrada es de S/.10, ¿en cuánto se reducirá el costo de esta instalación si se reemplaza este circuito por uno equivalente más simple?



Resolución:

Considerando que:

$$p \text{ --- } q \text{ --- } \equiv p \wedge q$$

$$\begin{matrix} p \\ \text{---} \\ q \end{matrix} \text{ --- } \equiv p \vee q$$

El circuito mostrado es equivalente a:

$$[(p \vee q) \wedge p \wedge q] \vee [p \wedge r \wedge (\sim r \vee q)]$$

Absorción

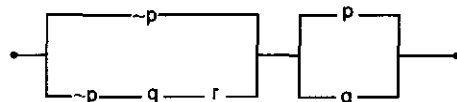
Absorción

$$(p \wedge q) \vee (r \wedge q \wedge p) \equiv p \wedge q \equiv \begin{matrix} p \text{ --- } q \\ \text{2 llaves} \end{matrix}$$

Por lo tanto, las 8 llaves del circuito mostrado pueden ser reemplazadas por 2.

$$\text{Ahorro: } (8 - 2) \times \text{S}/.10 = \text{S}/.60$$

57. El circuito lógico más simple que representa a:



Es:

Resolución:

Simbolizando el circuito, tenemos:

$$[\sim p \vee (\sim p \wedge q \wedge r)] \wedge (p \vee q)$$

Por la absorción, se tiene:

$$\equiv \sim p \wedge (p \vee q)$$

$$\equiv \sim p \wedge q$$

El circuito equivalente resulta:



58. Dada las proposiciones:

q: "17 es un número racional"

p y r cualquier proposición, además se sabe que:

$\sim[(r \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$ es verdadera.

Hallar el valor de verdad de:

$$I. r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

$$II. [(r \Rightarrow (p \wedge q)) \Leftrightarrow (q \wedge \sim p)]$$

$$III. (r \vee \sim p) \wedge (q \vee p)$$

Resolución:Del dato, $q \equiv F$, además:

$$\underbrace{(r \vee q)}_V \Rightarrow \underbrace{(r \Rightarrow p)}_F \equiv F$$

$$\begin{array}{ll} \text{I. } r \Rightarrow p \equiv F & \text{II. } r \vee q \equiv V \\ \underbrace{V \quad F} & \underbrace{V \quad F} \\ \therefore p \equiv F; & q \equiv F; \quad r \equiv V \end{array}$$

Luego:

$$\text{I. } r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \equiv V \\ \underbrace{V \quad \underbrace{V \quad V}_V}$$

$$\text{II. } [r \Rightarrow (p \wedge q)] \Leftrightarrow (q \wedge \sim p) \equiv V \\ \underbrace{V \quad F}_F \quad \underbrace{F \quad V}_F$$

$$\text{III. } (r \vee \sim p) \wedge (q \vee p) \equiv F \\ \underbrace{V \quad V}_V \quad \underbrace{F \quad F}_F$$

 $\therefore VVF$

59. Si la proposición $q \Rightarrow r$ es falsa, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } r \wedge (p \vee r) & \text{II. } \sim(q \wedge r) \\ \text{III. } (r \wedge \sim q) \Rightarrow p & \text{IV. } p \wedge (q \Rightarrow r) \end{array}$$

Resolución:Sabemos que: $q \Rightarrow r \equiv F$

$$\underbrace{V \quad F}$$

Luego:

$$\text{I. } r \wedge (p \vee r) \equiv F \quad \text{II. } \sim(q \wedge r) \equiv V \\ \underbrace{F \quad V} \quad \underbrace{V \quad F}$$

$$\text{III. } (r \wedge \sim q) \Rightarrow p \equiv V \quad \text{IV. } p \wedge (q \Rightarrow r) \equiv F \\ \underbrace{F \quad F}_F \quad \underbrace{V \quad F}_F$$

 $\therefore FVVF$

60. ¿Cuál(es) de las proposiciones son equivalentes a: Es necesario ser adulto y pagar diez soles para ver la película en el cine.

- No ser adulto o no pagar diez soles es suficiente para no ver la película en el cine.
- No ver la película o ser adulto, y pagar diez soles.
- Pagar diez soles y ser adulto, o no ver la película en el cine.

Resolución:

Sean las proposiciones:

p: ser adulto

q: pagar diez soles

r: ver la película en el cine

Luego:

Es necesario ser adulto y pagar diez soles para ver la película en el cine.

Se simboliza: $r \Rightarrow (p \wedge q)$ y las 3 proposiciones siguientes:

$$\text{I. } (\sim p \vee \sim q) \Rightarrow \sim r \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim r \\ \equiv (p \wedge q) \vee \sim r \equiv r \Rightarrow (p \wedge q)$$

$$\text{II. } (\sim r \vee p) \wedge q$$

$$\text{III. } (q \wedge p) \vee (\sim r) \equiv r \Rightarrow (p \wedge q)$$

 $\therefore$ I y III son equivalentes a la primera.

61. Cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes:

- El café es agradable, a menos que se le añada azúcar.
- El café es agradable si no añadimos azúcar.
- Si añadimos azúcar, el café es agradable.
- Si añadimos azúcar, el café no es agradable.

Resolución:

Simbolizando las proposiciones, tenemos:

p: el café es agradable

q: se le añade azúcar

$$\text{I. } p, \text{ a menos que } q \equiv p \wedge q$$

$$\text{II. } p \text{ si no } q \equiv \sim q \Rightarrow p$$

$$\text{III. } \text{si } q, p \equiv q \Rightarrow p$$

$$\text{IV. } \text{si } q, \text{ no } p \equiv q \Rightarrow \sim p$$

Expresando las condicionales en función de $\wedge$ y $\vee$

$$\text{I. } p \wedge q$$

$$\text{II. } \sim q \Rightarrow p \equiv \sim(\sim q) \vee p \equiv q \vee p$$

$$\text{III. } q \Rightarrow p \equiv \sim q \vee p$$

$$\text{IV. } q \Rightarrow \sim p \equiv \sim q \vee \sim p \equiv \sim(p \wedge q)$$

Luego; ninguna proposición es equivalente a otra.

62. Dado: $p * q \equiv \{[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \vee q\} \wedge p$

Simplificar:

$$\{[(\sim p * q) \wedge (r * \sim q)] * (p \Rightarrow q)\} \Rightarrow (p \vee r)$$

Resolución:

Tenemos el operador (*)

$$\begin{aligned} p * q &\equiv \{[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \vee q\} \wedge p \\ &\equiv \{[\sim(\sim p \vee q) \vee q] \vee q\} \wedge p \text{ (doble condicional)} \\ &\equiv \{[(p \wedge \sim q) \vee q] \vee q\} \wedge p \text{ (Morgan)} \\ &\equiv [(p \vee q) \vee q] \wedge p \text{ (absorción)} \\ &\equiv p \text{ (Asociando y absorción)} \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión a simplificar:

$$\begin{aligned} &\{[(\sim p * q) \wedge (r * \sim q)] * (p \Rightarrow q)\} \Rightarrow (p \vee r) \\ &\equiv [(\sim p * q) \wedge (r * \sim q)] \Rightarrow (p \vee r), \text{ (def. *)} \\ &\equiv (\sim p \wedge r) \Rightarrow (p \vee r), \text{ (def. *)} \\ &\equiv [(\sim p \wedge r) \wedge (p \vee r)] \vee \sim[(\sim p \wedge r) \wedge (p \vee r)], \text{ (bicond-} \\ &\quad \text{icional)} \\ &\equiv \{\sim p \wedge [r \wedge (p \vee r)]\} \vee \{(p \vee \sim r) \wedge (\sim p \wedge \sim r)\}, \text{ (Morgan)} \\ &\equiv (\sim p \wedge r) \vee \{[(p \vee \sim r) \wedge \sim r] \wedge \sim p\} \text{ (absorción)} \\ &\equiv (\sim p \wedge r) \vee (\sim r \wedge \sim p), \text{ (absorción)} \\ &\equiv \sim p \wedge (r \vee \sim r), \text{ (distributiva)} \\ &\equiv \sim p \wedge V, \text{ (tercio excluido)} \\ &\equiv \sim p \end{aligned}$$

63. Dada las proposiciones:

p: Edy trabaja cuando gana más de 20 dólares diarios.

q: Lolo trabaja, pero no se preocupa por su salario.

Simbolizar la proposición:

Lolo no trabaja o se preocupa por su salario a menos que Edy trabaje cuando gane más de 20 dólares diarios.

Resolución:

Desdoblando la proposición tenemos:

q : Lolo trabaja, pero no se preocupa por su salario.

m : Lolo trabaja.

n : se preocupa por su salario.

Es decir: $q \equiv m \wedge \sim n$

Formalizando la proposición propuesta, resulta:

No " m " o " n " a menos que " p "

$\equiv (\sim m \vee \sim n) \wedge p$, por Morgan

$\equiv \sim(m \wedge \sim n) \wedge p$

$\equiv \sim q \wedge p$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2001 - I)

Simbolizar lógicamente la expresión "Juan Pérez saldrá elegido y será congresista, si y solo si obtiene apoyo en su provincia".

- A) $P \Leftrightarrow q, r$ B) $p, q \Rightarrow r$ C) $(p \wedge q) \Leftrightarrow r$
 D) $(p \wedge q) \Rightarrow r$ E) $p \Rightarrow (q, r, s)$

Resolución:

Simbolizando la expresión:

p : saldrá elegido

q : será congresista

r : obtiene apoyo en su provincia

$\therefore (p \wedge q) \Leftrightarrow r$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - I)

Si se asumen las siguientes premisas:

- Si me pagan, trabajo
- Si no me pagan, renuncio
- Si me dan un incentivo, no renuncio
- Me dan un incentivo o denuncio a la empresa
- No trabajo

¿Cuáles de las siguientes proposiciones son conclusiones lógicas de estas premisas?

- I. No renuncio
 II. No me dan un incentivo
 III. Denuncio a la empresa

- A) I y II B) I y III C) II y III
 D) I, II y III E) Solo II

Resolución:

- Si me pagan, trabajo

$$\underbrace{p \Rightarrow t}$$
- Si no me pagan, renuncio

$$\underbrace{\sim p \Rightarrow r}$$
- Si me dan un incentivo, no renuncio

$$\underbrace{s \Rightarrow \sim r}$$
- Me dan un incentivo o denuncio a la empresa

$$\underbrace{s \vee q}$$
- No trabajo

$$\underbrace{\sim t}$$

Por tanto, a partir de la última premisa:

$\sim t \Rightarrow \sim p$: no me pagan

$\sim p \Rightarrow r$: renuncio

$r \Rightarrow \sim s$: no me dan incentivo

$\sim s \wedge q$: denuncio a la empresa

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2004 - II)

Respecto de: "Si gana Perú, no voy a estudiar". Indique la alternativa que se puede concluir:

- A) Si estudié, ganó Perú
 B) Si no ganó Perú, estudié
 C) Si no estudié, ganó Perú
 D) Si fui a estudiar, no ganó Perú
 E) Nunca, estudio porque siempre gana Perú

Resolución:

Del enunciado:

Si gana Perú, no voy a estudiar

$$\underbrace{p \quad \sim \quad q}$$

Si aplicamos la propiedad de transposición: $q \Rightarrow \sim p$

Se concluye: si fui a estudiar, no ganó Perú.

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2006 - I)

Si la mentira es un antivador, por tanto es negativa, sin embargo, no es mentira que sea negativa. Luego es correcto afirmar que:

- A) La mentira es un antivador
 B) No es verdad que la mentira sea un antivador y negativa
 C) La mentira es negativa
 D) Es falso que la mentira no sea un antivador
 E) Todas las anteriores son válidas

Resolución:

De los datos podemos definir:

La mentira es un antivador: p

Es negativa: q

Entonces: $p \Rightarrow q$

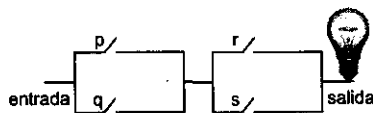
$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim(\sim q)} \quad \therefore q$$

Por lo tanto, la mentira es negativa

Clave: C

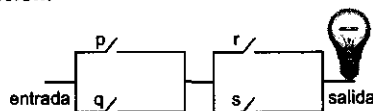
PROBLEMA 5 (UNI 2007 - I)

Indique la fórmula que representa el siguiente circuito lógico:



- A) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$ B) $(p \vee q) \wedge (r \wedge s)$
 C) $(p \vee q) \vee (r \vee s)$ D) $(p \wedge q) \vee (r \vee s)$
 E) $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$

Resolución:



La fórmula lógica es: $(p \vee q) \wedge (r \vee s)$

Clave: E

PROBLEMA 6 (UNI 2007 - II)

Dadas las inferencias:

- I. Si ella compra un vestido, entonces comprará zapatos. Ella compra zapatos, por lo tanto ella compra un vestido.
- II. Si Luis lee Caretas está bien informado. Luis está bien informado, entonces Luis lee Caretas.
- III. Si estudio, obtengo buena nota. Si no estudio, me divierto. Por lo tanto, obtengo buena nota o me divierto.

Son válidas:

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y II E) II y III

Resolución:

Analizando:

- I. Compra un vestido $\equiv p$
 Compra zapatos $\equiv q$
 Del enunciado $p \Rightarrow q$
 Luego: $q \Rightarrow p$ (no es válido)
- II. Luis lee Caretas $\equiv p$
 Está bien informado $\equiv q$
 Del enunciado: $p \Rightarrow q$
 Luego: $q \Rightarrow p$ (no es válido)
- III. Estudio $\equiv p$
 Obtengo buena nota $\equiv q$
 Me divierto $\equiv r$
 Del enunciado: $p \Rightarrow q$
 $\sim p \Rightarrow r$
 $\therefore q \vee r$ (si es válido)

Clave: C

PROBLEMA 7 (UNI 2011 - I)

Si:

$$p \sqcap q \equiv (p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$p \oplus q \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$$

Simplifique: $[(r \sqcap s) \Rightarrow t] \Leftrightarrow [\sim(t \oplus s)]$

- A) t B) $\sim r$ C) $\sim t$
 D) $r \Leftrightarrow \sim s$ E) $r \Leftrightarrow \sim t$

Resolución:

Si

$$p \sqcap q \equiv (p \wedge q) \Rightarrow q$$

$$\equiv \sim(p \wedge q) \vee q \quad \dots (\text{equivalencia lógicas})$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee q \quad \dots (\text{leyes de Morgan})$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee q) \quad \dots (\text{Ley asociativa})$$

$$\equiv \sim p \vee V$$

$$p \sqcap q \equiv V \quad \dots (\text{Tautología})$$

$$p \oplus q \equiv p \Rightarrow (p \vee q)$$

$$\equiv \sim p \vee (p \vee q) \quad \dots (\text{equivalencia lógica})$$

$$\equiv (\sim p \vee p) \vee q$$

$$\equiv V \vee q \quad \dots (\text{Ley asociativa})$$

$$p \oplus q \equiv V \quad \dots (\text{tautología})$$

Simplificando: $[(r \sqcap s) \Rightarrow t] \Leftrightarrow [\sim(t \oplus s)]$

$$(V \Rightarrow t) \Leftrightarrow F$$

$$t \Leftrightarrow F$$

$$\therefore \sim t$$

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2012 - I)

Señale el circuito equivalente a la proposición

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow p] \wedge [\sim p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)]$$

- A) p- B) q-
 C) p- D) q-
 E) p q-

Resolución:

Considerando: $A \wedge B$

$$\therefore A = (p \Rightarrow q) \Rightarrow p \quad \therefore B = \sim p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow q)$$

$$= (\sim p \vee q) \Rightarrow p \quad = p \vee (\sim p \Rightarrow q)$$

$$= \sim(\sim p \vee q) \vee p \quad = p \vee p \vee q$$

$$= (p \wedge \sim q) \vee p \quad B = p \vee q$$

$$A = p$$

Entonces: $A \wedge B = p \wedge (p \vee q)$

$$A \wedge B = p$$

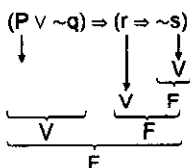
Clave: A

PROBLEMA 9 (UNI 2012 - I)

Si la proposición $(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow \sim s)$, es falsa. El valor de verdad de p, q, r, s (en ese orden) es:

- A) FFVV B) FVVF C) VFVF
 D) VVFF E) FVFF

Resolución:



p: puede ser V o F

q: puede ser F o V

$p: V F$ $q: F V$ $r: V V$ $s: V V$

La única alternativa que cumple es la A

Clave: A

PROBLEMA 10 (UNI 2012 - II)

Si la proposición: $[(\sim p \vee q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)] \vee (q \wedge s)$ es falsa, siendo "p" una proposición verdadera.

Determine los valores de verdad de: q, r, s, en ese orden.

- A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFV E) FFF

Resolución:

De la proposición:

$$[(\sim p \vee q) \Rightarrow (q \Leftrightarrow r)] \vee (q \wedge s) \equiv F$$

Luego: $\underbrace{(\sim p \vee q)}_V \Rightarrow \underbrace{(q \Leftrightarrow r)}_F \equiv F$

Como: $p = V \Rightarrow q: V; r: F; s: F$

Clave: C

PROBLEMA 11 (UNI 2012 - II)

Si la proposición: $(\sim p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow \sim s) \equiv F$.

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

- I. $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim q$
II. $(\sim r \vee q) \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$
III. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

- A) VVV B) VVF C) VFF
D) FVV E) FFF

Resolución:

Lógica proposicional

$$(\sim p \Rightarrow q) \vee (r \Rightarrow \sim s)$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \\ F & & V \quad V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & F & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ & F & \end{array}$$

$p: F$ $q: F$ $r: V$ $s: V$

Luego, las proposiciones:

I. $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim q)$

$$\begin{array}{ccc} V & \wedge & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ & V & \end{array}$$

II. $(\sim r \vee q) \Leftrightarrow [(\sim q \vee r) \wedge s]$

$$\begin{array}{ccc} F & \vee & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \Leftrightarrow & [V \vee V] \\ & & \downarrow \\ & & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ & F & \end{array}$$

III. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(p \vee q) \wedge \sim q]$

$$\begin{array}{ccc} F & \Rightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \Rightarrow & [F \wedge V] \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \Rightarrow & F \\ \downarrow & & \downarrow \\ & F & \end{array}$$

$\therefore$ VFF

Clave: C



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautológicas?

I. $\sim \{[(p \downarrow q) \downarrow p] \Rightarrow [(q \downarrow p) \downarrow p]\}$

II. $\{[(p \downarrow q) \wedge p] \Leftrightarrow [(p \downarrow q) \wedge q]\}$

III. $\sim(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \vee q)$

Si además "p $\downarrow$ q", indica "no p y no q".

- A) I B) II C) III
D) II y III E) Todas

2. Expresa la siguiente proposición compuesta a su equivalencia condicional más simple.

$$A = (\sim p \Leftrightarrow q) \Delta (p \Rightarrow q)$$

- A) $A \equiv p \Rightarrow \sim q$ B) $A \equiv q \Rightarrow p$
C) $A \equiv (p \Rightarrow q) \wedge p$ D) $A \equiv p \vee (p \Rightarrow q)$
E) $A \equiv \sim p \Rightarrow q$

3. Simplifique la siguiente proposición a su equivalencia más simple.

$$\{[(p \Rightarrow q) \vee \sim p] \wedge (\sim q \Rightarrow p)\} \Leftrightarrow$$

$$\{(\sim p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge \sim r)\} \wedge (\sim q)$$

- A) $(p \Rightarrow r) \vee q$ B) V C) F
D) $(p \vee q) \wedge r$ E) $\sim q$

4. Si el enunciado: "si hay dinero pero hay inflación, entonces es suficiente que no haya trabajo, para que se tenga dinero", es falso, concluimos que:

- A) No hay dinero.
B) No hay inflación.
C) No hay inflación y sí dinero.
D) No hay trabajo.
E) Hay trabajo y dinero.

5. Se define el operador *, mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	p * q
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Además:

$$p \boxtimes q \equiv \sim \{[(p \Rightarrow q) * (q \Rightarrow p)] \vee (p * q)\}$$

Entonces, el operador $\boxtimes$ reemplaza a:

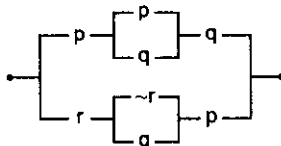
- A) Δ B) $\wedge$ C) $\vee$
D) $\Leftrightarrow$ E) $\Rightarrow$

6. Se tiene que:

• $p \wedge q$:

• $p \vee q$:

Si el costo de cada llave en la instalación del circuito:



Es de S/.50; en cuanto se reducirá el costo de la instalación si se reemplaza este circuito por su equivalente más simple.

- A) S/.350 B) S/.150 C) S/.200
D) S/.250 E) S/.300

7. Se define el operador lógico ∇ de la siguiente manera:

$$\sim p \nabla q \equiv \sim[(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$$

Simplifique el siguiente esquema:

$$\{p \nabla [(p \vee q) \Delta (q \wedge r)]\} \nabla (r \Delta s)$$

- A) $\sim p \vee q$ B) $q \wedge r$ C) $r \Delta s$
D) p E) r

8. Si: $p \# q \equiv [(p \vee \sim q) \wedge (\sim q \Rightarrow p)]$

$$p \oplus q \equiv q \vee [(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Delta p)]$$

Simplificar la siguiente expresión:

$$W = \{(\sim p \# (q \wedge \sim p)) \wedge [(q \Leftrightarrow \sim p) \oplus q]\} \Rightarrow q$$

- A) $p \vee q$ B) $\sim q$ C) $\sim p$
D) $\sim p \wedge q$ E) V

9. Indique cuáles son tautologías:

I. $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$

II. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$

III. $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow \{ \sim p \vee [p \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \}$

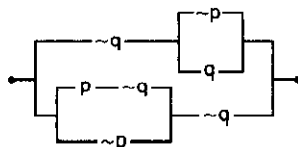
- A) I B) II y III C) III
D) II E) Todas

10. Si:

• $p \wedge q$:

• $p \vee q$:

Simplifique y dé el equivalente del siguiente circuito lógico.



- A) $p \vee \sim q$ B) $p \vee q$ C) $\sim q$
D) $\sim p \wedge \sim q$ E) $p \Rightarrow q$

11. Si la proposición:

$$[(p \Delta q) \wedge (\sim p \vee w)] \Rightarrow \text{es falsa}$$

Se afirma que la siguiente proposición:

$$[s \vee (p \wedge \sim w) \vee (p \Leftrightarrow q)], \text{ es:}$$

- A) Verdadera
B) Falsa
C) No se afirma nada
D) Toma ambos valores de verdad
E) Faltan datos

12. Las letras P, Q, R y S representan afirmaciones de las cuales solo dos son verdaderas. Se sabe lo siguiente:

- A) Si S es verdadera entonces Q es verdadera.
B) Si Q es verdadera entonces R es verdadera.
C) Si P es verdadera, entonces S es verdadera.
Las verdaderas son:

- A) Q y S B) P y S C) Q y R
D) P y R E) P y Q

13. Si la siguiente proposición compuesta: $p \Rightarrow (r \wedge s)$ es falsa, entonces, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- I. p tiene un solo valor de verdad.
II. s puede ser verdadera.
III. r es necesariamente verdadera.

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) I y II

14. La subida del precio de la gasolina implica la subida de pasajes.

- La subida de pasajes implica el aumento del costo de vida.
 - La crisis económica implica la subida de gasolina.
- ¿Cuáles no son correctas?
- I. La crisis económica implica la subida de pasajes.
II. La subida del precio de la gasolina implica el aumento del costo de vida.
III. La subida del pasaje implica la crisis económica.

- A) Solo I B) Solo III C) Solo II
D) II y III E) I y III

15. Sabiendo que p y q son proposiciones con diferentes valores de verdad, además:

$$M = p \vee q; \quad N = (\sim p \wedge q) \vee p; \quad S = \sim q \Rightarrow p$$

¿Cuáles son los valores de verdad en ese orden?

- A) VVV B) VVF C) VFV
D) FVF E) FVV

16. Sabiendo que la proposición compuesta:

$$p \Rightarrow (\sim r \vee s) \text{ es falsa}$$

$$t \Rightarrow (p \vee s); \quad p \Leftrightarrow r; \quad \sim s = t; \quad r = p$$

¿Cuántas son verdaderas?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. Simplificar:

$$(p \vee q) \wedge [(q \Rightarrow p) \Rightarrow (p \Rightarrow q)]$$

- A) q B) $p \vee \sim q$ C) $\sim q$
D) $\sim p$ E) $p \wedge \sim q$

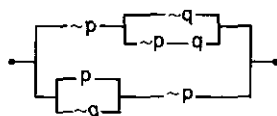
18. Indique cuáles son tautologías:

- I. $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \sim q)$
II. $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
III. $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow \{p \vee [p \wedge (\sim p \Rightarrow q)]\}$

- A) I B) II y III C) III
D) II E) Todas

19. Si: $p \wedge q: \quad \begin{array}{c} \text{---} p \text{---} q \text{---} \\ | \\ p \vee q: \left[\begin{array}{c} p \\ \sim q \end{array} \right] \end{array}$

Simplifique y dé el equivalente del siguiente circuito lógico.



- A) $p \vee \sim q$ B) $p \vee q$ C) $\sim p$
D) $\sim p \wedge \sim q$ E) $p = q$

20. Si el siguiente esquema es falso:

$$(p \wedge \sim q) \Rightarrow [(m \Delta r) \vee \sim r]$$

Indique el valor veritativo de p, q, m y r

- A) VFFV B) VFVV C) VFFF
D) VFFF E) FVVV

21. Sean las proposiciones:

- p Eduardo estudia en la UNI.
q Eduardo no es vendedor de periódicos.
r Eduardo no desayuna.

Simbolice el siguiente enunciado y luego simplifíquelo:

Es suficiente que Eduardo no sea vendedor de periódicos o no tome desayuno para que no estudie en la UNI. Pero si estudia en la UNI entonces es vendedor de periódicos.

- A) $p \Rightarrow (\sim q \wedge \sim r)$ B) $p \wedge q \wedge \sim r$
C) $p \Rightarrow (q \wedge r)$ D) $(p \vee q) \wedge r$
E) $p \vee q$

22. Dado el siguiente esquema molecular:

$$[(p \Rightarrow \sim q) \wedge r] \Rightarrow [r \Rightarrow (p \Delta q)]$$

Si elaboramos su tabla de verdad, calcule la diferencia entre el número de verdaderos y el número de falsos de su matriz principal.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

23. Si la proposición "s" es falsa, y el siguiente esquema: $(\sim p \wedge q) \Leftrightarrow [(q \Rightarrow r) \vee (p \wedge \sim s)]$ es una tautología, entonces los valores de verdad de p, q y r son respectivamente:

- A) FVV B) VFF C) FVF
D) FFF E) VVV

24. Se define:

p	q	$p * q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Simplificar la expresión:

$$[(p \Rightarrow q) * (p * \sim q)] \vee (\sim p * \sim q)$$

- A) p B) $p \wedge q$ C) $p \vee q$
 D) $p \wedge \sim q$ E) $p \vee \sim q$

25. Se definen los operadores ∇ y $\uparrow$ por las siguientes tablas:

p	q	$p \nabla q$	$p \uparrow q$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	F	V
F	F	F	V

Reducir: $[(p \uparrow q) \vee (\sim q \nabla \sim p)] \wedge [(p \uparrow q) \wedge q]$

- A) q B) $p \wedge q$ C) p
 D) $p \uparrow q$ E) $p \nabla q$

26. ¿Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

- I. $p \Rightarrow \sim q \equiv \sim(p \nabla \sim q)$
 II. $\sim(p \nabla q) \vee (p \uparrow q) \equiv p \Rightarrow q$
 III. $\sim p \uparrow q \equiv \sim(\sim p \nabla q)$

- A) Solo I B) Solo II C) I y II
 D) I y III E) Todas

27. Señalar la expresión equivalente a la proposición:

$$(p \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee \sim p)$$

- A) $q \Rightarrow p$ B) $p \Rightarrow q$
 C) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow \sim p$ D) $\sim p \Rightarrow (p \Rightarrow q)$
 E) $(q \Rightarrow p) \Rightarrow \sim p$

28. Sean las proposiciones:

- $p_{(x)}: \forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$
- $q_{(y)}: \exists y \in \mathbb{N} / y^2 \leq 0$
- $r_{(z)}: \forall z \in \mathbb{R}, z^2 - 3^2 = (z + 3)(z - 3)$

Indique el valor de verdad de: $p \Rightarrow q$; $p \Rightarrow r$; $r \vee q$

- A) FFV B) FVV C) VFV
 D) VVV E) FFF

29. El equivalente de la proposición: "Hay que pagar 231 soles y ser accionistas para ingresar al club", es:

- A) No ingresar al club o pagar 231 soles y ser accionista.
 B) Pagar 231 soles o ser accionista y no ingresar al club.
 C) Pagar 231 soles y no ser accionista, y entrar al club.

D) Pagar 231 soles y ser accionista, o no ingresar al club.

E) No es cierto que se pague 231 soles y ser accionista, o ingrese al club.

30. Simbolizar: "No es el caso que Carlos sea médico o abogado; en conclusión, Carlos no es abogado".

- A) $\sim p \vee q \Rightarrow q$ B) $\sim q \Rightarrow \sim(p \vee q)$
 C) $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim q$ D) $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim q$
 E) $\sim(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim q$

31. Se define el operador: (+), por la siguiente tabla:

p	q	$p + q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Simplificar: $(p + q) + p$

- A) F B) $p \vee q$ C) $\sim q \vee q$
 D) $p \wedge q$ E) V

32. Dadas las proposiciones: q: 4 es un número impar; p y r cualquiera tal que: $\sim[(r \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$ es verdadera, hallar el valor de verdad de los siguientes esquemas moleculares:

- I. $r \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$
 II. $[r \Leftrightarrow (p \wedge q)] \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

- A) VF B) VV C) FV
 D) FF E) Depende de q

33. Si: $p * q \equiv p \Rightarrow \sim q$

$$p \# \sim q \equiv (p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim p$$

Simplificar: $[(p \wedge q) * (p \vee q) \# (p \Rightarrow q)]$

- A) $\sim p \vee q$ B) p C) $\sim q$
 D) $\sim p \vee \sim q$ E) $\sim p$

34. Un profesor de UNI denotaba por:

Apq: $p \wedge q$; y con Np: $\sim p$.

Escribanse las siguientes proposiciones empleando A y N en vez de $\wedge$ y $\sim$.

- I. $\sim(p \wedge q) \wedge (\sim q \wedge r)$
 II. $\sim(p \wedge \sim q) \wedge (\sim q \wedge \sim r)$

- A) ANpq Aqr; ANpNqANqr
 B) ANpq ANqr; ANApqANqr
 C) ANApNqAqNr; ANApqANqNr
 D) ANpqApq; ANqpANqr
 E) ANApqANqr; ANApNqANqNr

35. Si T es una tautología y p, q son proposiciones, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- I. $\{[(p \wedge T) \vee (q \wedge \sim T)] \wedge (p \vee q)\} \Rightarrow p$
 II. $\{[(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge (p \vee q)\} \Leftrightarrow T$
 III. $\{[(p \vee q \vee \sim T) \wedge \sim T] \vee [(\sim p \wedge T) \vee T]\} \Leftrightarrow T$

- A) Solo I B) Solo II C) I y III
D) III y II E) Solo III

36. Dadas las proposiciones: q : 13 es un número par;
 $\sim[(r \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$ es verdadera.

p y r cualquier valor.

Hallar el valor de las siguientes proposiciones:

- I. $r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
II. $[r \Rightarrow (p \wedge q)] \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

- A) VF B) VV C) FV
D) FF E) Depende de q

37. Si la siguiente proposición:

$[(q \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q] \vee (r \Rightarrow s)$ es falsa, dar el valor veritativo de:

- I. $[(p \Rightarrow \sim q) \vee (s \Rightarrow r)] \Leftrightarrow (r \vee p)$
II. $[(r \vee p) \Rightarrow \sim s] \vee (w \Rightarrow r)$

- A) VV B) VF C) FV
D) FF E) Depende de w

38. Si la proposición compuesta: $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee t)$

Es falsa. Indicar las proposiciones que son verdaderas:

- A) p ; r B) p ; q C) r ; t
D) q ; t E) p ; r ; t

39. Simplificar: $M = [(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \vee p)] \wedge \sim(p \wedge q)$

- A) q B) p C) $\sim p$
D) $\sim q$ E) $\sim p \vee q$

40. Si la proposición: $(p \wedge q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ es falsa, hallar el valor de verdad de las siguientes fórmulas:

- I. $\sim(p \vee r) \Rightarrow (p \vee q)$
II. $(p \vee \sim q) \Rightarrow (\sim r \wedge q)$
III. $[(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)] \Leftrightarrow (p \vee \sim r)$

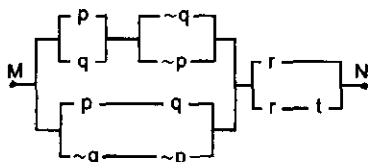
- A) VVF B) VFV C) VVV
D) VFF E) FVV

41. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. Si: $3 + 1 = 7$, entonces: $4 + 4 = 8$
II. No es verdad que: $2 + 2 = 5$, si y solo si $4 + 4 = 10$.
III. Madrid está en España o Londres está en Francia.

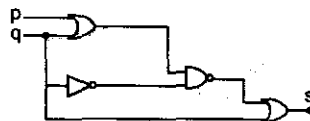
- A) VFV B) VVV C) VFF
D) FVV E) FFF

42. La proposición equivalente más simple del siguiente circuito:



- A) p B) q C) r
D) p E) $\sim q$

43. Dado el siguiente circuito:

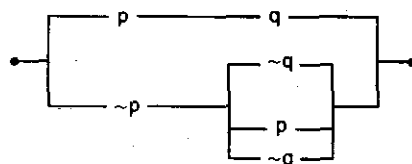


Si s es falsa.

¿Cuáles son los valores de verdad de p y q , respectivamente?

- A) VV B) VF C) FV
D) FF E) Faltan datos

44. Hallar la proposición equivalente al circuito lógico:



- A) p B) $p \vee \sim q$ C) $p \vee q$
D) $\sim p \vee q$ E) $p \wedge \sim q$

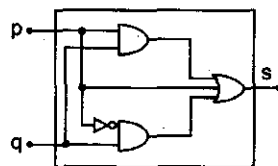
45. De los siguientes enunciados:

- ¿Qué rico durazno!
- $7 + 15 > 50$
- $x^2 + y^2 = 25$

¿Qué alternativa es correcta?

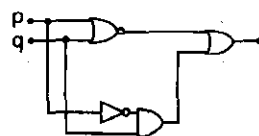
- A) Una es proposición.
B) Dos son enunciados abiertos.
C) Dos son expresiones no proposicionales.
D) Dos son proposiciones.
E) Todas son proposiciones.

46. Los profesores de Aritmética de la academia han diseñado un circuito integrado que recibe " p " y " q " como entradas y " s " como salida. Hallar " s ".



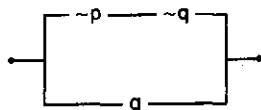
- A) p B) q C) V D) F E) $p \vee q$

47. Hallar el equivalente de:



- A) p B) $\sim p$ C) q D) $\sim q$ E) $p \wedge q$

48. Simbolizar:



Si la proposición que se obtiene es falsa, ¿cuáles son los valores de p y q , respectivamente?

- A) VV B) VF C) FV
D) FF E) No se puede precisar

49. Se tiene la siguiente equivalencia:

$$p \Delta q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (q \wedge \sim p)$$

Reducir la expresión:

$$(p \Delta \sim q) \Delta \sim p$$

- A) $p \vee q$ B) $q \wedge \sim p$ C) $q \vee \sim p$
D) $p \vee \sim q$ E) $\sim p \wedge \sim q$

50. Si el esquema $(\sim p \Rightarrow q) \vee (p \Leftrightarrow r)$ es falso. Hallar el valor de verdad de:

- I. $\sim \{(p \Delta q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)\}$
II. $\{(s \wedge p) \Rightarrow (t \vee \sim q)\} \vee (v \wedge w)$

- A) FF B) VF C) VV
D) FV E) Depende de w

51. Si la proposición: $p \Rightarrow (r \vee s)$

Es falsa, ¿cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

- I. $(\sim s \vee t) \vee \sim p$ II. $r \Rightarrow p$
III. $t \Rightarrow \sim r$ IV. $(r \Rightarrow p) \vee (s \Rightarrow t)$

- A) Ninguna B) Una C) Dos
D) Tres E) Cuatro

52. Si:

$$a \cdot b \equiv (a \Rightarrow b) \vee [b \vee \sim (a \Rightarrow b)]$$

$$a \vee b \equiv \{a \vee [b \Rightarrow (a \vee b)]\} \Rightarrow a$$

Reducir:

$$\{[(p \cdot q) \vee r] \cdot (\sim p \cdot q)\} \vee \{q \cdot (p \wedge \sim q)\}$$

- A) $\sim p$ B) V C) F
D) p E) q

53. Si: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$; es falsa, determinar los valores de verdad de p , q y r

- A) VVF B) VFF C) VVV
D) VFV E) FFF

54. De los siguientes enunciados:

- Que rico durazno.
- $7 + 15 > 50$
- $x^2 + y^2 = 25$

¿Qué alternativa es correcta?

- A) Una es proposición
B) Dos son enunciados abiertos.
C) Dos son expresiones no proposicionales.
D) Dos son proposiciones.
E) Todas son proposiciones.

55. ¿Cuántas de las siguientes expresiones son proposiciones?

- Dios mío ... se murió
- El calor es la energía en tránsito.
- Baila a menos que estés triste.
- Siempre que estudio, me siento feliz.
- El delfín es un cetáceo, ya que es un mamífero marino.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

56. Dadas las siguientes expresiones:

- El átomo no se ve, pero existe.
- Los tigres no son paquidermos, tampoco las nutrias.
- Toma una decisión rápida.
- Hay 900 números naturales que se representan con tres cifras.
- La Matemática es ciencia fáctica.
- Es imposible que el año no tenga 12 meses.

¿Cuántas no son proposiciones simples?

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

57. Dadas las siguientes expresiones:

- Si en el curso de Lógica hay 415 alumnos, entonces por lo menos 50 estudiantes celebran el mismo día su cumpleaños.
- Si eres vida. ¿Por qué me das la muerte? si eres muerte, ¿Por qué me das la vida?
- Edy corre tras el éxito, es un hombre práctico, y reside en un piso céntrico regando flores de plástico y pendiente del teléfono.
- La feria del Señor de los Milagros en homenaje al sesquicentenario de las batallas de Junín y Ayacucho.
- El principito no podía comprender a las personas adultas.
- Justo y José se odian a muerte.

¿Cuántas son proposiciones simples?

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

58. Si unimos proposiciones:

"Los canguros son marsupiales" y "Los osos son plantígrados" con cada una de las siguientes estructuras. ¿Cuántas de ellas se simbolizan con una conjunción lógica?

- a la vez que
- puesto que
- sin embargo
- cada vez que
- no obstante
- Ni ni

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

59. El equivalente de la proposición: "Hay que pagar 231 soles y ser accionistas para ingresar al club", es:
- No ingresar al club o pagar 231 soles y ser accionista.
 - Pagar 231 soles o ser accionista y no ingresar al club.
 - Pagar 231 soles y no ser accionista, y entrar al club.
 - Pagar 231 soles y ser accionista, o no ingresar al club.
 - No es cierto que se pague 231 soles y ser accionista, o ingrese al club.
60. Simbolizar: "No es el caso que Timo sea médico o abogado; en conclusión, Timo no es abogado"
- $\sim p \vee q \Rightarrow q$
 - $\sim q \Rightarrow \sim(p \vee q)$
 - $\sim(p \wedge q) \Rightarrow \sim q$
 - $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim q$
 - $\sim(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow \sim q$
61. Simbolizar: "Si en Marte no hay agua, entonces no hay vida; en consecuencia, no hay marcianos ni platillos voladores".
- $\sim p \Rightarrow [\sim q \Rightarrow (\sim r \wedge \sim s)]$
 - $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim r \wedge \sim s)$
 - $(\sim p \Rightarrow q) \Rightarrow (\sim r \wedge \sim s)$
 - $\sim q \Rightarrow [\sim q \Rightarrow (\sim r \wedge \sim s)]$
 - $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim r \wedge \sim s)$
62. Si la afirmación: "Si no como ni leo, entonces no bebo", es falsa. Podemos afirmar que:
- Como
 - Bebo
 - Leo
- Solo I y II
 - Solo II y III
 - Solo I y III
 - I, II y III
 - Ninguna es equivalente
63. El equivalente de la proposición: "Hay que pagar 200 soles y ser socio para ingresar al teatro" es:
- No ingresar al teatro o pagar 200 soles, y ser socio.
 - Pagar 200 soles o ser socio, y no ingresar al teatro.
 - Pagar 200 soles y ser socio, o no ingresar al teatro.
 - Pagar 200 soles y no ser socio, y entrar al teatro.
 - No es cierto que se pague 200 soles y sea socio, o ingrese al teatro.
64. De los siguientes esquemas:
- $(q \Rightarrow r) \vee (\sim p \Rightarrow r)$
 - $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow p$
 - $[(\sim p \wedge q) \Rightarrow \sim r] \Rightarrow \sim[r \wedge (\sim p \vee \sim q)]$
- Indicar en el orden dado cuál es Tautología (T), Contingencia (S) o Contradicción (C):
- T, C, S
 - T, S, C
 - C, T, S
 - S, T, C
 - S, C, T
65. Si la siguiente proposición:
 $[(q \wedge \sim p) \Rightarrow \sim q] \vee (r \Rightarrow s)$
 es falsa, dar el valor veritativo de:
- $[(p \Rightarrow \sim q) \vee (s \Rightarrow r)] \Leftrightarrow (r \vee p)$
 - $[(r \vee p) \Rightarrow \sim s] \vee (w \Rightarrow r)$
- VV
 - VF
 - CV
 - FF
 - Depende de w
66. Si la proposición compuesta: $(p \wedge q) \Rightarrow (r \vee t)$
 Es falsa. Indicar las proposiciones que son verdaderas:
- p; r
 - p; q
 - r; t
 - q; t
 - p; r; t
67. Simplificar: $M = [(\sim p \vee q) \Rightarrow (\sim q \vee p)] \wedge \sim(p \wedge q)$
- q
 - p
 - $\sim p$
 - $\sim q$
 - $\sim p \vee q$
68. Si se define: $p \Delta q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$
 Simplificar: $\sim[(p \Delta \sim q) \Rightarrow \sim q]$
- $p \wedge q$
 - $p \vee q$
 - $\sim p \wedge q$
 - $\sim p$
 - $\sim q$
69. Decir cuál o cuáles son verdaderas, si se define:
 $p \nabla q \equiv p \wedge \sim q$; $p \uparrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \Rightarrow \sim q \equiv \sim(p \nabla \sim q)$
 - $\sim(p \nabla q) \vee (p \uparrow q) \equiv p \Rightarrow q$
 - $\sim p \uparrow q \equiv \sim(\sim p \nabla q)$
- Solo I
 - Solo II
 - I y II
 - I y III
 - Todas
70. Si T es una tautología y "p", "q" son proposiciones, ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?
- $\{[(p \wedge T) \vee (q \wedge \sim T)] \wedge (p \vee q)\} \Rightarrow p$
 - $\{[(p \vee q) \vee (\sim p \wedge \sim q)] \wedge (p \vee q)\} \Rightarrow T$
 - $\{[(p \vee q \vee \sim T) \wedge \sim T] \vee [(\sim p \wedge T) \vee T]\} \Rightarrow T$
- Solo I
 - Solo II
 - Solo I y III
 - III y II
 - Solo III
71. Dadas las proposiciones:
 q: 13 es un número par
 $\sim[(r \vee q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$ es verdadera.
 "p" y "r" cualquier valor
 Hallar el valor de las siguientes proposiciones:
- $r \Rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
 - $[r \Rightarrow (p \wedge q)] \Leftrightarrow (\sim p \wedge q)$
- VF
 - VV
 - FV
 - FF
 - Depende de q
72. Indicar el valor de verdad de:
- $\sim[(p \wedge q) \Rightarrow p]$
 - $(p \wedge q) \Rightarrow p$
 - $(p \wedge q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$
 - $p \Rightarrow (p \vee q)$
- VVVF
 - VVVF
 - FVVF
 - VVVF

73. Si definimos: $p @ q = p \wedge \sim q$
Entonces, si $\sim p @ (p \vee q)$ es verdadero.
Determinar el valor de verdad de:
 $(p @ q)$ y $(\sim p @ \sim q)$
- A) FV B) VF C) VV
D) FF E) Falta el valor de p

74. El esquema molecular:
 $[p \Rightarrow (p \wedge \sim q)] \Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \Rightarrow q]$ es falso
y el esquema $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$; es verdadero,
el esquema: $(p \Rightarrow q) \vee p \Rightarrow (p \vee q)$ es:
- A) Falso B) Verdadero
C) Consistente D) Contingente
E) Tautológico

75. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- I. $\sqrt{2} < 2$ y $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
II. Si "n" divide a 12, entonces "n" divide a 4.
III. $3/5$ es un número par o impar.
IV. Si "n" es par entonces "n+1" es impar.
V. $\sqrt{3}$ es racional entonces $\sqrt{3}$ es entero.
- A) FFFVF B) FFFVV C) FFVVF
D) FFVVV E) FVVVV

76. Los esquemas moleculares: $p \Rightarrow q \wedge \sim p \vee q$
- A) Son equivalentes por teorema de De Morgan.
B) Son premisas de $\sim q$.
C) Son equivalentes por ley de implicación.

- D) No son equivalentes.
E) Ambos esquemas tienen premisa existencial

77. Si la proposición compuesta: $\sim[(p \wedge \sim r) \Rightarrow (r \Delta \sim q)]$
no es falsa. Hallar el valor de verdad de las proposiciones r, p y q respectivamente.
- A) FVV B) VVF C) VFV
D) FVF E) VFF

78. De la veracidad de: $\sim[(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow \sim s)]$
Deducir el valor de verdad de:
- I. $\sim(\sim q \vee \sim s) \Rightarrow \sim p$
II. $\sim(\sim r \wedge s) \Leftrightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$
III. $p \Rightarrow \sim[q \Rightarrow \sim(s \Rightarrow r)]$
- A) FVV B) VVF C) FFV
D) VFF E) FFF

79. Si la proposición: $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim r \Rightarrow s)$ es falsa, deducir el valor de verdad de: $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$
- A) V
B) F
C) V o F
D) No se puede determinar
E) Es V si p es F.

80. Simplificar:
 $\sim[(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p] \Rightarrow [q \Rightarrow (p \Rightarrow \sim q)]$
- A) $p \wedge \sim q$ B) $\sim p \vee q$ C) $\sim(p \wedge q)$
D) $\sim(p \vee q)$ E) $p \vee q$

CLAVES

1. A	11. B	21. A	31. B	41. E	51. C	61. E	71. A
2. B	12. C	22. B	32. B	42. C	52. C	62. B	72. A
3. C	13. E	23. A	33. A	43. B	53. B	63. C	73. D
4. A	14. B	24. B	34. C	44. D	54. A	64. A	74. B
5. C	15. A	25. A	35. C	45. A	55. B	65. B	75. B
6. A	16. D	26. E	36. A	46. E	56. C	66. B	76. A
7. D	17. A	27. C	37. A	47. B	57. A	67. D	77. A
8. E	18. B	28. B	38. B	48. B	58. B	68. A	78. B
9. B	19. C	29. D	39. B	49. B	59. D	69. B	79. B
10. C	20. B	30. D	40. C	50. D	60. B	70. D	80. E

Conjuntos

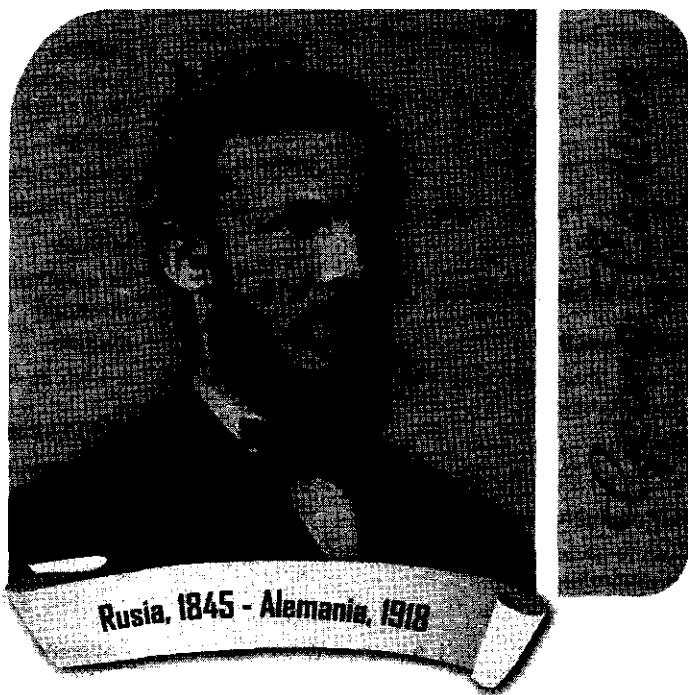
02

capítulo

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nació en San Petersburgo (3 de marzo de 1845) y murió en Halle (6 de enero de 1918). Fue un matemático alemán, inventor con Dedekind y Frege de la teoría de conjuntos, que es la base de las matemáticas modernas. Gracias a sus atrevidas investigaciones sobre los conjuntos infinitos fue el primero capaz de formalizar la noción de infinito bajo la forma de los números transfinitos (cardinales y ordinales).

La educación primaria fue inicialmente confiada a un profesor particular, pasando luego a la escuela elemental de San Petersburgo. Sus estudios universitarios se iniciaron en 1862 en Zúrich, pero al siguiente año, después de la muerte de su padre, pasó a la Universidad de Berlín donde se especializó en Matemáticas, Filosofía y Física. En 1872, cuando contaba con 27 años de edad, se convirtió en catedrático en la Universidad de Halle, dando inicio entonces a sus principales investigaciones.

Sus primeros trabajos con las series de Fourier lo llevaron al desarrollo de una teoría de los números irracionales y en 1874 apareció su primer trabajo sobre la teoría de conjuntos. Además, trató durante muchos años de probar la hipótesis del continuo. Actualmente, su obra es ampliamente reconocida y ha sido acreedora de varios honores. Sistematizó el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales y usó el concepto de conjunto abierto.



Propiedades

1. Si: $A \subset B$ y $B \subset C$ $\Rightarrow A \subset C$
2. Si: $A \subset B$ y $B \subset C$ $\Rightarrow A \subset C$
3. Si: $B \subset A$ y $A \subset B$ $\Rightarrow A = B$
4. Si: $A \subset A$

COMPARACIÓN ENTRE CONJUNTOS

Conjuntos disjuntos

Son aquellos que no tienen ningún elemento común.

Ejemplo:

$A = \{a; e\}$; $B = \{1; 2; 3\}$ $\therefore$ A es disjunto con B

Conjunto de conjuntos

Es un conjunto cuyos elementos son otros conjuntos.

$A = \{\{1\}; \emptyset; \{1; 2\}; \{1; 2; 3\}\}$

Conjunto potencia

Dado un conjunto A, se denomina conjunto potencia o conjunto A. Se denota por $P(A)$.

Sea: $A = \{1; 2; 3\}$

$P(A) = \{\{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1; 2\}; \{1; 3\}; \{2; 3\}; \{1; 2; 3\}; \emptyset\}$

Donde el número de elementos del conjunto $P(A)$ es $8 = 2^3$.

En general se demuestra que:

n° elementos del conjunto $P(A)$ de un conjunto A que tiene n elementos $= 2^n$.

Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B serán comparables si $A \subset B$ y $B \subset A$, esto es si uno de los conjuntos es subconjunto del otro.

Ejemplo:

Si $A = \{1; 2; 3\}$; $B = \{1; 2; 3; 5\}$

Entonces A es comparable con B porque $A \subset B$.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS CONJUNTOS

Existen dos formas para representar gráficamente las relaciones entre los conjuntos. Las formas más conocidas son los diagramas de Venn-Euler y los diagramas lineales.

Diagramas de Venn-Euler

Los conjuntos se pueden representar aquí, mediante ciertas curvas simples y cerradas y de distintas formas las cuales delimitan los elementos de un conjunto dado.

Ejemplo:

$A = \{a, e, i, o, u\}$; $B = \{1; 3; 5; 7\}$

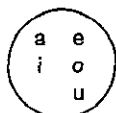


fig. 1



fig. 2

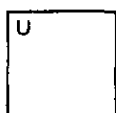


fig. 3

Generalmente al conjunto universal se le representa por medio de un rectángulo (fig. 3).

Diagramas lineales

Usado por lo general para conjuntos que están incluidos en otros.

Por ejemplo:

- $A \subset B$ se representa de la siguiente manera:



- $A \subset B$; $A \subset C$ y $B \subset D$, donde D y C son no comparables, se tiene:



- $M \subset P$; $P \subset Q$; $M \subset R$; $R \subset T$; $R \subset M$; $T \subset R$



OPERACIONES CON CONJUNTOS

Unión (U)

La unión o reunión de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, a B o a ambos y se denota por:

$A \cup B$, se lee "A unión B"

Ejemplo:

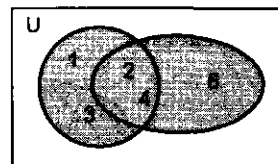
Sean

$A = \{1; 2; 3; 4\}$

$B = \{2; 4; 6\}$

$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$

Gráficamente:



En general. Dado dos conjuntos A y B, entonces existe:

$$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

Propiedades

1. $A \cup B$ es única
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $A \cup A = A$
5. $A \cup \emptyset = A$
6. Si $A \subset B$ $\Rightarrow A \cup B = B$

Intersección ($\cap$)

La intersección de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de los elementos que son comunes a A y B, es decir de aquellos elementos que pertenecen a A y que también pertenecen a B.

Se denota por $A \cap B$; y se lee: "A intersección B"

Ejemplo:

Sean:

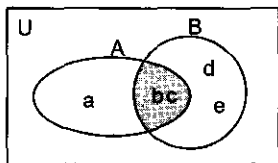
$$A = \{a; b; c\}$$

$$B = \{b; c; d; e\}$$

$$A \cap B = \{b; c\}$$

En general:

$$A \cap B = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$$

**Propiedades**

1. $A \cap B$, $\exists$ es única
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ } equivalencias de Morgan
5. $A \cap A = A$
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
 $A \cap U = A$
6. $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$
7. $(A \cap B) \subset A \wedge (A \cap B) \subset B$

Diferencia ($-$)

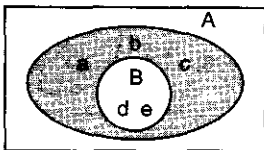
La diferencia de dos conjuntos A y B se define como el conjunto de todos los elementos del conjunto A que no pertenecen al conjunto B.

Se denota por: $A - B$ y se lee: "A diferencia B" o "A menos B".

Ejemplos:

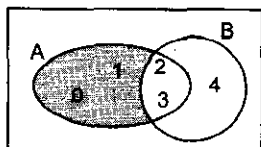
- Sean: $A = \{a; b; c; d; e\} \wedge B = \{d; e\}$
 $\Rightarrow A - B = \{a; b; c\}$

Gráficamente:



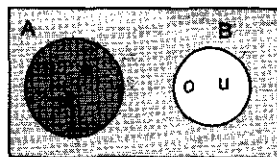
- Sean: $A = \{0; 1; 2; 3\} \wedge B = \{2; 3; 4\}$
 $\Rightarrow A - B = \{0; 1\}$

Gráficamente:



- Sean: $A = \{a; e; i\} \wedge B = \{o; u\}$
 $\Rightarrow A - B = \{a; e; i\}$

Gráficamente:

**Propiedades**

1. $A - B$, $\exists$ es única
2. $A - B \neq B - A$
3. $A - A = \emptyset$, $A - U = \emptyset$, $A - \emptyset = A$
4. $(A - B) \subset A$

Complemento de un conjunto

Si A y B son conjuntos tales que $A \subset B$, se define el complemento de A con respecto de B y se denota por:

$$C_A; C_A; C^A$$

Entonces el complemento de A será:

$$A' = B - A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$$

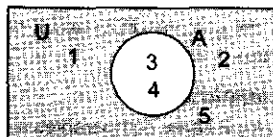
Ejemplo:

$$\text{Sean: } U = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$A = \{3; 4\}$$

$$A' = U - A = \{1; 2; 5\}$$

Gráficamente:

**Propiedades**

1. A' , $\exists$ es única
2. $A \cup A' = U$
3. $A \cap A' = \emptyset$
4. $(A')' = A$
5. $U' = \emptyset$, $\emptyset' = U$
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
8. $A \subset B \Rightarrow B' \subset A'$
9. $A - B = A \cap B'$

Diferencia simétrica

Dados los conjuntos A y B entonces se define:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) \vee$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

Se lee: "A diferencia simétrica con B"

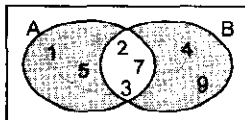
Ejemplo:

$$A = \{1; 2; 3; 5; 7\} \wedge B = \{2; 3; 7; 4; 9\}; \text{ entonces:}$$

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A); A - B = \{1; 5\} \wedge B - A = \{4; 9\}$$

$$\therefore A \Delta B = \{1; 4; 5; 9\}$$

Gráficamente:



Luego el n.º de elementos de la parte sombreada será: $28 + 8 = 36$

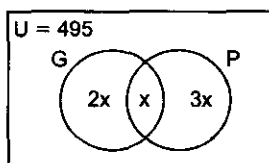
4. En una encuesta acerca del consumo de bebidas se obtuvo la siguiente información:

- Toman Guaraná y Pasteurina $1/3$ de los que solo toman Pasteurina y $1/2$ de los que toman Guaraná.
- Toman otras bebidas diferentes tantos como los que toman solo una bebida de las mencionadas. Si los encuestados fueron 495 personas, hallar los que toman una bebida (Pasteurina o Guaraná).

Resolución:

Utilizando el diagrama de Venn:

Sea x el conjunto de los que toman las dos bebidas, luego:



De donde:

$$2x + x + 3x + \underbrace{2x + 3x}_{\text{toman otras}} = 495$$

$$11x = 495 \quad \therefore x = 45$$

Luego los que toman solo una bebida son:

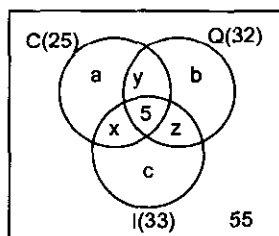
$$2(45) + 3(45) = 225$$

5. De un grupo de 55 personas 25 hablan castellano, 32 quechua, 33 inglés y 5 los 3 idiomas.

Determinar el n.º de personas que hablan solo dos de esos idiomas.

Resolución:

Llevando los datos a un diagrama, se tiene:



$$x + y + a = 20 \quad \dots (1)$$

$$y + b + z = 27 \quad \dots (2)$$

$$x + c + z = 28 \quad \dots (3)$$

Sumando (1), (2) y (3):

$$x + y + z + \underbrace{x + y + z + a + b + c}_{50} = 75$$

$$\therefore x + y + z = 25$$

Luego el número de personas que solo hablan dos de estos idiomas es 25.

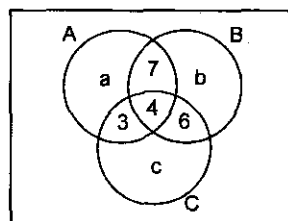
6. De una encuesta a 60 personas se recibió la siguiente información:

- 7 personas consumen el producto A y B pero no C.
- 6 personas consumen el producto B y C pero no A.
- 3 personas consumen el producto A y C pero no B.
- 50 personas consumen al menos uno de estos productos.
- 11 personas consumen el producto A y B.

Determinar la cantidad de personas que consumen solamente un producto.

Resolución:

Distribuyendo los datos en un diagrama de Venn:



En el gráfico se pide: $a + b + c$

De donde: $20 + a + b + c = 50$

$$\therefore a + b + c = 30$$

Como se observa consumen solamente un producto 30.

7. Si: $A = \{4; 5; \{8\}; \{10; 11\}; 9; 12; \{15\}\}$, determinar cuáles son verdaderas.

I. $\{4\} \subset A$

II. $\{4; 5\} \subset A$

III. $\{10; 11\} \subset A$

IV. $\{15\} \subset A$

Resolución:

I. $\{4\} \subset A$ es verdadera

($\{4\}$ es subconjunto de A)

II. $\{4; 5\} \subset A$ es verdadera

($\{4; 5\}$ es subconjunto de A)

III. $\{10; 11\} \subset A$ es falsa

($\{10; 11\} \in A$ ya que $\{10; 11\}$ es elemento de A)

IV. $\{15\} \subset A$ es falsa (por III)

8. Si $a \in A$ entonces:

$a \in (A \cup B)$

$a \in (A \cap B)$

$a \in (A - B)$

$a \in (A' - B)$

$a \in (A - B')$

$a \in (A' - B')$

$a \in (A \cap B')$

$a \in (A \cap B'')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

$a \in (A \cap B''')$

9. Determinar la afirmación falsa:

I. $A \cap A' = \emptyset$

II. $A \cup A' = U$

- III. $A - B = A \cap B'$
 IV. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
 V. $A - B \neq B - A$

Resolución:

- I. $A \cap A' = \emptyset$ por definición de complemento
 $(\emptyset \neq \emptyset)$ (F)
 II. $A \cup A' = U$ tomando el dual de A (V)
 III. $A - B = A \cap B'$ definición de la diferencia de conjuntos (V)
 IV. De $(A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C')$
 $= A \cap B \cap C' \cap C' = A \cap B \cap C'$
 $= (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C$ (V)
 V. $A - B \neq B - A$ (V)
10. Dados los conjuntos:
 $A = \{1; 2; 3; 4\}; B = \{1; 4; 13; 14\}$ y

$$U = \{1; 2; 3; 4; \dots; 10; 11; \dots; 14; 15\}$$

¿Cuál de los siguientes subconjuntos no es subconjunto de $(A \cup B)'$?

- I. $\{5\}$ II. $\{5; 4\}$

Resolución:

$$\text{De: } (A \cup B)' = U - (A \cup B) \quad \dots (1)$$

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 13; 14\}$$

$$U = \{1; 2; 3; \dots; 14; 15\}$$

Entonces de (1):

$$(A \cup B)' = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$$

Respondiendo:

- I. $\{5\}$ sí es subconjunto de $(A \cup B)'$
 II. $\{5; 4\}$ no es subconjunto ya que $4 \notin (A \cup B)'$
 $\therefore$ II no es subconjunto de $A \cup B$



PROBLEMAS

1. Sea: $A = \{1; 2; 4; 8; 16\}$, $B = \{1; 4; 7; 11; 14\}$ y
 $U = \{1; 2; 3; \dots; 13; 14; 15; 16\}$

¿Cuál de los siguientes subconjuntos es subconjunto de $(A \cap B)'$?

- I. $\{1; 2; 3\}$ II. $\{2; 3; 5\}$

Resolución:

Sabemos que: $(A \cap B)' = U - (A \cap B)$

$$A \cap B = \{1; 4\}; U = \{1; 2; 3; \dots; 14; 15; 16\}$$

Entonces:

$$(A \cap B)' = \{2; 3; 5; 6; 7; \dots; 14; 15; 16\}$$

Respondiendo:

- I. $\{1; 2; 3\}$ no es subconjunto de $(A \cap B)'$ ($1 \notin (A \cap B)'$)
 II. $\{2; 3; 5\}$ sí es subconjunto de $(A \cap B)'$

2. Dados los conjuntos:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}; B = \{1; 4; 13; 14\};$$

$$C = \{4; 5; 12; 13\} \text{ y } U = \{1; 2; 3; \dots; 15; 16\}$$

Señalar cuáles son verdaderas:

- I. $4 \in (U - C)$ III. $(B \cap C) \subset (U - A)$
 II. $1 \in (A \cap B)$ IV. $A \subset (B \cup C)$

Resolución:

$$\text{I. } (U - C) = \{1; 2; 3; \dots; 15; 16\} - \{4; 5; 12; 13\}$$

$$(U - C) = \{1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 14; 15; 16\}$$

$$\text{Entonces: } 4 \in (U - C) \quad (F)$$

$$\text{II. } A \cap B = \{1; 4\} \Rightarrow 1 \in (A \cap B) \quad (V)$$

$$\text{III. } B \cap C = \{4; 13\}$$

$$U - A = \{5; 6; 7; \dots; 15; 16\}$$

$$\text{Entonces: } (B \cap C) \not\subset (U - A) \quad (4 \notin U - A) \quad (F)$$

$$\text{IV. } B \cup C = \{1; 4; 5; 12; 13; 14\}$$

$$A = \{1; 2; 3; 4\} \Rightarrow A \subset (B \cup C) \quad (F)$$

3. Hallar cuál es la afirmación falsa.

$$\text{I. } (A \cup B) \subset U$$

RESUELTOS



$$\text{II. } ((A \cap B) \cap C) \subset A$$

$$\text{III. } (A \cup C) \subset B$$

$$\text{IV. } (A - B) \subset U$$

V. Todas son verdaderas

Resolución:

$$\text{I. } (A \cap B) \subset U \text{ es trivial ya que } A, B \text{ y } C \subset U. \quad (V)$$

$$\text{II. } (A \cap B) \cap C \subset A \text{ es trivial}$$

$$[(A \cap B) \cap C] \cap A' = (A \cap A') \cap B \cap C = \emptyset \quad (V)$$

$$\text{III. } A \cup C \subset B \text{ es } \emptyset \quad (F)$$

(no se puede decir que $(A \cup C) \cap B' = \emptyset$)

$$\text{IV. } (A - B) \subset U$$

$$(A - B) \cap U' = (A - B) \cap \emptyset = \emptyset \quad (V)$$

$\therefore$ La afirmación en III es la falsa.

4. Dados los conjuntos:

$$U = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}; A = \{-1; 0; 2\}$$

$$B = \{2; 3; 4\}; C = \{-1; 1; 3; 5\}$$

$$D = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}; E = \{x \in U / x \notin A \vee x \in C\}$$

Hallar el número de elementos de $D \cup E$.

Resolución:

$$U = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}; A = \{-1; 0; 2\}$$

$$B = \{2; 3; 4\}; C = \{-1; 1; 3; 5\}$$

$$D = \{x \in U / x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$= \{x \in U / x \in A \wedge x \in B'\} = A \cap B'$$

$$E = \{x \in U / x \notin A \vee x \in C\}$$

$$= \{x \in U / x \in A' \vee x \in C\} = A' \cup C$$

Resolviendo:

$$D = \underbrace{\{-1; 0; 2\}}_A \cap \underbrace{\{-1; 0; 1; 5\}}_{B'} = \{-1; 0\}$$

$$E = \underbrace{\{3; 4; 5\}}_{A'} \cup \underbrace{\{-1; 1; 3; 5\}}_C = \{-1; 1; 3; 4; 5\}$$

Ahora: $D \cup E = \{-1; 0; 1; 3; 4; 5\}$
 $n(D \cup E) = 6$

5. Dados los conjuntos:

$U = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$; $A = \{0; 1; 2; 3\}$
 $B = \{-2; 0; 2; 4\}$; $F = \{x \in U / x \notin A \vee x \notin B\}$
 $G = \{x \in U / x \in A \Rightarrow x \in B\}$
 Hallar el número de elementos de $F - G$.

Resolución:

$F = \{x \in U / x \notin A \vee x \notin B\}$
 $\{x \in U / x \in A' \vee x \in B'\} = A' \cup B'$
 $G = \{x \in U / \underbrace{x \in A}_p \Rightarrow \underbrace{x \in B}_q\} = (p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$
 $= \{x \in U / \sim(x \in A) \vee x \in B\}$
 $= \{x \in U / x \notin A \vee x \in B\}$
 $= \{x \in U / x \in A' \vee x \in B\} = A' \cup B$

Ahora:

$F - G = F \cap G' = (A' \cup B') \cap (A' \cup B)'$
 $= (A' \cup B') \cap (A \cap B)$
 $[(A' \cup B') \cap A] \cap B = B' \cap A = A - B$
 $F - G = \{0; 1; 2; 3\} - \{-2; 0; 2; 4\} = \{1; 3\}$
 $n(F - G) = 2$

6. Si $M = n^\circ$ de afirmaciones verdaderas; $N = n^\circ$ de afirmaciones falsas; y sean las afirmaciones:

- I. El conjunto universal es único para todos los conjuntos.
- II. Si $A \subset B$ entonces $B \subset A$.
- III. Para cualquier conjunto A se cumple $A \subset A$.
- IV. Si se cumple que $A \subset B$ entonces podemos afirmar que $A \neq B$.

Determinar: $M - N$.

Resolución:

- I. El conjunto U es único (V)
- II. Si $A \subset B \Rightarrow B \subset A$. Por ejemplo, sean: $A = \{1; 2\}$
 $\wedge B = \{2\}$; donde $A \subset B$, pero vea que $B \subset A$ (F)
- III. $\forall A \subset U: A \subset A$ (V)
- IV. Si $A \subset B \Rightarrow \exists x \in A / x \notin B$ (V)
 $\Rightarrow A \neq B$

Luego: $M = 3 \wedge N = 1 \quad \therefore M - N = 2$

7. Si se sabe que:

$A = \{3m + n - 11; 4m - 4\}$
 $B = \{5m + 2n - 3; 4\}$ son conjuntos unitarios,
 ¿cuántos elementos tiene:
 $R = \{m + n; 2m + n + 1; mn + 11; 2n - 7; 4 - m\}$

Resolución:

$A = \{3m + n - 11; 4m - 4\}$;
 $B = \{5m + 2n - 3; 4\}$
 Son unitarios, entonces:
 $3m + n - 11 = 4m - 4 \quad \wedge \quad 5m + 2n - 3 = 4$
 $\Rightarrow m = n - 7 \quad \wedge \quad 5m + 2n = 7$
 Resolviendo: $m = -1 \quad \wedge \quad n = 6$

Reemplazando en $R = \{5; 5; 5; 5; 5\} = \{5\}$
 $\therefore R$ tiene 1 elemento.

8. Sean $a, b \in \mathbb{Q}$ tal que b es el menor posible. Sean A y B conjuntos tales que $B \neq \emptyset$; $A \cup B$ es el conjunto unitario.

$$A = \{a^2 + 2b; a + 2b + 2\}$$

$$A \cup B = \{-5/4 a + 3b^2; 3a + 4b + 3\}$$

Hallar $A \cap B$.

Resolución:

$B \neq \emptyset \quad \wedge \quad A \cup B$ es unitario $\wedge$
 $A = \{a^2 + 2b; a + 2b + 2\} \neq \emptyset$
 $\Rightarrow A = B = A \cup B = A \cap B$ y todos son conjuntos unitarios. Luego:

$$\text{De } A: a^2 + 2b = a + 2b + 2$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \vee a = -1$$

$$\text{De } A \cup B: -\frac{5}{4}a + 3b^2 = 3a + 4b + 3$$

$$\text{Si } a = 2: -\frac{5}{2} + 3b^2 = 6 + 4b + 3$$

$$\Rightarrow 6b^2 - 8b - 23 = 0 \Rightarrow b \notin \mathbb{Q}$$

$$\text{Si } a = -1: \frac{5}{4} + 3b^2 = -3 + 4b + 3$$

$$\Rightarrow 12b^2 - 16b + 5 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2}, b = \frac{5}{6}$$

Como b es el menor posible: $b = \frac{1}{2}$
 Luego: $A \cap B = A = \{2\}$

9. Dado el conjunto unitario: $A = \{a + b; a + 2b - 3; 12\}$. Determinar el valor de $T = a^2 + b^2$.

Resolución:

$A = \{a + b; a + 2b - 3; 12\}$ es unitario
 $\Rightarrow a + b = a + 2b - 3 = 12$
 De donde: $a = 9 \quad \wedge \quad b = 3$
 $\therefore T = a^2 + b^2 = 90$

10. Dados los conjuntos:

$A = \{1; 2; (1; 2); 3\} \quad \wedge \quad B = \{(2; 1); (1; 3); 3\}$
 Hallar el conjunto $[(A \setminus B) \cap B] \cup (B \setminus A)$.

Resolución:

$A = \{1; 2; 3; \{1; 2\}\}$
 $B = \{3; \{1; 2\}; \{1; 3\}\}$
 $A \setminus B = A - B = \{1; 2\}$
 $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$; pues $1 \notin B \wedge 2 \notin B$
 $B \setminus A = B - A = \{\{1; 3\}\}$
 Luego: $[(A \setminus B) \cap B] \cup (B \setminus A) = \emptyset \cup \{\{1; 3\}\} = \{\{1; 3\}\}$

11. Sea $A = \{2; 3; \{2\}; \{3\}; \{2; 3\}; \emptyset; \{\emptyset\}$

De las siguientes proposiciones ¿cuántas son correctas?

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------|
| I. $\{2; 3\} \in A$ | II. $\emptyset \subset A$ |
| III. $\{\emptyset\} \subset P(A)$ | IV. $\{2; 3\} \subset A$ |
| V. $\emptyset \in A$ | VI. $\{2; 3; \{3\}\} \in P(A)$ |

Resolución:

$A = \{2; 3; \{2\}; \{3\}; \{2; 3\}; \emptyset; \{\emptyset\}$

- I. $\{2; 3\}$ es un elemento de A, por lo que $\{2; 3\} \in A$ (V)
 II. $\forall A \in U: \emptyset \subset A$ (V)
 III. Como $\emptyset \subset A \Rightarrow \emptyset \in P(A) \Rightarrow \{\emptyset\} \subset P(A)$ (V)
 IV. $2 \in A \wedge 3 \in A \Rightarrow \{2; 3\} \subset A$ (V)
 V. $\emptyset$ es un elemento de A, por lo que: $\emptyset \in A$ (V)
 VI. $2 \in A \wedge 3 \in A \wedge \{3\} \in A$ entonces $\{2; 3; \{3\}\} \subset A$, con lo cual: $\{2; 3; \{3\}\} \in P(A)$ (V)
 $\therefore$ Las 6 son correctas.

12. Reducir: $M = \{[(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C)] \setminus (A \cap C)\} \cap C^c \setminus B$; si A, B, C son tres conjuntos.

Resolución:

Tenga en cuenta que: $A \setminus B = A - B = A \cap B^c$

$$M = \{[(A^c \cup B^c) \cap (B \cup C)] \setminus (A \cap C)\} \cap C^c \setminus B$$

$$M = \{[(A \cap B)^c \cap (B \cup C)] \cap (A \cap C)^c\} \cap C^c \setminus B$$

$$M = \{[(A \cap B)^c \cap (A \cap C)^c] \cap (B \cup C)\} \cap (C^c \cap B^c)$$

$$\text{Como: } [(A \cap B) \cup (A \cap C)]^c = [A \cap (B \cup C)]^c = A^c \cup (B \cup C)^c$$

$$M = \{[A^c \cup (B \cup C)^c] \cap (B \cup C)\} \cap (C \cup B)^c$$

$$M = \{[A^c \cap (B \cup C)] \cup \underbrace{[(B \cup C)^c \cap (B \cup C)]}_{\emptyset}\} \cap (B \cup C)^c$$

$$\Rightarrow M = \{A^c \cap (B \cup C)\} \cap (B \cup C)^c$$

$$M = A^c \cap \underbrace{[(B \cup C) \cap (B \cup C)^c]}_{\emptyset} = A^c \cap \emptyset = \emptyset$$

13. Si $A = \{\emptyset\}$, $B = P(A)$, $C = B \setminus A$ y $D = P(C)$, determinar $B \cap D$.

Resolución:

$A = \{\emptyset\}$ es unitario

$$B = P(A) = \{\emptyset; \{\emptyset\}\} = \{\emptyset; A\}$$

$$C = B - A = \{\{\emptyset\}\}$$

$$D = P(C) = \{\emptyset; \{\{\emptyset\}\}\}$$

$\emptyset \in B \wedge \emptyset \in D \Rightarrow \emptyset \in B \cap D$ y es el único elemento en común para B y D.

$$\therefore B \cap D = \{\emptyset\} = A$$

14. Si A es un conjunto dado por: $A = \{2; 6; 12; 20; \dots; 992\}$, calcular el número de subconjuntos propios de A.

Resolución:

(B es subconjunto propio de A) $\Leftrightarrow B \subset A \wedge B \neq A$.

Si $n(A)$ es el cardinal de A, entonces el n.º de subconjuntos propios de A es: $2^{n(A)} - 1$.

$$A = \{2; 6; 12; 20; \dots; 992\}$$

$$A = \{1 \times 2; 2 \times 3; 3 \times 4; 4 \times 5; \dots; 31 \times 32\}$$

Se puede notar que: $n(A) = 31$ por lo tanto, el n.º de subconjuntos propios de A es: $2^{31} - 1$.

15. Simplificar: $\{[(P \cup Q^c)^c \cap (P^c \cap Q)]\} \cup P$

Resolución:

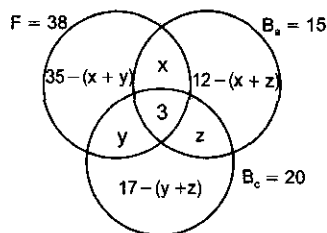
$$\{[(P \cup Q^c)^c \cap (P^c \cap Q)]\} \cup P$$

$$\begin{aligned} &= \{[P^c \cap (Q^c)^c] \cap (P^c \cap Q)\} \cup P; (Q^c)^c = Q \\ &= (P^c \cap Q) \cup P = \underbrace{(P^c \cup P)}_U \cap (Q \cup P) \\ &= Q \cup P = P \cup Q \end{aligned}$$

16. En una institución deportiva de 58 personas de los cuales: 38 juegan fútbol, 15 juegan básquet, 20 juegan béisbol, 03 juegan los tres deportes. ¿Cuántos juegan en dos de los tres deportes?

Resolución:

Total de personas: 58



Piden: $x + y + z$

$$\text{Total de personas} = 35 - (x + y) + x + y + 3 + 12 - (x + z) + z + 17 - (y + z) = 67 - (x + y + z)$$

$$\Rightarrow 58 = 67 - (x + y + z) \quad \therefore x + y + z = 9$$

17. Dado $M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\exists x \in M / 3x - 5 \in M$

II. $\forall x \in M; \exists y \in M / x + y \leq 7$

III. $\exists x \in M / \forall y \in M; x + y = 7$

Resolución:

$$M = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

I. Para $x = 2 \in M$ vemos que:

$$3x - 5 = 1 \in M \Rightarrow \text{(I) es V}$$

II. $x + y \leq 7$

1. Nótese, cuando x toma los
2. valores indicados, siempre
3. existe un y $\in M$ que verifica la
4. desigualdad dada $\Rightarrow$ (II) es V.

III. $x + y = 7$

Nótese, cuando $y = 1 \in M$, no existe $x \in M$ que verifique la igualdad dada.

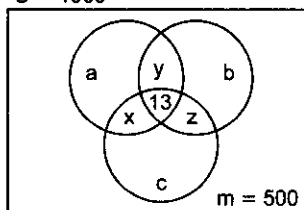
$$\Rightarrow \text{(III) es F}$$

$$\therefore \text{VVF}$$

18. De un total de 1000 camisas se piensa eliminar aquellas que tengan 3 fallas y vender a la mitad de precio las que tengan solo dos de ellas. Si luego de la inspección de las camisas no se eliminó a 987 de ellas y se vendieron, pero no a mitad de precio 875 camisas; 500 de las cuales no tenían fallas, calcular cuántas camisas tenían solamente una falla.

Resolución:

$$U = 1000$$



- No se eliminan 987 camisas
 $\Rightarrow$ Se eliminaron 13 camisas (tienen 3 fallas)
- Las que no se vendieron a la mitad de precio son las que tienen solo 1 falla o ninguna falla; este total es: $a + b + c + 500 = 875$ (dato)
 $\Rightarrow \underline{a + b + c = 375}$
 N.º de camisas con una falla

19. Sean $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ y $A = \{1; 3; 7\}$, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- $\forall x, y \in A: \exists z \in U / x + y + z \geq 10$
- $\forall x \in A: \exists y \in U / \forall z \in A: x + z^2 \geq 10 - y$
- $\sim(\forall x \in A: \exists y \in A / x + y \geq 5)$

Resolución:

- Nótese cuando x y y toman sus mínimos valores (unos), si $\exists$ un z que verifica la desigualdad. Por tanto, para otros valores de x y y superiores a uno también se verificará la desigualdad.
 $\Rightarrow$ (I) es V

- Observación: $x + y + z^2 \geq 10$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 9 & 1 \end{array}$$

Para los mínimos valores de x, z se verifica la desigualdad, por tanto para todos los valores de x, z mayores que uno también se verifica la desigualdad.

$\Rightarrow$ (II) es V

- $\sim(\forall x \in A: \exists y \in A / x + y \geq 5)$

$$\Rightarrow \exists x \in A / \forall y \in A: x + y < 5$$

Observación: Si $x = 1 \wedge y = 7$ no se verifica la desigualdad.

$\Rightarrow$ (III) es F $\therefore$ VVF

20. En relación a los conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ del universo $\mathbb{R}$, cuales de los siguientes enunciados son correctos:

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$
- $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}) \Delta (\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \emptyset)$
- $(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \emptyset) \Rightarrow (\mathbb{I} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q})$

Resolución:

$$I. \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \wedge \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

por lo que: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

- Como $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Z}^-$ con $\mathbb{N}$ son disjuntos: $\mathbb{Z}^- \cap \mathbb{N} = \emptyset$

(V)

$$\text{Luego: } \underbrace{(\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{Z})}_V \Delta \underbrace{(\mathbb{Z}^- \cap \mathbb{N} = \emptyset)}_V$$

La proposición es F:

(F)

$$III. \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \neq \emptyset$$

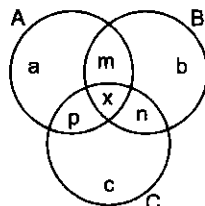
$$\text{Luego: } \underbrace{(\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \emptyset)}_F \Rightarrow (\mathbb{I} \cup \mathbb{Z} = \emptyset) \Rightarrow ()$$

La proposición es V.

(V)

$\therefore$ Son correctos: I y III

21. Se tiene un conjunto de 420 personas que ven los canales A, B y C y se observa que: 240 no ven el canal A, 180 no ven el canal B, 150 no ven el canal C. Los que vieron por lo menos dos canales son 230 personas, ¿cuántas personas ven los 3 canales?

**Resolución:**

- $a + b + c + m + n + p + x = 420$
- 240 no ven el canal A (A^c):
 $b + c + n = 240$
- 180 no ven el canal B (B^c):
 $a + c + p = 180$
- 150 no ven el canal C (C^c):
 $a + b + m = 150$
- 230 vieron por lo menos dos canales:
 $m + n + p + x = 230$

Sumando las cuatro últimas:

$$\underline{2(a + b + c + m + n + p) + x = 800}$$

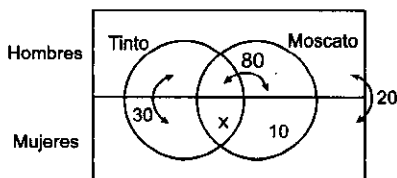
$$420 - x$$

$$\Rightarrow 840 - 2x + x = 800 \Rightarrow x = 40$$

$\therefore$ Ven los 3 canales 40 personas.

22. En una encuesta realizada a 150 personas que gustan del vino se obtuvieron el siguiente resultado:

- 30 personas gustan del vino tinto pero no el moscato.
 - 20 personas no gustan de vino alguno.
 - 80 hombres prefieren el moscato.
 - 10 mujeres prefieren solo el moscato.
- Determinar el número de mujeres que prefieren el vino tinto y el moscato.

Resolución:

El universo está formado por 150 personas:

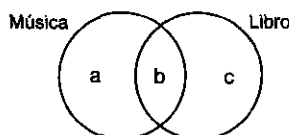
$$30 + 80 + x + 10 + 20 = 150 \Rightarrow x = 10$$

Luego, el número de mujeres que prefieren el vino tinto y el moscato es $x + 10 = 20$

23. Durante todas las noches del mes de octubre, Soledad escucha música o lee un libro, si escucha música 21 noches y lee un libro 15 noches. ¿Cuántas noches escucha música y lee un libro simultáneamente?

Resolución:

Como octubre tiene 31 días:



$$a + b = 21; \quad b + c = 15; \quad a + b + c = 31$$

Sumando las dos primeras:

$$a + 2b + c = 36 \Rightarrow \frac{a + b + c + b}{31} = 36 \Rightarrow b = 5$$

∴ Escucha música y lee un libro a la vez, durante 5 noches.

24. Indicar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. Si $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A - B = A$

II. Si $C = (A - B) \cap B \Rightarrow ((B - A) \cup C) \cup A = A \cup B$

III. Si $A = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 + 1 = 0\} \wedge$
 $B = \{x \in \mathbb{R} / x - x = 1\} \Rightarrow A^c \cap B^c = U$

Resolución:

I. Se sabe que: $A \cap B^c = A - B$, o sea que:
 si $A \cap B^c = \emptyset \Rightarrow A - B = \emptyset \Rightarrow$ (I) es F

II. De: $C = (A - B) \cap B = \underbrace{A \cap B^c \cap B}_{\emptyset} \Rightarrow C = \emptyset$

Luego:

$$\begin{aligned} [(B - A) \cup C] \cup A &= (B \cap A^c) \cup \emptyset \cup A \\ &= (B \cap A^c) \cup A \\ &\text{Por absorción} \\ &= A \cup B \Rightarrow \text{(II) es V} \end{aligned}$$

III. De $A: \exists x \in \mathbb{Z} / x^2 + 1 = 0 \Rightarrow A = \emptyset$

De $B: \exists x \in \mathbb{R} / x - x = 1 \Rightarrow B = \emptyset$

Luego: $A^c \cap B^c = U \cap U = U \Rightarrow$ (III) es V

∴ FVV

25. Dados los conjuntos A, B y C indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B$

II. $(A - B) \cap C^c = A - (B \cup C)$

III. $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$

IV. $A \cap [B - (B - C)] = (A \cap B) \cap (C \cup A)$

Resolución:

I. $(A \cap B) \cap (A \cup B)$

$$\begin{aligned} &= [(A \cap B) \cap A] \cup [(A \cap B) \cap B] \\ &= (A \cap B) \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \Rightarrow \text{(I) es V} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } (A - B) \cap C^c &= A \cap \underbrace{B^c \cap C^c}_{(B \cup C)^c} \\ &= A \cap (B \cup C)^c \\ &= A - (B \cup C) \Rightarrow \text{(II) es V} \end{aligned}$$

III. Por lo anterior:

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap C^c \Rightarrow \text{(III) es F}$$

IV. $A \cap [B - (B - C)] = A \cap [B \cap (B - C)^c]$

$$= A \cap [B \cap (B^c \cup C)] = A \cap (B \cap C) \Rightarrow \text{(IV) es F}$$

Por absorción

∴ VVFF

26. Si A, B, C son conjuntos del universo U. Tal que $A \cap C = E$; simplificar: $[(A - B) - C^c] \cap (E - B)^c$.

Resolución:

Dato: $A \cap C = E$

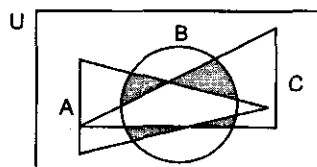
Sea $P = [(A - B) - C^c] \cap (E - B)^c$

$$P = (A \cap B^c \cap C) \cap (E - B)^c$$

$$P = (E \cap B^c) \cap (E - B)^c$$

$$P = (E - B) \cap (E - B)^c = \emptyset$$

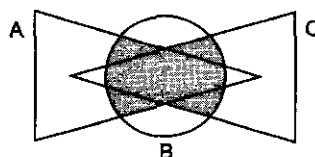
27. En el siguiente diagrama las regiones sombreadas se identifican como la expresión:



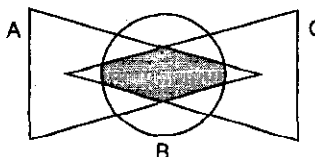
Resolución:

Del gráfico, consideremos dos partes que definen la región sombreada.

1. $B \cap (A \cup C)$

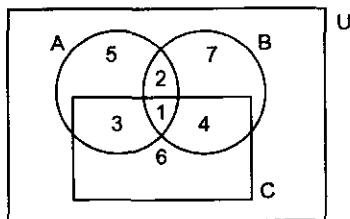


2. $A \cap B \cap C$



Si a la (1) le restamos (diferencia de conjuntos), la (2), se obtiene la región pedida, esto es:
 $[B \cap (A \cup C)] \setminus (A \cap B \cap C)$.

28. Si A, B y C son subconjuntos del conjunto universal U, según la figura, ¿cuáles son las zonas que representan a: $(A \cap B)' \setminus (C \cup A)$?

**Resolución:**

$$(A \cap B)' \setminus (C \cup A) = (A' \cup B') \cap (C \cup A)'$$

$$(A \cap B)' \setminus (C \cup A) = (A' \cup B') \cap (C' \cap A')$$

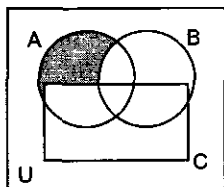
$$(A \cap B)' \setminus (C \cup A) = (A' \cup B') \cap (A \cap C')$$

$$(A \cap B)' \setminus (C \cup A) = ((A' \cup B') \cap A) \cap C'$$

$$(A \cap B)' \setminus (C \cup A) = \underbrace{(A' \cap A) \cup (B' \cap A)}_{\emptyset} \cap C'$$

$$(A \cap B)' \setminus (C \cup A) = (B' \cap A) \cap C' = (B' \cap C') \cap A$$

$$(A \cap B)' \setminus (C \cup A) = (B \cup C)' \cap A$$



∴ La región sombreada es la pedida, es decir: 5

29. Considere tres conjuntos: A, B y C tales que:

$$C \cap A = C; n(C') = 150; n(A' \cap B') = 90;$$

$$n[(A \cup B) - C] = 6n(C), \text{ hallar } n(U).$$

U: conjunto universo.

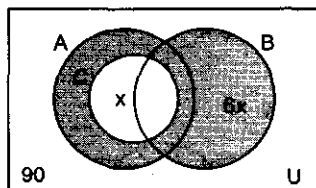
Resolución:

$$C \cap A = C \Rightarrow C \subset A$$

$$n(C') = 150; n(A' \cap B') = 90 \Rightarrow n((A \cup B)') = 90$$

$$n[(A \cup B) - C] = 6n(C)$$

Haciendo un diagrama y ubicando los datos, se tiene:



La región sombreada representa a: $(A \cup B) - C$

$$n(C') = 6x + 90 = 150 \Rightarrow x = 10$$

$$\text{Luego: } n(U) = 90 + 7x \quad \therefore n(U) = 160$$

30. Considere dos conjuntos comparables cuyos cardinales son números que se diferencian en tres, además la diferencia de los cardinales de sus con-

juntos potencias es 112. Indicar el número de elementos que posee su intersección.

Resolución:

Sean A y B los conjuntos, tales que: $n(A) - n(B) = 3$

$$\text{Además: } n(P(A)) - n(P(B)) = 112$$

$$\Rightarrow 2^{n(A)} - 2^{n(B)} = 112$$

$$\text{Sea: } n(B) = x \Rightarrow n(A) = x + 3$$

$$\Rightarrow 2^{x+3} - 2^x = 112 \Rightarrow 2^x(7) = 112$$

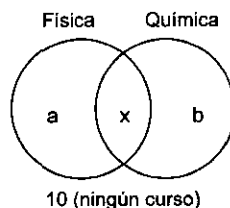
$$\Rightarrow 2^x = 16 = 2^4 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Luego: } n(A) = 7 \quad \wedge \quad n(B) = 4$$

31. En un salón de 150 alumnos, hay 90 que por lo menos aprobaron uno de los cursos de aritmética, álgebra o geometría, pero no aprobaron física ni química. 20 alumnos aprobaron física o química pero no los dos. ¿Cuántos aprobaron física y química si hay 10 alumnos que no aprobaron ningún curso?

Resolución:

El problema nos habla de 5 conjuntos, pero de estos solo 2 son los participantes y de donde nos piden la respuesta (como $U = 150$ y por lo menos 90 aprobaron los anteriores).



$$U = 60$$

$$a + b = 20 \text{ (dato) del gráfico:}$$

$$a + x + b + 10 = 60$$

$$20 + x + 10 = 60 \quad \therefore x = 30$$

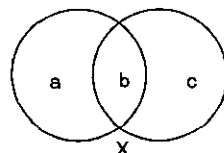
32. En una población se determinó que el 50% de los habitantes toman leche y que el 40% comen carne. Si la suma de los que sólo toman leche más los que sólo comen carne es el 54% de los habitantes. Hallar que porcentaje de la población no come carne ni toman leche.

Resolución:

Se sabe que en este caso

$U = 100\%$, graficando:

carne = 40% leche = 50%



$$\text{Por dato: } a + c = 54\% \quad \dots(I)$$

$$\text{Del gráfico: } a + b = 40\% \quad \dots(II)$$

$$b + c = 50\% \quad \dots(III)$$

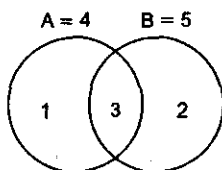
Como: $a + b + c + x = 100\%$... (IV)
 Al sumar (I + II + III): $2(a + b + c) = 144\%$
 $a + b + c = 72\%$; finalmente en (IV)
 $\therefore x = 28\%$

33. Si $P_{(A)}$ tiene 16 elementos y $P_{(B)}$ tiene 32 elementos, determinar cuántos elementos, tiene $P_{(A \cup B)}$; si se sabe que $A \cap B$ tiene 3 elementos.

Resolución:

$$\text{Si } P_{(A)} = 16 \Rightarrow 2^{n(A)} = 16 \Rightarrow n(A) = 4$$

$$\text{Si } P_{(B)} = 32 \Rightarrow 2^{n(B)} = 32 \Rightarrow n(B) = 5$$



Además $n(A \cap B) = 3$, graficando:

$$\text{Finalmente: } P_{(A \cup B)} = 2^6$$

$$\therefore P_{(A \cup B)} = 64$$

34. Si A es el conjunto de números de 3 cifras del sistema senario. B es el conjunto de los números de 4 cifras del sistema quinario. Determinar el número cardinal de la intersección de A y B.

Resolución:

$$A = \{100_{(6)} \dots, 555_{(6)}\}$$

$$B = \{1000_{(5)} \dots, 4444_{(5)}\}$$

Pasando a base 10 cada conjunto tenemos:

$$A = \{36, \dots, 215\} \quad B = \{125, \dots, 624\}$$

$$n(A \cap B) = \{125, \dots, 215\}$$

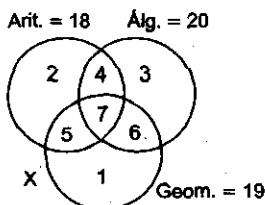
$$\therefore n(A \cap B) = 91$$

35. En un salón de una academia donde hay 30 alumnos, se determinó que: 18 aprobaron aritmética, 20 aprobaron álgebra, 19 aprobaron geometría, 12 aprobaron aritmética y geometría, 11 aprobaron aritmética y álgebra, 13 aprobaron álgebra y geometría. De los que aprobaron aritmética y álgebra 4 no aprobaron geometría. ¿Cuántos no aprobaron ninguno de los 3 cursos?

Resolución:

Aritmética y Álgebra, pero no geometría, tenemos que: $U = 30$.

Del gráfico:



$$2 + 4 + 5 + 7 + 3 + 6 + 1 = 30 \quad \therefore x = 2$$

36. Hallar $(a + b + c + d + x)$, sabiendo que el conjunto A tiene x elementos y en total presenta abcd subconjuntos, donde: a, c y d son cifras pares.

Resolución:

Si $n(A) = x$; entonces:

Subconjuntos: $2^x = \overline{abcd}$ (por dato) pero $\overline{abcd}$ debe ser un número de 4 cifras, pares y además potencia de 2; por lo tanto los posibles valores del número son:

1024, 2048, 4096, 8192; la única posibilidad que cumple es 2,048; finalmente: $2^x = 2048$; $x = 11$.

$$\therefore a + b + c + d + x = 25$$

37. Una encuesta a 200 personas reveló la siguiente información concerniente a 3 candidatos A, B y C de un cierto club social, que se presentaban a 3 diferentes cargos:

- 28 a favor de A y B; 98 a favor de A o B pero no de C.
- 42 a favor de B pero no de A o C.
- 122 a favor de B o C pero no de A.
- 64 a favor de C pero no de A o B
- 14 a favor A y C pero no de B.

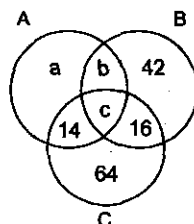
¿Cuántas personas estaban a favor de los 3 candidatos?

Resolución:

Comenzando del último dato tenemos:

$$U = 200$$

Colocando los datos adecuadamente tenemos el gráfico mostrado:



Anteriormente:

$$\begin{aligned} \text{• Del 1.º dato} \quad & \begin{cases} b + c = 28 \\ a + b = 56 \end{cases} \quad \dots (i) \end{aligned}$$

• Del U:

$$a + b + c + 42 + 16 + 14 + 64 = 200$$

$$a + b + c + 136 = 200; \quad a + b + c = 64 \quad \dots (ii)$$

$$a + b + c + b = 84$$

$$64 + b \Rightarrow b = 20; \text{ pero nos piden } c$$

$$\therefore c = 8$$

38. Dados los conjuntos binarios:

$$R = \{6; x + y; x - y; 16\} \text{ y } P = \left\{ \frac{x^2 + y^2}{2}; \overline{cd}; c + d \right\}$$

Hallar: $(c - d)$

Resolución:

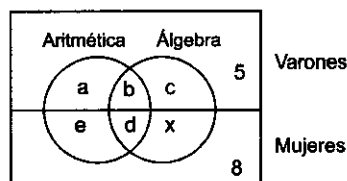
Por ser conjuntos binarios, debe poseer 2 elementos, por lo tanto:

- de R $\left. \begin{array}{l} x + y = 16 \\ x - y = 6 \end{array} \right\} \oplus m/m$
 $2x = 22; x = 11; y = 5$
- de P $\left\{ \frac{11^2 + 5}{2}; \overline{cd}; c + d \right\}$

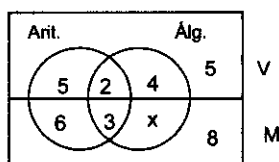
$P = \{73; \overline{cd}; c + d\} \Rightarrow$ por ser binarios $\overline{cd} = 73$
 $\therefore$ Nos piden: $c - d = 4$

39. En una clase mixta de 35 alumnos: 7 varones aprobaron aritmética, 6 varones aprobaron álgebra, 5 varones y 8 mujeres no aprobaron ninguno de los 2 cursos; 5 aprobaron los 2 cursos, 11 aprobaron sólo aritmética y 16 hombres hay en clase. ¿Cuántas mujeres aprobaron solo álgebra?

Resolución:



- $a + b = 7$... (I)
 - $b + c = 6$... (II)
 - $b + d = 5$... (III)
 - $a + e = 11$... (IV)
 - $V = 16 = a + b + c + 5$ (dato)
- $a + b + c = 11$
 $(I + II) a + b + c + b = 13 \Rightarrow b = 2$
 Graficando nuevamente: $U = 35$

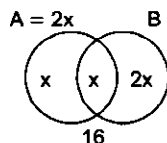


En (I) $\Rightarrow a = 5$; En (II) $\Rightarrow c = 4$
 En (III) $\Rightarrow d = 3$; En (IV) $\Rightarrow e = 6$
 Del gráfico: $5 + 6 + 2 + 3 + 4 + x + 5 + 8 = 35$
 $\therefore x = 2$

40. En una encuesta sobre las preferencias entre los productos A y B, la mitad de los que respondieron que preferían A también afirmaron que consumían B, pero los que respondían que solo consumían B fueron el doble de los que respondieron que solo consumían A. Si 16 de los encuestados dijeron que no consumían ni A ni B. ¿Cuántos de los 96 encuestados consumen solo A?

Resolución:

$U = 96$



Por lo tanto: $x + x + 2x + 16 = 96$
 $4x = 80; x = 20 \therefore$ Solo A = 20

41. Si $A = \{\phi, \{\phi\}, 1, \{1\}\}$, determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\phi \subset A$ II. $\phi \in A$ III. $\{\phi\} \subset A$

Resolución:

$A = \{\phi; \{\phi\}; 1; \{1\}\}$

- I. $\phi \subset A (V); \forall$ conjunto A.
 - II. $\phi \in A (V); \phi$ es elemento de A.
 - III. $\{\phi\} \subset A (V)$, también se tiene $\{\phi\} \in A$.
- $\therefore VVV$

42. Sea $U = \{0; 2^{-1}; (-1, 34)^0; 3, 1416; \sqrt{2}\}$

$A = \{x \in U / x \notin \mathbb{N} \wedge x \notin \mathbb{Q}\}$

$B = \{x \in U / x \in \mathbb{I} \vee x \notin \mathbb{Z}\}$

$C = \{x \in U / x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{N}\}$

Determinar el número de elementos de $(A \cup B) - (A \cup C)$

Resolución:

$U = \{0; 1/2; 1; 3, 1416; \sqrt{2}\}$

$A = \{x \in U / x \notin \mathbb{N} \wedge x \notin \mathbb{Q}\} = \{\sqrt{2}\}$

$B = \{x \in U / x \in \mathbb{I} \vee x \notin \mathbb{Z}\} = \{1/2; 3, 1416; \sqrt{2}\}$

$C = \{x \in U / x \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{N}\} = \{x \in U / x \notin \mathbb{Q} \vee x \in \mathbb{N}\}$
 $= \{1; \sqrt{2}\}$

Luego: $(A \cup B) - (A \cup C) = B - C = \{1/2; 3, 1416\}$
 $\therefore n((A \cup B) - (A \cup C)) = 2$

43. Si $n(A \cup B) = 11$, $n(P(A)) + n(P(B)) = 192$, hallar $n[P(A \cap B)]$, siendo A y B dos conjuntos cualesquiera.

Resolución:

• $n(A \cup B) = 11; n(A) = x; n(B) = y$

$n(P(A)) + n(P(B)) = 192$

$2^x + 2^y = 192 = 128 + 64 \Rightarrow x = 7 \wedge y = 6$

• $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$\Rightarrow 11 = 7 + 6 - n(A \cap B)$

$\Rightarrow n(A \cap B) = 2 \therefore n(P(A + B)) = 2^2 = 4$

44. En una fiesta el 44% toman, el 37% fuman; además el 25% de los que toman, fuman. Si no toman ni fuman 84 personas. ¿Calcular el total de invitados?

Resolución:

		Toman	No toman
	Fuman	3a%	x%
	No fuman	a%	c%

44% toman: $3a + a = 44 \Rightarrow a = 11$

37% fuman: $a + c = 37 \Rightarrow c = 26$

No toman ni fuman:

$x\% = 100\% - (4a + c)\% = 30\%$

Si N es el total de invitados:

$$30\% N = 84 \Rightarrow \frac{3}{10} N = 84 \therefore N = 280$$

45. Se definen los conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / -11 < 2x - 5 < 9\}$, $\mathbb{Z}^+$ = enteros no negativos

$B = \{x \in A / x^2 - 2x \notin A\}$

Hallar la suma de elementos del conjunto B.

Resolución:

$$A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / -11 < 2x - 5 < 9\}$$

$$\Rightarrow A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / -3 < x < 7\}$$

$$\Rightarrow A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$B = \{x \in A / x(x-2) \notin A\}$$

$$X = 0: x(x-2) = 0 \notin A \quad (\text{No})$$

$$X = 1: x(x-2) = -1 \notin A \quad (\text{Si})$$

$$X = 2: x(x-2) = 0 \in A \quad (\text{No})$$

$$X = 3: x(x-2) = 3 \in A \quad (\text{No})$$

$$X = 4: x(x-2) = 8 \notin A \quad (\text{Si})$$

Similantemente, para 5 y 6.

$$\Rightarrow B = \{1; 4; 5; 6\} \therefore \Sigma \text{ elementos} = 16$$

46. Dado el conjunto $A = \{2; \{3\}; \{2, 3\}; 4\}$ ¿cuántas proposiciones son verdaderas?

I. $\phi \in A$ II. $\phi \subset A$ III. $4 \in A$

IV. $3 \in \{2, 3\}$ V. $\{2\} \in A$ VI. $\{3\} \subset A$

Resolución:

$$A = \{2; \{3\}; \{2, 3\}; 4\}$$

I. $\phi \in A$ (F), $\phi \subset A$ II. $\phi \subset A$ (V)

III. $4 \in A$ (V) IV. $3 \in \{2, 3\}$ (V)

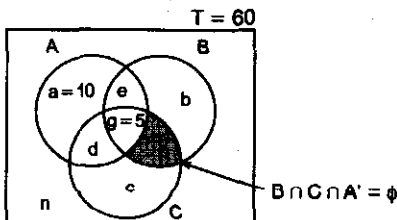
V. $\{2\} \in A$ (F); $\{2\} \subset A$ VI. $\{3\} \subset A$ (F), $\{3\} \in A$

$\therefore$ Hay 3 verdaderas

47. Sean A, B y C tres conjuntos contenidos en el universo finito de 60 elementos. Si $(B - C) \cup (C - B)$ tiene 40 elementos, el conjunto $A - (B \cup C)$ tiene 10 elementos, la intersección de los tres conjuntos tiene 5 elementos, que el conjunto $B \cap C \cap A'$ es vacío.

¿Cuántos elementos tiene el conjunto? $A' \cap B' \cap C'$.

Resolución:



Dando nombre a cada una de las regiones vacías.

Por dato: $e + b + d + c = 40$

$A' = \{b; c; n\}$ $B' = \{c; d; 10; n\}$

$C' = \{e; b; 10; n\}$

Del total: $e + b + d + c + 10 + 5 + n = 60 \therefore n = 5$

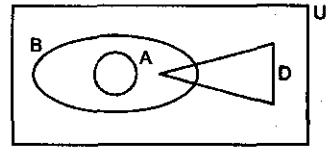
40

48. Si $A \subset B$ y $A \cap D = \emptyset$.

Simplifique: $[(A \cap D^c) \cap B^c] \cup [B \cup (A - D)]$

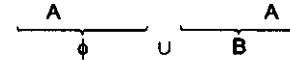
Resolución:

Si: $A \subset B$ y $A \cap D = \emptyset$ tenemos



Luego simplificando:

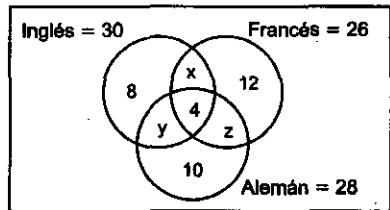
$$[(A \cap D^c) \cap B^c] \cup [B \cup (A - D)] \equiv B$$



49. De un grupo de 60 estudiantes, 26 hablan francés y 12 solamente francés, 30 hablan inglés y 8 solamente inglés, 28 hablan alemán y 10 solamente alemán; también 4 hablan los 3 idiomas mencionados. ¿Cuántos hablan inglés y alemán pero no francés?

Resolución:

$$U = 60$$



$$\begin{aligned} x + y + 4 + 8 &= 30 \Rightarrow x + y = 18 \\ x + z + 4 + 12 &= 26 \Rightarrow x + z = 10 \\ y + z + 4 + 10 &= 28 \Rightarrow y + z = 14 \end{aligned} \quad (+)$$

$$2x + 2y + 2z = 42$$

$$x + y + z = 21$$

$$14$$

$$\Rightarrow x = 7; y = 11; z = 3$$

$$\therefore \text{Hablan Inglés y alemán pero no francés} = 11$$

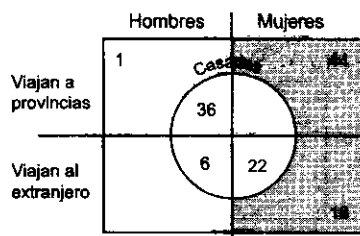
50. Un grupo de personas decide viajar y resulta que 40 mujeres van al extranjero, 37 hombres van a provincias, 28 casados van al extranjero y 45 solteros van a provincias. Si se sabe que hay 42 hombres casados y que 18 mujeres solteras viajan al extranjero, entonces el número de mujeres solteras es.

Resolución:

Realizando el diagrama con los datos:



Nos piden calcular el número de mujeres solteras. Completando los datos en el diagrama.



∴ Hay $44 + 18 = 62$ mujeres solteras.

51. De 120 estudiantes, 25 personas que fuman no leen, 13 mujeres fuman, 15 mujeres no fuman ni leen, 32 personas leen pero no fuman, 80 son hombres, 50 no leen. ¿Cuántos hombres leen y no fuman?

Resolución:

H	M	H	M	Leen
		20	12	
	13		32	
25				No leen
12			15	
Fuman		No fuman		

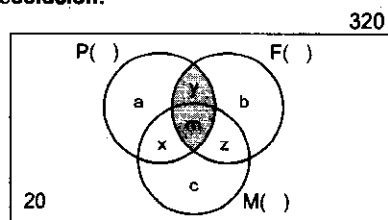
- 25 personas que fuman no leen.
- 13 mujeres fuman.
- 15 mujeres no fuman ni leen
- 32 personas leen pero no fuman
- 80 son hombres
- 50 no leen
- ∴ 20 hombres leen y no fuman.

52. Al realizar una encuesta a un grupo de 320 turistas sobre la gastronomía peruana, francesa y mexicana, se obtuvo la siguiente información:

- A 180 turistas les agrada solo 1 de las 3 gastronomías mencionadas.
- Ninguno de los turistas que gustan de la gastronomía peruana, gustan de la francesa.
- A 20 turistas no les agrada ninguna de estas gastronomías.

¿A cuántos turistas les agrada 2 de las 3 gastronomías mencionadas?

Resolución:



- A 180 les agrada solo 1 de las 3:
 $a + b + c = 180$
- Ninguno que gusta de la gastronomía peruana, gustan de la francesa:
 $y + m = 0 \Rightarrow y = 0; m = 0$
- Piden: $x + y + z$
- Sabemos que:
 $a + b + c + x + y + z + m + 20 = 320$
 $180 + x + y + z + 0 + 20 = 320$
∴ $x + y + z = 120$

53. La negación de la expresión: Para todo número real x existe un número entero y tal que: $y \leq x < y + 1$ es:

Resolución:

La negación de la expresión queda representada por:

$\sim [\forall x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{Z}; y \leq x < y + 1]$ como:

$\sim [\forall x] = \exists x \quad y \sim [\exists y] = \forall y$ se tendrá lo siguiente:

∴ $\exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{Z}; y > x \vee x \geq y + 1$

54. En una reunión de 120 alumnos, 30 son varones que no les gusta el pescado, 50 eran mujeres que sí gustan del pescado, si el número de varones que les gusta el pescado es la tercera parte de las mujeres que no gustan del pescado. ¿A cuántos les gusta el pescado?

Resolución:

Hombres	Mujeres	
x	50	Gustan pescado
30	3x	No gustan pescado

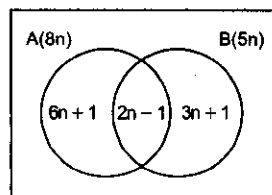
De la figura:

$$x + 50 + 30 + 3x = 120 \Rightarrow 4x = 40 \Rightarrow x = 10$$

$$\therefore 50 + x = 60$$

55. A es un conjunto de $8n$ elementos, B un conjunto de $5n$ elementos y tienen $(2n - 1)$ elementos comunes. Si $n(A - B) - n(B - A) = 12$, ¿Cuántos subconjuntos propios tienen $A \cap B$?

Resolución:



Dato: $n(A - B) - n(B - A) = 12$

$$(6n + 1) - (3n + 1) = 12$$

$$3n = 12 \Rightarrow n = 4$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Número de subconjuntos} \\ \text{propios de } (A \cap B) \end{array} \right) = 2^{n(A \cap B)} - 1$$

$$\therefore 2^7 - 1 = 127$$

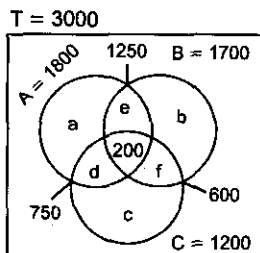
56. Hay 3 estaciones de radio A, B y C que pueden ser recibidas en una ciudad de 3000 familias. Se obtuvo la siguiente información:

- 1800 familias escuchan la estación A.
- 1700 familias escuchan la estación B.
- 1200 familias escuchan la estación C.
- 1250 familias escuchan la estación A y B.
- 750 familias escuchan la estación A y C.
- 600 familias escuchan la estación B y C.
- 200 familias escuchan la estación A, B y C.

¿Cuál es el número de conjuntos de familias que no escuchan a A pero escuchan B o C?

Resolución:

Haciendo el gráfico:



$$e + 200 = 1250 \Rightarrow e = 1050$$

$$d + 200 = 750 \Rightarrow d = 550$$

$$f + 200 = 600 \Rightarrow f = 400$$

$$a + \frac{e + d}{1600} + 200 = 1800 \Rightarrow a = \phi$$

$$b + \frac{e + f}{1450} + 200 = 1700 \Rightarrow b = 50$$

$$c + \frac{d + f}{950} + 200 = 1200 \Rightarrow c = 50$$

No escuchan a A pero escuchan B o C {b, c, f}.
Nos piden: $b + c + f = 500$

57. En una reunión se observa que por cada 9 mujeres hay 4 varones. Si de cada 10 varones, 7 beben. ¿Cuántos varones no beben?

Nota: La diferencia de la cantidad de mujeres y varones está comprendida entre 297 y 306.

Resolución:

Tenemos las relaciones en el siguiente gráfico:

Mujeres	Hombres	
	14k	Beben
	6k	No beben
(5) × 9k	(5) × 4k	

$$297 < (45 - 20)(k) < 305$$

Número entero

$$11, \dots < k < 12, \dots \Rightarrow k = 12$$

$$\therefore \text{Varones que no beben: } 6 \times 12 = 72$$

58. En una encuesta realizado entre 100 personas, todos los hombres tienen más de 20 años, en el grupo hay 50 mujeres, hay 60 personas de más de 20 años, 25 mujeres casadas, 15 personas casadas con más de 20 años de edad y 10 mujeres casadas con más de 20 años. Determinar la cantidad de hombres solteros.

Resolución:

	Casados	Solteros	
Hombres	$\begin{cases} > 20 \\ < 20 \end{cases} \begin{cases} a = 5 \\ \end{cases}$	$\begin{cases} b \\ \end{cases}$	$\begin{cases} 50 \\ \text{Vacio por dato} \end{cases}$
Mujeres	$\begin{cases} > 20 \\ < 20 \end{cases} \begin{cases} c = 10 \\ e = 15 \end{cases}$	$\begin{cases} d \\ f \end{cases}$	$\begin{cases} 50 \\ \end{cases}$

$$\text{Por dato: } a + b + c + d = 60$$

$$c + e = 25$$

$$\text{Además: } c = 10 \Rightarrow e = 15$$

$$\text{Como: } a + b = 50 \therefore b = 45$$

59. En un autobús viajan 41 pasajeros entre los cuales se observa que:

- 21 personas están sentadas.
 - Hay 16 mujeres en total.
 - De los que están parados, 10 son hombres que no fuman.
 - De las 12 mujeres sentadas, 8 no fuman.
- ¿Cuántos hombres que están parados fuman, si hay 6 mujeres que fuman?

Resolución:

		Total: 41
		8
Sentados (21)		4
	6	2
Parados (20)	10	2
	Varones (25)	Mujeres (16)

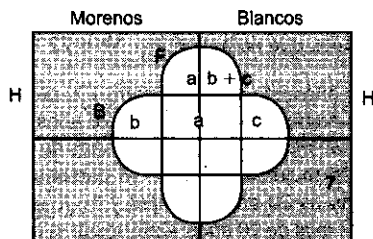
$$\therefore 6$$

60. En un salón de clase se tiene a 25 jóvenes cuyas preferencias entre dos cursos (Física o Biología) se define así:

- Hay tantos varones morenos que les gusta sólo Física como varones que gustan ambos cursos.
- Hay tantos varones blancos que les gustan sólo Física como varones que les gusta sólo biología.
- Hay 7 jóvenes que no les gusta esos cursos.

Si se elige un solo estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que le guste biología?

Resolución:



Del gráfico:

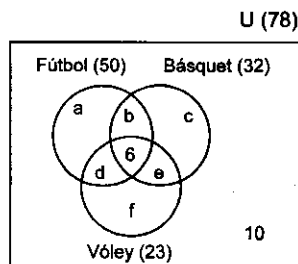
$$2(a + b + c) + 7 = 25$$

$$a + b + c = 9 \quad \therefore P_B = \frac{a + b + c}{25} = \frac{9}{25}$$

61. Un club consta de 78 personas. De ellas 50 juegan fútbol, 32 básquet, 23 vóley, además, 6 practican los 3 deportes y 10 no practican ninguno. Si x es el total de personas que practican solo un deporte, e y es el total de personas que practican solo 2 deportes, calcule $x - y$.

Resolución:

Realizamos el diagrama de Venn-Euler.



Luego, sea:

x : total de personas que practican sólo un deporte
 $\Rightarrow x = a + c + f$

y : total de personas que practican sólo dos deportes
 $\Rightarrow y = b + d + e$

Del gráfico obtenemos

$$\left. \begin{array}{l} a + b + d = 44 \\ b + c + e = 26 \\ e + d + f = 17 \end{array} \right\} +$$

$$\hline a + b + c + d + e + f + b + d + e = 87$$

$$\begin{array}{cc} 62 & y \end{array}$$

$$62 + y = 87 \Rightarrow y = 25$$

$$\text{Además: } \underbrace{a + c + f}_x + \underbrace{b + d + e}_{25} = 62$$

$$x + 25 = 62 \Rightarrow x = 37 \quad \therefore x - y = 12$$

62. De un grupo de 100 alumnos se sabe lo siguiente:

- 46 no estudian Álgebra.
- 50 no estudian Aritmética.

- 20 no estudian ninguno de estos cursos.

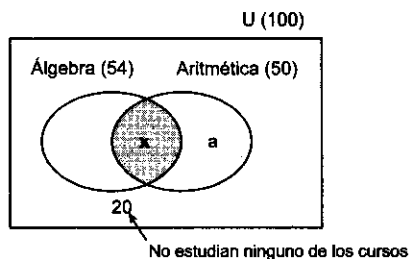
¿Cuántos estudian Álgebra y Aritmética a la vez?

Resolución:

Como el total de alumnos es 100, además tenemos

- 46 no estudian Álgebra
 $\Rightarrow 54$ estudian Álgebra
- 50 no estudian Aritmética
 $\Rightarrow 50$ estudian Aritmética

Graficando tenemos:



Del gráfico tenemos:

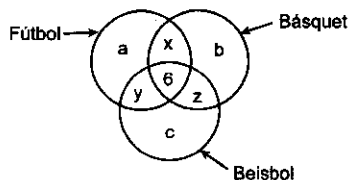
- $54 + a + 20 = 100 \Rightarrow a = 26$
- $a + x = 50 \Rightarrow 26 + x = 50 \Rightarrow x = 24$

$\therefore 24$ alumnos estudian Aritmética y Álgebra a la vez.

63. Un club deportivo xyz cuenta con 48 jugadores de fútbol, 25 jugadores de básquet y 30 jugadores de béisbol. Si son en total 68 jugadores y solo 6 figuran en los 3 deportes. ¿Cuántos jugadores juegan solo 1 deporte?

Resolución:

Haciendo un diagrama:



$$48 \text{ jug. de fútbol} \Rightarrow a + c + y = 42$$

$$25 \text{ jug. de básquet} \Rightarrow b + x + z = 19$$

$$30 \text{ jug. de beisbol} \Rightarrow c + y + z = 24$$

$$\text{Sumando: } a + b + c + 2(x + y + z) = 85$$

$$68 \text{ jug. en total: } a + b + c + x + y + z = 62$$

Restando el doble de ésta última menos la anterior:

$$a + b + c = 2(62) - 85 \Rightarrow a + b + c = 39$$

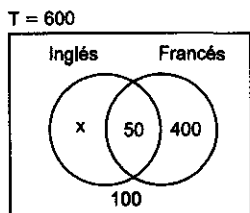
$$\therefore \text{Juegan 1 sólo deporte: } a + b + c = 39$$

64. En un salón de 600 alumnos, 100 no estudian Inglés ni francés y 50 estudian francés e inglés. Si 450 estudian francés.

¿Cuántos estudian solo inglés?

Resolución:

Haciendo y llenando el gráfico:

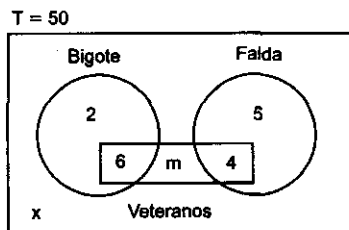


$$x + 50 + 400 + 100 = 600 \quad \therefore x = 50$$

65. En el salón de clase donde hay 50 alumnos se observa que: 6 veteranos usan bigotes, y 4 mujeres veteranas usan falda; 32 veteranos no usan falda; 9 mujeres usan falda y 8 hombres usan bigotes. ¿Cuántos no veteranos no usan ni bigotes ni falda?

Resolución:

Haciendo el gráfico:



Por dato: $6 + m = 32 \Rightarrow m = 26$

Luego: $2 + 6 + m + 4 + 5 + x = 50 \quad \therefore x = 7$

66. Sean los subconjuntos de R :

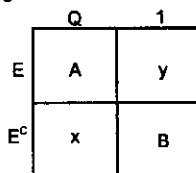
 $E = \langle a; b \rangle$, donde $a < b$;

 $A = \{x/x \in (E \cap Q)\}$ Q : racionales

 $B = \{x/x \in (E^c \cap I)\}$ I : irracionales.

 Determinar: $A^c \Delta B^c$
Resolución:

Haciendo el gráfico:



$$A^c = \{x; y; B\}$$

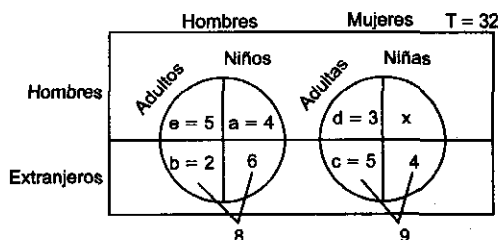
$$B^c = \{A; x; y\}$$

$$\therefore A^c \Delta B^c = \{A; B\} = A \cup B$$

67. En un autobús viajan 32 pasajeros entre peruanos y extranjeros en el cual hay 9 extranjeros de sexo femenino, 6 niños extranjeros, 8 extranjeros de sexo masculino, 10 niños, 4 niñas extranjeras, 8 señoras y 7 señores. ¿Cuántas niñas peruanas hay en el autobús?

Resolución:

Haciendo el gráfico:



Por dato: $b + 6 = 8 \Rightarrow b = 2$

Por dato: $a + 6 = 10 \Rightarrow a = 4$

$c + 4 = 9 \Rightarrow c = 5$

$c + d = 8 \Rightarrow d = 3$

$e + b = 7 \Rightarrow e = 5$

Hombres + Mujeres = Total

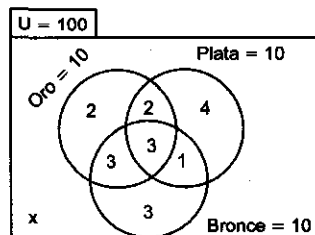
$5 + 2 + 4 + 6 + 3 + 5 + 4 + x = 32$

$\therefore x = 3$

68. En una competencia olímpica participaron 100 atletas, se realizaron 10 pruebas atléticas y en la premiación se nota que:

- 3 ganaron medallas de oro y plata y bronce.
- 5 ganaron medallas de oro y plata.
- 6 ganaron medallas de oro y bronce.
- 4 ganaron medallas de plata y bronce.

¿Cuántos atletas no ganaron medallas?

Resolución:


$= x + 2 + 2 + 6 + 4 + 4 = 100$

$\therefore x = 82$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2002 - I)

Sean los conjuntos: $A = \{x = (r/s) / r, s \in \mathbb{Z}, \text{ con } 1 < r < 3 \text{ y } 0 < s < 3\}$; $B = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2\}$

Calcular: $A \cup B$

- A) $\{1; 2\}$ B) $\{1; 2\}$ C) $[1; 2]$
 D) $[1; 2]$ E) $[2; 3]$

Resolución:

Como $r, s \in \mathbb{Z}$, se tiene: $1 < r < 3 \Rightarrow r = 2$; $0 < s < 3 \Rightarrow s = 1; s = 2$

Luego: $A = \{1; 2\}$

Además: $B = \{1; 2\}$

Uniendo: $\therefore A \cup B = [1; 2]$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2004 - II)

Sea X un conjunto no vacío y $R \subset P(X)$ un subconjunto no vacío del conjunto potencia de X , R es un anillo de conjuntos si para cualquier par de elementos A y B se cumple:

$$A \cup B \in R \text{ y } A \cap B \in R$$

Si R es un anillo de conjuntos, indique el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I. $A \Delta B \in R$ II. $A \cap B \in R$ III. $\emptyset \in R$

- A) VFF B) FVF C) VVV
 D) VVF E) VFV

Resolución:

- I. Verdadero:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Como $(B \cup A) \in R$ y $B \setminus A \in R$, entonces:

$$A \setminus B \text{ y } B \setminus A \in R \Rightarrow (A \cap B) \in R$$

- II. Verdadero:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \in R \wedge (A \cup B) \in R$$

$$\Rightarrow A \cap B \in R$$

- III. Verdadero:

$\emptyset \in R$, el vacío es subconjunto de todo conjunto no vacío.

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2007 - I)

Dados los conjuntos A , B y C en U .

Simplifique la expresión: $[A \Delta (B \Delta C)] \Delta [C \Delta B^c]$

- A) A^c B) B^c C) C^c
 D) A E) B

Resolución:

Sabemos que si:

$M, N \text{ y } P \in U$

$$\Rightarrow M \Delta N = (M \cap N^c) \cup (N \cap M^c) \quad \dots(1)$$

$$M \Delta N^c = (M \Delta N)^c \quad \dots(2)$$

Luego:

$$[A \Delta (B \Delta C)] \Delta [C \Delta B^c] = [A \Delta (B \Delta C)] \Delta [C \Delta B]^c \text{ de (2)}$$

$$\begin{aligned} &= \{[A \Delta (B \Delta C)] \Delta [C \Delta B]\}^c \text{ de (2)} \\ &= \{A \Delta [(B \Delta C) \Delta (C \Delta B)]\}^c \\ &= \{A \Delta \emptyset\}^c = A^c \end{aligned}$$

Clave: A

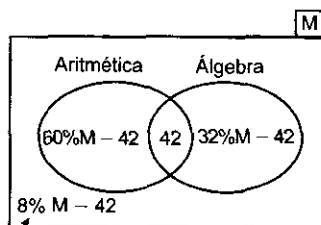
PROBLEMA 4 (UNI 2010 - I)

En un colegio el 60% aprobó Aritmética, el 32% aprobó Álgebra y los que aprobaron Aritmética y Álgebra representan el 60% de los que no aprobaron ninguno de los dos cursos. Si 42 aprobaron Aritmética y Álgebra, calcule el número de alumnos del colegio.

- A) 340 B) 350 C) 360
 D) 370 E) 380

Resolución:

Sea M : número total de alumnos del colegio:



Alumnos que no aprobaron ninguno de los cursos

$$\text{Por dato: } 42 = 60\%(8\%M + 42) \quad \therefore M = 350$$

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2010 - II)

Dados los conjuntos

$$A = \{(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 / (a_1; a_2) \in [3; 4] \times [4; 5]\} \text{ y }$$

$$B = \{(b_1; b_2) \in \mathbb{R}^2 / b_1^2 + b_2^2 \leq 1\}$$

Si se define: $A + B = \{\vec{a} + \vec{b} / \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\}$

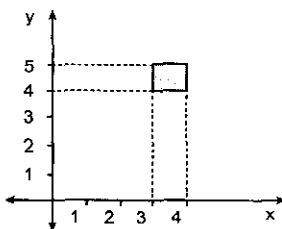
Determine el área de $A + B$

- A) $1 + \pi$ B) $2 + \pi$ C) $3 + \pi$
 D) $5 + \pi$ E) $6 + \pi$

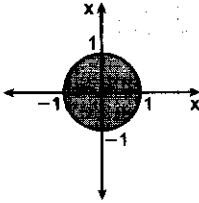
Resolución:

Tenemos que:

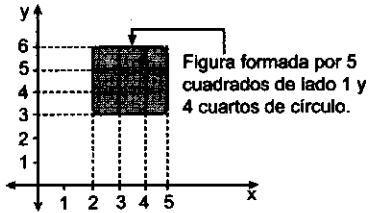
$$A = \{(a_1; a_2) \in \mathbb{R}^2 / (a_1; a_2) \in [3; 4] \times [4; 5]\}$$



$$B = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 / b_1^2 + b_2^2 \leq 1\}$$



La gráfica de $A + B$ cuyos elementos tienen la forma $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ viene dada por:



$$\text{Área de } A + B = 1(5) + 4\frac{\pi}{4} = 5 + \pi$$

Clave: D

PROBLEMA 6 (UNI 2012 - I)

Se sabe que un conjunto de n elementos tiene 2^n subconjuntos, la intersección de P y Q tiene 128 subconjuntos, la diferencia de P respecto de Q tiene 64 subconjuntos. El producto cartesiano $P \times Q$ presenta 182 pares. Luego podemos afirmar que el número de elementos de $Q \setminus P$ es:

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Resolución:

Tema: Conjuntos

$$P \cap Q \Rightarrow 128 = 2^7 \Rightarrow n(P \cap Q) = 7 \quad \dots(I)$$

$$P - Q \Rightarrow 64 = 2^6 \Rightarrow n(P - Q) = 6 \quad \dots(II)$$

$$P \times Q \Rightarrow 182 \Rightarrow n(P) \times n(Q) = 182 \quad \dots(III)$$

$$\text{De (I) y (II): } n(P) = 13$$

$$\text{De (II) y (III): } n(Q) = 14$$

$$\Rightarrow n(Q - P) = 7 \quad \therefore n(Q \setminus P) = 7$$

Clave: C

PROBLEMA 7 (UNI 2012 - II)

Sean A, B conjuntos del mismo universo U . Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

$$I. \quad \text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) \\ \text{Card}(P(A \cap B))$$

Donde $P(A)$ es el conjunto potencia de A .

$$III. \quad \text{Si } \text{Card}(A \cap B) = 0 \text{ entonces } A = \emptyset \text{ o } B = \emptyset$$

- A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFV E) FFF

Resolución:

Conjuntos

$$I. \quad \forall (A, B) \subset U: n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \quad (V)$$

$$II. \quad \forall (A, B) \subset U: 2^{n(A \cup B)} \neq 2^{n(A)} + 2^{n(B)} - 2^{n(A \cap B)} \quad (F)$$

$$III. \quad \text{Si: } A \cap B = \emptyset$$

$\Rightarrow$ Los conjuntos son disjuntos, pero no necesariamente nulos (F)

$$\therefore \text{ VFF}$$

Clave: C

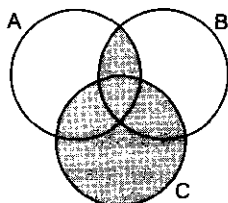


PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. La parte sombreada del diagrama de Venn-Euler mostrado, corresponde a la operación:



- A) $A \cup (B \cap C)$ B) $A \cap (B \cup C)$ C) $(A \cup B) \cap C$
D) $(A \cup C) \cup C$ E) $(A \cap B) \cap C$
2. A un congreso internacional de medicina asistieron 240 personas: 60 pediatras, 80 ginecólogos y 90 de otras especialidades. De estos últimos 25 eran pediatras y 35 eran ginecólogos. ¿Cuántos de los que no son ginecólogos, no son pediatras ni de otras especialidades, sabiendo además que ningún pediatra es ginecólogo?
- A) 50 B) 55 C) 60
D) 65 E) 70
3. Se tienen tres conjuntos A, B y C cuyos cardinales son números consecutivos, tal que:
 $n[P(A)] + n[P(B)] + n[P(C)] = 896$.
Hallar el número de elementos que puede tener como máximo el conjunto potencia de $(A \cup B \cup C)$.
- A) 2^4 B) 2^{24} C) 2^{28}
D) 2^{10} E) 2^{18}
4. Dado los conjuntos:
 $A = \{x/x \in \mathbb{N}; -3 < x < 5\}$
 $B = \{x/x \in \mathbb{Z}; 18 < x < 19\}$
Calcular: $n(A) + n(B)$
- A) 9 B) 8 C) 15
D) 5 E) 7
5. Si se cumple que:
 $A = \{2a + b; 17\}$, $B = \{b + 1; 3a - b\}$
son conjuntos unitarios.
Hallar la unión del conjunto A y B.
- A) $\{16; 8\}$ B) $\{15; 3\}$ C) $\{17; 8\}$
D) $\{20; 10\}$ E) $\{17; 9\}$
6. Determinar $n(C - B)$, si A, B y C están incluidos en el universo U.
 $n(U) = 30$; $n(A') = 14$; $n(B) = 13$
 $n(B - C) = 7$; $n(A \cap B \cap C) = 2$
 $n(A' \cap B' \cap C') = 3$; $n(A \cap B' \cap C') = 5$
- A) 6 B) 8 C) 11
D) 13 E) 12

7. En una reunión, el 80% hablan inglés; 65 personas hablan castellano y el 5% los dos idiomas. ¿Cuántas personas asistieron a la reunión?

A) 230 B) 200 C) 250
D) 260 E) 290

8. De 90 personas se sabe que 61 son solteros y 55 son hombres. Si son 12 mujeres casadas, ¿cuántos son los hombres solteros?

A) 38 B) 28 C) 18
D) 48 E) 45

9. Sabiendo que: $n[(A \cup B) - C] = 32$; $n[A \cup C - B] = 9$;
 $n[C - (A \cup B)] = 14$; $n(B \cap C) = 12$.
Hallar: $n(A \cup B \cup C)$.

A) 58 B) 71 C) 69
D) 67 E) 68

10. Si el conjunto: $A = \{a^b; b^a; \sqrt{256}\}$ es unitario, además $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Hallar: $a + b$

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

11. Sabiendo que $A = \{a^2 + 3\}$; $B = \{7b\}$; $A \cup B = \{28\}$
Hallar: $a + b$

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 11

12. Si n significa el número de elementos, siendo A y B dos conjuntos tales que: $n(A \cup B) = 30$; $n(A - B) = 12$
 $n(B - A) = 8$; hallar: $5[n(A)] - 4[n(B)]$

A) 38 B) 60 C) 48
D) 70 E) 100

13. ¿Es el centro de la circunferencia elemento de dicha circunferencia?

A) Si B) No C) Puede ser
D) A veces E) Faltan datos

14. Sean los conjuntos iguales $A = \{a^2 + 1; 7\}$;
 $B = \{a + b; 10\}$ ¿Cuál puede ser el valor de $a - b$?

A) 1 B) 7 C) -5
D) -13 E) 3

15. Indicar el cardinal del siguiente conjunto:

$$A = \{x / \sqrt{x^3} \in \mathbb{N}; x < 50\}$$

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

16. Determinar por comprensión el conjunto:

$$A = \{0; 4; 14; 30; 52; \dots\}$$

- A) $\{x^2 + 2x / x \in \mathbb{N}, x \neq 0\}$
 B) $\{x^3 - x^2 / x \in \mathbb{N}, x \neq 0\}$
 C) $\{x^2 + x + 2 / x \in \mathbb{N}, x \neq 0\}$
 D) $\{2x^2 + 5x + 3 / x \in \mathbb{N}^+\}$
 E) $\{3x^2 - 5x + 2 / x \in \mathbb{N}^+\}$

17. Se sabe que el conjunto:

$E = \{a^2 + 1; 17; 5b - 3\}$ es unitario
 Hallar: $a + b$; si a y $b \in \mathbb{N}$

- A) 8 B) 7 C) 9
 D) 6 E) 10

18. Hallar $a + b$, si el siguiente conjunto:

$A = \{4a + 1; 2b + 9; 3a + 4\}$, es unitario.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. Sean A, B y C tres conjuntos, tal que:

$A \subset B$ $A \cap C = \emptyset$
 $B \cap C = \{1; 3\}$ $A - C = \{4; 6\}$
 $C - B = \{2; 5\}$ $n(B) = 4$
 Hallar: $n(B - A) + n(C)$

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

20. Cuántos subconjuntos propios tiene:

$$M = \{x / \sqrt{\frac{x+1}{2}} \in \mathbb{N}; 3 < x < 33\}$$

- A) 3 B) 7 C) 15
 D) 31 E) 63

21. En una encuesta que se realizó entre 100 alumnos se sabe que: 50 alumnos gustan de Aritmética y 60 alumnos gustan de Álgebra. Si el número de alumnos que gustan de Aritmética y Álgebra es la cuarta parte del número de alumnos que les gusta solo Aritmética. ¿Cuántos alumnos prefieren solo uno de estos cursos?

- A) 70 B) 80 C) 90
 D) 48 E) 72

22. Dado el conjunto: $A = \{x^2 + 1 / x \in \mathbb{Z}; -3 \leq x \leq 4\}$
¿Qué proposiciones son verdaderas?

- I. $n(A) = 5$
 II. A tiene 16 subconjuntos.
 III. A tiene 31 subconjuntos propios.

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y II E) I y III

23. ¿Cuántos subconjuntos propios tiene M?

$$M = \{x / x \in \mathbb{N}; -2 < x < 5\}$$

- A) 15 B) 31 C) 63
 D) 7 E) 127

24. Colocar el valor de verdad a cada proposición si:

$$A = \{2; 3; \{1\}; \{2; 1\}\}$$

$$\emptyset \in A; 3 \in A; 1 \in A; \{1\} \subset A; \{3\} \subset A; \emptyset \subset A$$

- A) FVFFVV C) FFFVVV E) VVFFVV
 D) FFVVFF E) FVFVFV

25. Sabiendo que los conjuntos:

$A = \{4a + 3b; 23\}$; $B = \{3a + 7b; 41\}$ son unitarios.
 Hallar: $a + b$

- A) 2 B) 9 C) 7 D) 4 E) 5

26. Cuántos subconjuntos tiene el siguiente conjunto:

$$A = \{x^2 / x \in \mathbb{Z}; -9 < 2x - 1 < 11\}$$

- A) 512 B) 128 C) 64
 D) 32 E) 1024

27. Dado el conjunto: $A = \{x + 2 / x \in \mathbb{Z}; x^2 < 9\}$

Calcular la suma de los elementos del conjunto A.

- A) 10 B) 6 C) 9 D) 7 E) 3

28. Dados los conjuntos A y B subconjuntos del universo U:

$A = \{x^2 / x \in \mathbb{N}; 1 \leq x \leq 6\}$
 $B = \{x + 2 / x \in \mathbb{N}; 4 < x < 10\}$
 $U = \{x / x \in \mathbb{N}; 1 < x < 10\}$
 Hallar: $n(A) + n(B)$

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

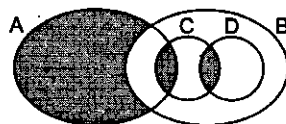
29. De 600 alumnos del CEPREVI se tienen los siguientes datos: 320 practican ajedrez, 240 practican vóley y 100 no practican estos deportes. ¿Cuántos practican ambos deportes?

- A) 20 B) 50 C) 40
 D) 60 E) 72

30. Si $A = \{a + b; 12; 2a - b + 4\}$ es un conjunto unitario; además $B = \{x / x \in \mathbb{N}, b < x < a\}$
 $C = \{x / x \in \mathbb{N}, a - 3 < x < 3b - 2\}$
 ¿Cuántos subconjuntos tiene $(B \cap C) \cup A$?

- A) 8 B) 16 C) 4
 D) 3 E) 32

31. La parte sombreada representa:



- I. $[A - (B \cap C)] \cup [C \cap D]$
 II. $(A \cup B) - (B - C)$
 III. $[(A \cup D) - C] \cap [A - (B - C)]$

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) Solo I y II E) Todas

32. Para los conjuntos A, B y C se tiene:

- $n(P(A)) = 256$
- $N(P(A \cup B \cup C)) = 4096$
- $n(P(A \cap C)) = n(P(A \cap B)) = n(P(B \cap C)) = 2$

- $n(A \cap B \cap C) = 0$
- $n(B \Delta C) = 2n(C - (A \cup B)) + 1$

Calcular: $n(A) + n(B) + n(C)$

- A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

33. De 3 conjuntos A, B y C contenidos en U se sabe:

- $n[P(A \cap B)] = 1$
- $n(A) = 2n(B)$
- $n[P(B)] = 1024$
- $n(U) = 50$

Calcular: $n[A^c \cap B^c]$

- A) 20 B) 25 C) 30
D) 35 E) 38

34. De un grupo de 50 músicos, 39 tocan al menos la guitarra, mandolina o charango. Si se sabe que los que tocan solamente uno de estos instrumentos son unos tantos como otros y que los que tocan estos tres instrumentos son $1/2$; $1/3$ y $1/4$ de los que tocan guitarra y mandolina; mandolina y charango; charango y guitarra respectivamente. Calcular cuántos tocan estos 3 instrumentos.

- A) 6 B) 9 C) 3
D) 12 E) 5

35. Entre los varones que se alojan en un hotel: 40 eran peruanos de los cuales $3/4$ tenían peluca; 60 eran ingenieros. De los peruanos con peluca la mitad eran ingenieros, 5 de cada 6 ingenieros tenían peluca. Calcular cuántos varones que tenían peluca no eran peruanos ni ingenieros si en el hotel se alojan 85 varones con peluca.

- A) 30 B) 45 C) 13
D) 19 E) 20

36. Se dispone de 6 tipos de vinos, los cuales se combinan para obtener sabores distintos a los que se tiene. ¿Cuántos nuevos sabores se podrán obtener. Si al mezclar siempre se realiza con una misma cantidad de cada vino?

- A) 60 B) 58 C) 59
D) 56 E) 57

37. En un certamen de belleza participaron 50 señoritas, de las cuales 23 eran de cabello rubio, 20 eran morenas y 23 tenían ojos verdes, además 6 tenían cabello rubio y ojos verdes, 5 eran morenas con cabello rubio y 7 eran morenas con ojos verdes. También participaban 2 hermanas con las tres características. ¿Cuántas preguntas han de ser necesarias para conocer a dichas hermanas?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

38. En un vagón de tren se realiza una encuesta sobre el uso de cigarrillos. De los 41 pasajeros, 21

personas están sentadas y hay 16 mujeres en total; de los que fuman, 5 hombres están sentados y 2 mujeres están paradas; de los que no fuman, 8 mujeres están sentadas y 10 hombres están parados. Hallar cuántas mujeres que están paradas no fuman, si los que fuman en total suman 19.

- A) 2 B) 5 C) 3 D) 1 E) 4

39. A y B son dos conjuntos tales que:

$$n(A \cup B) = 12, n(A \cap B) = 7, n(A) = n(B) + 1$$

Además: $n(A - B) = n[(A \cup B)^c]$. Calcular cuántos subconjuntos propios tiene A^c .

- A) 3 B) 7 C) 15
D) 63 E) 31

40. Simplificar la expresión conjuntista:

$$[A \cap (C \Delta A)] \cup [(B \cap C)^c \cap A] \cup [B \cup (A \cap B^c)]$$

- A) A B) $A \cup B^c$ C) B^c
D) B E) $A \cup B$

41. Dados 3 conjuntos A, B y C se cumple que:

- $n[A \cap (C - B)] = 3$
- $B \subset C$
- $n[P(C - A)] = n[P(A - C)] = 16$

Calcular: $n(A \cap B \cap C)$; si $n(A \cup B \cup C) = 13$

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 2 E) 4

42. Si se cumple:

- $A^c \subset B^c$
- $n(A - C) = n(A)$
- $n[(P(D - A))] = 64 = 2n[P(D \cap (A \cup B))]$
- $n(C) = \frac{4}{3}n[C - (A \cup D)]$
- $n[C - [(A \cup D) \cap (A' \cap D' \cap C')]] = 15$
- $n[A - (B \cup D)] = 12$

Calcular cuántos elementos tiene $n(B - D)$ si A tiene 5 elementos más que C.

- A) 8 B) 6 C) 7 D) 5 E) 9

43. Si: $A = \{4; 8; \{4\}; \emptyset; \{2; 7\}; \{\emptyset\}$ de las siguientes proposiciones, ¿cuántas son verdaderas?

- (V) $\{2; 7\} \in A$ (F) $\{\{4\}\} \in A$
(V) $\{4; 8; \emptyset\} \in P(A)$ (V) $\{4; 8\} \subset A$
(V) $\{\{4\}; \{2; 7\}\} \subset A$ (V) $\{\{\emptyset\}\} \subset A$
(V) $\emptyset \subset A$

- A) 5 B) 4 C) 7 D) 3 E) 6

44. De 60 personas se sabe:

- 6 hombres tienen 20 años
- 18 hombres no tienen 21 años
- 22 hombres no tienen 20 años
- Tantas mujeres tienen 20 años Como hombres tienen 21 años

Calcular cuántas mujeres no tienen 20 años.

- A) 32 B) 22 C) 18
D) 26 E) 34

45. En un salón de clase de 60 alumnos se tomaron 4 exámenes: Aritmética, Álgebra, Geometría y Trigonometría. De los resultados se sabe: los que aprobaron Aritmética son tantos como los que aprobaron solo Geometría y Trigonometría y tantos como los que aprobaron Álgebra pero no Aritmética. Si todos aprobaron Trigonometría y son el doble de los que aprobaron al menos 2 cursos, ¿cuántos aprobaron Aritmética o solo Trigonometría?

- A) 40 B) 30 C) 15
D) 20 E) 25

46. Dado un grupo de 100 personas se tuvo la siguiente información:

- 45 personas son mudas
- 40 personas son ciegas
- 20 personas son mudas y ciegas
- 18 personas son sordas y ciegas
- 5 personas tienen los tres defectos
- 15 personas no tienen ninguno de los 3 defectos
- Finalmente los que son sordos solamente, son tantos como los que son mudos o ciegos solamente.

Determinar cuantos son sordos.

- A) 20 B) 50 C) 7
D) 13 E) 42

47. En una reunión social se obtuvo la siguiente información: de los hombres, 180 no bailan, 30 no tienen corbata y bailan, 20 con corbata bailan pero no fuman. De las mujeres, 100 no bailan y no usan falda; 150 usan falda; 50 fuman, bailan y no usan falda. ¿Cuántos hombres usan corbata, fuman y bailan; o mujeres que no usan falda, no fuman y bailan, sabiendo además que asistieron 600 personas?

- A) 50 B) 70 C) 80
D) 100 E) 60

48. En una encuesta de 1000 personas sobre bebidas gaseosas se obtuvo lo siguiente:

Reacción Encuestados	Agradable (A)	Desagradable (B)	Indiferente (I)
Hombre < 30(H ₁)	100	60	40
Hombre > 30(H ₂)	50	55	145
Mujer < 30(M ₁)	190	105	5
Mujer > 30(M ₂)	100	50	100

Utilizando la tabla, calcular:

$$n[(H_2 \cup M_2) \cap (A \cup I)]$$

- A) 300 B) 480 C) 395
D) 410 E) 310

49. Sean A y B subconjuntos de un universo U. Indicar las siguientes proposiciones con (V) o (F):

- I. $A \Delta B^c = B \Rightarrow B \subset A$
II. $A^c - B \subset A \cup B \Rightarrow A \cup B = U$
III. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$

- A) FVV B) FFV C) VVV
D) VVF E) VVF

50. Dado el conjunto:

$$A = \{2; 3; 4; 5\}$$

¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

$$p: \exists x \in A / \frac{2x-5}{5} \geq 1$$

$$q: \forall x \in A: \forall y \in A / x^2 + y^2 > 7$$

$$r: \exists x \in A: \forall y \in A / x + y \geq 8$$

$$s: \forall x \in A: x < 3$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

51. Se hizo una encuesta a 640 personas para saber la preferencia hacia 3 canales de televisión A, B y C. Se obtuvo los siguientes resultados:

- 370 no ven el canal A
- 350 no ven el canal B
- 340 no ven el canal C
- 140 no ven ningún canal o ven los tres canales
- 210 ven solo dos canales.

¿Cuántos ven solo un canal?

- A) 180 B) 290 C) 240
D) 280 E) 320

52. En un grupo de 55 personas, 25 hablan inglés, 32 francés, 33 alemán y 5 los tres idiomas. Si todos hablan por lo menos un idioma. ¿Cuántas personas del grupo hablan exactamente 2 de estos idiomas?

- A) 25 B) 26 C) 32
D) 12 E) 40

53. Si: $A = \{2; 2; 3; 4; 5\}$

$$B = \{1; 3; 5; 7; 9\}$$

$$\text{Calcular: } n[(A \times B) \cap (B \times A)] + n[(A \times B) - (B \times A)]$$

- A) 32 B) 64 C) 25
D) 48 E) 128

54. Si se sabe que:

- $n[P(A \cap B)] = 1$
- $n(C - A) = 12 = 2n(A \cap C)$
- $n[C^c \cup (A \cap C^c)] = 40$

Calcular: $n(U)$

- A) 48 B) 50 C) 60
D) 62 E) 58

55. Dado el $A = \{a; \{a\}; \emptyset; \{\emptyset\}$

- $\emptyset \in A$
- $\emptyset \subset A$
- $\{\emptyset\} \in A$
- $\{\{a\}; \emptyset\} \in P(A)$
- $\{\{\emptyset\}\} \subset A$
- $\{\{a\}; \emptyset\} \in P(A)$

¿Cuántos son verdaderos?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

56. Se tiene 3 conjuntos A, B y C tales que están incluidos en el universo U, donde:

- $A \cap C = C$
- $n(C) = 150$
- $n(A^c \cap B^c) = 90$
- $n[(A \cup B) - C] = 6n(C)$

Calcular: $n(U)$

- A) 160 B) 80 C) 120
D) 220 E) 100

57. Si $A = B$, hallar la suma de elementos de C.

$$A = \{2^x + 1, 3^y\}; \quad B = \{2^x, y\}; \quad C = \{x^2 / x \in A\}$$

- A) 5 B) 2 C) 3 D) 8 E) 6

58. A y B son subconjuntos de U y se cumple que:

- $A \cap B = \emptyset$
 - B^c tienen 512 subconjuntos
 - $n(A) = \frac{3}{4} n(B)$
 - El número de subconjuntos de B excede al número de subconjuntos propios de A en 193.
- ¿Cuántos subconjuntos tiene A^c ?

- A) 526 B) 2048 C) 1496
D) 684 E) 1024

59. De un grupo de 66 deportistas que practican atletismo, fútbol o básquet se ha observado de estos que 29 practican atletismo, 33 practicaban fútbol y 31 practicaban básquet; 11 practican atletismo y básquet, 13 practican fútbol y básquet, 4 practican atletismo y fútbol. ¿Cuántos practican los 3 deportes?

- A) 3 B) 2 C) 0 D) 1 E) 5

60. Sea el siguiente conjunto: $A = \{4; 3; \{4; 3\}; \{4\}; \emptyset\}$
¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

- I. $\emptyset \in A \wedge \emptyset \in A$
- II. $\{4; 3\} \in A \wedge \{4; 3\} \subset A$
- III. $n(A) = n(P(A)) - 27$
- IV. $\{\{4\}\} \in P(A)$

- A) 4 B) 3 C) 6 D) 2 E) 5

61. Sean los conjuntos:

$$S = \{x \in \mathbb{N} / 30 < x < 50\,000\}$$

$$T = \{x \in \mathbb{N} / 5 < 2^x < 300\}$$

$$V = \{x \in \mathbb{N} / 20 < x^x < 4000\}$$

Y las proposiciones:

I. $S \cap V = V$ II. $S \cup V = T$

III. $T \cap V = V$ IV. $S \cap T = S$

V. $S = T - V$

Indicar cuántas son correctas

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 1 E) 4

62. Dados los conjuntos:

$$A = \{-3; -2; -1; 1/2; 1; 2; 3\}$$

$$B = \{x \in A / -2 < x < 3\} \text{ y}$$

$$C = \{x \in A / 2x^2 + 3x - 2 = 0\}$$

El resultado de $(A - C) \cap B$ es:

- A) $\{-1; 1; 2; 3\}$ B) $\{-1; 1; 2\}$
C) $\{-1; 1; 3\}$ D) $\{-1; 1/2; 1; 2\}$
E) $\{-1; 1\}$

63. Dado los conjuntos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / \frac{4x-2}{2x+2} \leq 0\}$$

$$T = \{x \in \mathbb{Q} / 4x - 2 \leq 0\}$$

Hallar: $S \cap T$

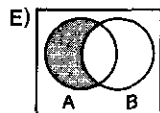
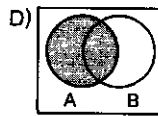
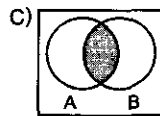
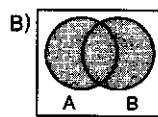
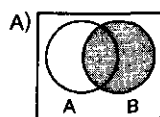
- A) $\{-1; 1/2\}$ B) $\{x \in \mathbb{Q} / -1 < x \leq 1/2\}$
C) $\{x \in \mathbb{Q} / x \leq 1/2\}$ D) $\{1/2\}$
E) $\{-1; 1; 2\}$

64. En una escuela de 135 alumnos, 90 practican fútbol, 55 básquetbol y 75 natación. Si 20 alumnos practican los tres deportes y 10 no practican ninguno, ¿cuántos alumnos practican un deporte y solo uno?

- A) 50 B) 55 C) 60
D) 70 E) 65

65. La diagramación correcta de la siguiente fórmula es:

$$[(A \cup B) \cap (A' \cup B')] \cup [B \cup (A \cap B)]$$



66. Se dan:

$$S = \{r; s; t; u\}, \quad T = \{r; t; v; x\}, \quad V = \{r; s; x; y\}$$

Hallar: $(T \cup V) \cap S$

- A) $\{s; t\}$ B) $\{r\}$ C) $\{r; s; t\}$
D) $\{r; t\}$ E) $\{t\}$

67. De un grupo de 100 señoritas: 10 son solamente flaquetas, 12 solamente morenas, 15 son solamente altas, además 8 tienen por lo menos 2 de estas características. ¿Cuántas señoritas del grupo no tienen ninguna de las tres características?

- A) 50 B) 51 C) 55
D) Más de 60 E) Menos de 40

68. En un grupo de 100 estudiantes, 49 no llevan el curso de Sociología y 53 no siguen el curso de

Filosofía. Si 27 alumnos no siguen Filosofía ni Sociología, ¿cuántos alumnos llevan exactamente uno de tales cursos?

- A) 40 B) 44 C) 48
D) 52 E) 56

69. De 500 postulantes que se presentaron a las universidades Católica o Lima, 300 postularon a la Católica, igual número a la U de Lima, ingresando la mitad del total de postulantes; los no ingresantes se presentaron a la universidad Ricardo Palma, de estos, 90 no se presentaron a Católica y 130 no se presentaron a la U de Lima. ¿Cuántos postulantes ingresaron a la Católica y a la U de Lima?

- A) 20 B) 30 C) 80
D) 70 E) 90

70. Una institución educativa necesita contratar a 25 profesores de Física y a 40 profesores de Matemática. De estos contratados, se espera que 10 realicen funciones tanto de profesor de Física como de profesor de Matemática. ¿Cuántos profesores deberán contratar la institución educativa?

- A) 40 B) 50 C) 65
D) 75 E) 55

71. En un concurso de belleza, participaron 44 señoritas, de las cuales 19 eran de cabello rubio, 19 eran morenas y 22 tenían ojos verdes. También se observó que 5 eran morenas con cabello rubio, 7 eran morenas con ojos verdes y 6 tenían cabello rubio y ojos verdes. También había dos hermanas que tenían las tres características. ¿Cuántas preguntas son necesarias realizar para conocer a dichas hermanas?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

72. Si en un ómnibus viajan 30 pasajeros entre peruanos y extranjeros, donde hay 9 de sexo femenino extranjero, 6 niños extranjeros, 8 extranjeros de sexo masculino, 10 niños, 4 niñas extranjeras, 8 señoras y 7 señores. ¿Cuántas niñas peruanas hay en el autobús?

- A) 6 B) 3 C) 4 D) 1 E) 5

73. 41 estudiantes de idiomas, que hablan inglés, francés o alemán son sometidos a un examen de verificación, en el cual se determinó que:

- 22 hablan inglés y 10 solamente inglés.
- 23 hablan francés y 8 solamente francés.
- 19 hablan alemán y 5 solamente alemán.

¿Cuántos hablan alemán, pero no inglés?

- A) 14 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

74. De un grupo de músicos que tocan la flauta, quena o tuba se sabe que la octava parte toca solo flauta,

la séptima parte toca solo quena, la diferencia de los que tocan solo flauta y los que tocan solo quena es igual a la cantidad de músicos que tocan solo tuba. Si además 80 tocan por lo menos 2 de los instrumentos mencionados. ¿Cuántos tocan solo quena?

- A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

75. En un banco se instala un sistema de alarma electrónica para detectar robos, que de vez en cuando emite una señal (9 días de cada 25 por término medio). Las falsas alarmas tiene por lo general 8 veces la frecuencia de robos no alarmados.

Se sabe que con este sistema se detectan 2 robos de cada 4. ¿Cuál es el porcentaje de días normales para el sistema, o sea aquellos en que no hay robos ni falsas alarmas?

- A) 65% B) 50% C) 60%
D) 55% E) 70%

76. En un conjunto de 30 personas; 16 estudiaron en la universidad A; 11 en la universidad B y 16 en la universidad C. Si solo 2 personas estudiaron en las universidades A, B y C.

¿Cuántos estudiaron exactamente en una de estas universidades, considerando que todas las personas estudiaron al menos en una de dichas universidades?

- A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

77. Si A, B y C son tres subconjuntos de un conjunto universal de 98 elementos y además:

$$n[(A \cup B) \cap C] = 50, n(C) = 34$$

Hallar: $n[(A \cup B \cup C)']$

- A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17

78. El resultado de una encuesta sobre preferencia de jugos de fruta de manzana, fresa y piña es el siguiente:

- 60% gustan manzana.
- 50% gustan fresa.
- 40% gustan piña.
- 30% gustan manzana y fresa.
- 20% gustan fresa y piña.
- 10% gustan manzana y piña.
- 5% gustan de los tres.

¿Qué porcentaje de las personas encuestadas no gustan alguno de los jugos de frutas mencionados?

- A) 5% B) 20% C) 50%
D) 12% E) 10%

79. Dados los conjuntos:

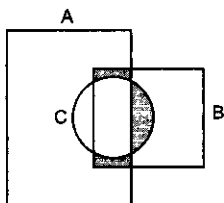
$$S = \{n^2 | n \in \mathbb{N} \wedge 0 < n < 20\}$$

$$T = \{2n / n \in \mathbb{Z} \wedge 4 < n^2 < 500\}$$

¿Cuántos elementos tiene $S \times T$?

- A) 380 B) 400 C) 342
D) 800 E) 760

80. La región sombreada de la siguiente figura corresponde a:

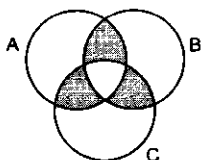


- A) $[(A \cup C) \cup (B \cap C)] - (A \cap B)$
B) $[C - (A \cap B)] \cap [(A \cap C) - (A \cap B)]$
C) $[(A \cap B) - C] \cup [(B \cap C) - (A \cap B)]$
D) $[(A \cap C) - (A \cap B)] \cup [(A \cap C) - (A \cap B)]$
E) $[(A - B) \cup C] - C$

81. Lolo debe almorzar pollo o pescado (o ambos) en su almuerzo de cada día del mes de marzo. Si en su almuerzo durante 20 días hubo pollo y durante 25 días hubo pescado, entonces, el número de días que almorzó pollo y pescado es:

- A) 18 B) 16 C) 15
D) 14 E) 13

82. En la figura la parte sombreada está representada por:



$$A) (A \cap B \cap C) \cup [C \cap (A \cap B)]$$

$$B) (A \cap B \cap C) \cap [(A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}]$$

$$C) \{[(A \cup B \cup C) - A] - C\} - B$$

$$D) \{(A \cap B) - C\} \cup \{(B \cap C) - A\} \cup \{(A \cap C) - B\}$$

$$E) (A \cup B \cup C) - (A \cap B \cap C)$$

83. ¿Cuántos elementos tiene el siguiente conjunto?
(5; 7; 9; 11; ...; 83)

- A) 35 B) 40 C) 41
D) 60 E) 45

84. Sea A un conjunto con dos elementos y B un conjunto con tres elementos, el número de elementos de $P(A) \times P(B)$ es:

- A) 12 B) 24 C) 48
D) 64 E) 32

85. Sea A, B y C subconjuntos de un conjunto universal U. De las afirmaciones:

I. Si $A \subset (B \cup C)$ y $A \cap C = \emptyset$ entonces $A \subset B$.

II. Si $A \subset B$, entonces $A \cap \overline{B} = \emptyset$ ($\overline{B}$ = complemento de B)

III. Si $A \cap B = \emptyset$ y $B \subset C$, entonces $A \cap C = \emptyset$.

IV. Si $A \cup B \cup C = U$.

Entonces $A \cap B \cap C = \emptyset$

- A) Sólo II es verdadera.
B) Sólo I, II y IV son verdaderas.
C) Sólo I es verdadera.
D) Sólo I y II son verdaderas.
E) Todas son verdaderas.

86. Decir cuál de los siguientes enunciados es falso:

- A) $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$
B) $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$
C) $x \in A \wedge A \in B \Rightarrow x \in B$
D) $x \in A \wedge A \subset B \Rightarrow x \in B$
E) $x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in A \cap B$

CLAVES

1. C	12. A	23. C	34. C	45. A	56. A	67. C	78. A
2. E	13. B	24. A	35. E	46. B	57. A	68. C	79. E
3. B	14. D	25. C	36. E	47. B	58. B	69. D	80. C
4. D	15. D	26. C	37. A	48. C	59. D	70. E	81. D
5. C	16. E	27. A	38. D	49. C	60. A	71. D	82. D
6. E	17. A	28. A	39. E	50. C	61. B	72. D	83. B
7. D	18. E	29. D	40. E	51. B	62. D	73. C	84. E
8. B	19. D	30. A	41. D	52. A	63. B	74. B	85. D
9. D	20. B	31. A	42. A	53. C	64. A	75. C	86. C
10. C	21. C	32. D	43. E	54. E	65. A	76. D	
11. B	22. E	33. A	44. B	55. D	66. C	77. B	

Exponentes y radicales en $\mathbb{R}$

03 capítulo

Christoph Rudolff nació en 1499 en Jawor, región de Silesia y falleció en 1545 en Viena. Fue el autor del primer libro alemán de álgebra.

Rudolff fue desde 1517 a 1521 alumno de Henricus Grammateus –un escriba de Érfurt– en la Universidad de Viena y fue el autor de un libro sobre computación, bajo el título de *Behend und durch die hübsch Rechnung kunstreichen Regeln Algebre*.

Rudolff introdujo el uso del signo radical ($\sqrt{\quad}$) en la raíz cuadrada. Se cree que esto se debió a que el símbolo se parecía a una «r» minúscula (por «radix»), aunque no hay evidencia directa. Cajori solo se limitó a decir que el «punto es el embrión de nuestro actual símbolo de raíz cuadrada», a

pesar de que según él mismo «posiblemente, quizás probable» los símbolos posteriores a Rudolff no fueran puntos, sino erres.



Christoph Rudolff

Polonia, 1499 - Austria, 1545

Fuente: Wikipedia

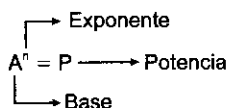
◀ LEYES DE EXPONENTES

Es el conjunto de teoremas y definiciones que estudian a las diferentes relaciones, operaciones y transformaciones que se puedan realizar con los exponentes.

Exponente natural

Se define: $A^n = \underbrace{A \times A \times A \dots A}_{n \text{ veces}}$; $n \in \mathbb{N}$

De donde; si:



Por ejemplo:

- $2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$
- $5^5 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$

Exponente negativo

$$A^{-n} = \frac{1}{A^n}; \quad A \neq 0$$

$1/0 = \nexists$; porque la división de un número conocido por cero matemáticamente no existe o no está definido.

Observación:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}; \quad \begin{matrix} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{matrix}$$

Por ejemplo: $(0,5)^{-3} = \frac{1}{(0,5)^3} = \frac{1}{0,125} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$

Exponente fraccionado

$$\frac{m}{n} \quad A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$$

Por ejemplo: $(-27)^{2/3} = \sqrt[3]{(-27)^2} = (-3)^2 = 9$

Multiplicación de bases iguales

$$A^m A^n = A^{m+n}; \quad A \neq 0$$

Por ejemplo: $5^{2-1} \times 5^{3-1} \times 5^{6-1} = 5^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 5$

División de bases iguales

$$\frac{A^m}{A^n} = A^{m-n}; \quad A \neq 0$$

Por ejemplo: $\frac{3^4}{3} = 3^{4-1} = 3^3 = 27$

Corolario (exponente cero)

$$A^0 = 1; \quad A \neq 0$$

Porque: $0^0 =$ Número indeterminado

Por ejemplo:

- $273^0 = 1$ $(-24)^0 = 1$ $-\sqrt{5}^0 = -1$
- $(0,5 - \frac{1}{4})^0 = (\frac{1}{2} - \frac{1}{2})^0 = 0^0 =$ indeterminado

Potenciación de una multiplicación y una división

$$(AB)^n = A^n B^n; \quad \left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}; \quad \forall B \neq 0$$

Por ejemplo:

- $(5 \times 4)^2 = 25 \times 16 = 400$ $\left(\frac{15}{7}\right)^n = \frac{15^n}{7^n}$
- $2^{x+1} \times 3^{x+1} \times 5^{x+1} = (30)^{x+1}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3^5}{2^5}$

Potenciación de otra potencia

$$(A^m)^n = A^{m \cdot n}$$

Observaciones:

- $(A^m)^n = (A^n)^m$
- $(A^m B^n)^p = A^{mp} B^{np}$

En general: $(a^m)^n \neq a^{mn}$

Por ejemplo:

- $(2^5)^3 = 2^{15}$ $3^{2^3} = 3^8$
- $(x^4)^{-8} = x^{-32}$ $(3^2)^3 = 3^6$

Radicación

$$\sqrt[n]{AB} = \sqrt[n]{A} \sqrt[n]{B}$$

Por ejemplo: $\sqrt[3]{5 \times 3^3 \times 4 \times 3^3} = \sqrt[3]{5 \times 4 \times 2 \times 3^6} = \sqrt[3]{40}$

Radicación de una división

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}; \quad B \neq 0$$

Por ejemplo: $\sqrt[7]{\frac{4x^3y^2}{2x^2y}} = \sqrt[7]{\frac{4x^3y^2}{2x^2y}} = \sqrt[7]{2xy}$

Potencia de una raíz

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

Observaciones:

- $(\sqrt[m]{A})^{mp} = (\sqrt[m]{A^p})^m$
- $\sqrt[n]{A^m} = \sqrt[n]{A^m}$

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[15]{x} = \sqrt[3 \times 5]{x^{2 \times 5}} \times \sqrt[15]{x} = \sqrt[15]{x^{10}} \times \sqrt[15]{x} = \sqrt[15]{x^{11}}$$

Aplicaciones:

1. Simplificar:

$$F = \frac{2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1}}{2^{n+2} + 2^n}$$

Resolución:

Extrayendo el factor común 2^{n+1} en el numerador y 2^n en el denominador:

$$F = \frac{2^{n+1}(2^2 + 2 - 1)}{2^n(2^2 + 1)} = \frac{2^{n+1}(2^2 + 1)}{2^n(2^2 + 1)} = 2^{n+1-n}$$

$$\therefore F = 2$$

2. Reducir lo siguiente:

$$Z = \frac{2^{m+3} \times 4^{m+2n}}{8^{m-2} \times 16^{n+2}}$$

Resolución:

Expresando el numerador y denominador en base 2:

$$Z = \frac{2^{m+3} \times 2^{2m+4n}}{2^{3m-6} \times 2^{4n+8}} = \frac{2^{3m+4n+3}}{2^{3m+4n+2}} = 2^{3m+4n+3-3m-4n-2}$$

$$\therefore Z = 2$$

3. Reducir:

$$y = \frac{x[x^2(x^3)^{-1}]^{-2}}{x^{(-3)^2} x^{(-3)^2} x^{(-3)^2}}$$

Resolución:

Efectuando en el corchete y en el denominador los exponentes de 2 en 2 de arriba hacia abajo.

$$y = \frac{x[x^{-1}]^{-2}}{x^{-8} x^{-12} x^{-8}} = \frac{x^3}{x^{-12}} \quad \therefore y = x^{15}$$

4. Dar la forma simplificada de:

$$E = \frac{\frac{n+2}{n+3} \sqrt{\frac{n+3}{a^3} \sqrt{a^4}}}{\frac{n+3}{n+2} \sqrt{\frac{n+2}{a^3} \sqrt{a^5}}}$$

Resolución:

Expresando en función de un solo radical numerador y denominador:

$$E = \frac{\frac{(n+2)(n+3)}{(n+3)(n+2)} \sqrt{\frac{n+3+4}{a^{n+7}}}}{\frac{(n+3)(n+2)}{(n+3)(n+2)} \sqrt{\frac{n+2+5}{a^{n+7}}}} = \frac{(n+2)(n+3)}{(n+2)(n+3)} \sqrt{\frac{a^{n+7}}{a^{n+7}}}$$

$$\therefore E = 1$$

5. Reducir: $x = \frac{6^m \times 3^n + 2^{m+n}}{6^n \times 3^m + 4^n}$

Resolución:

Expresando en base 3 y 2 el numerador y denominador:

$$x = \frac{3^{m+n} \times 2^m + 2^{m+n}}{2^n \times 3^{m+n} + 2^{2n}}$$

Factorizando 2^m en el numerador y 2^n en el denominador:

$$x = \frac{2^m(3^{m+n} + 2^n)}{2^n(3^{m+n} + 2^n)} = \frac{2^m}{2^n} = 2^{m-n} \quad \therefore x = 2$$

$$6. \text{ Efectuar: } E = \frac{2^{n-2} \sqrt{x^{2n+1}} + x^{2^{n-2}} \sqrt{x^4}}{2^{n-2} \sqrt{x^{2n+2}}}$$

Resolución:

Para transformar la expresión en otra más simple, hacemos: $2^n = a$

$$E = \frac{a-2 \sqrt{x^{2a}} + x^{a-2} \sqrt{x^4}}{a-2 \sqrt{x^{a+2}}} = \frac{a-2 \sqrt{x^{2a}} + a-2 \sqrt{x^{2a-4+4}}}{a-2 \sqrt{x^{a+2}}}$$

Transformando los radicales:

$$E = \frac{x^{\frac{2a}{a-2}} + x^{\frac{2a}{a-2}}}{x^{\frac{a+2}{a-2}}} = \frac{2x^{\frac{2a}{a-2}}}{x^{\frac{a+2}{a-2}}} = 2x^{\frac{2a-a-2}{a-2}} = 2x^{\frac{a-2}{a-2}}$$

$$\therefore E = 2x$$

$$7. \text{ Reducir: } C = \sqrt[5]{\frac{ab}{(ab)^9}} \sqrt[3]{\frac{ab^4}{ab}}$$

Resolución:

Se sabe que: $\sqrt[n]{xy^n} = y \sqrt[n]{x}$

$$C = \sqrt[5]{\frac{ab}{(ab)^9}} \sqrt[3]{\frac{ab^4}{ab}} = \sqrt[5]{(ab)^{-8}} b^{\frac{3}{4}} \sqrt[3]{(ab)^{-1/4}}$$

$$C = b^{\frac{3}{4}} (ab)^{-\frac{8}{5}} \sqrt[3]{(ab)^{-1/4}} = b(ab)^{-1/4} (ab)^{1/4}$$

$$\therefore C = b$$

$$8. \text{ Reducir: } N = \left\{ \frac{1}{2} \right\}^{\frac{1}{16}} \sqrt[4]{4 \sqrt[4]{16 \sqrt[4]{32 \sqrt[4]{128}}}}$$

Resolución:

Transformando el primer término en exponente negativo y efectuando en el radical:

$$N = 2^{\frac{-1}{16}} \times 16^{\frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 4}} = 2^{\frac{-1}{16}} \cdot 2^{\frac{49}{16}} = 2^{\frac{48}{16}} = 2^3$$

$$\therefore N = 8$$

$$9. \text{ Efectuar: } S = \frac{(x^2)^{-1} (x^{-2})^{-1} (x^{-2})^{-1}}{(x^3)^{-1} (x^3)^{-1} (x^3)^{-1}}$$

Resolución:

Efectuando dentro del corchete, empleando el criterio de potencia de potencia:

$$\left[\frac{x^{-2} x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}}}{x^{-3} x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{3}}} \right]^6 = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} \right]^6 = \frac{x^{\frac{6}{2}}}{x^{\frac{6}{3}}} = \frac{x^3}{x^2} = x \quad \therefore S = x$$

10. Reducir y dar el valor de:

$$P = \{ [3^{-1} + (\frac{3}{2})^{-1}]^{-2} + [(\frac{10}{9})^{-1} - \frac{2}{5}]^{-1} \}^{1/2}$$

Resolución:

Reduciendo primero los paréntesis:

$$P = \{ \underbrace{[3^{-1} + (\frac{3}{2})^{-1}]^{-2}}_{\frac{1}{3}} + \underbrace{[(\frac{10}{9})^{-1} - \frac{2}{5}]^{-1}}_{\frac{9}{10} - \frac{4}{10}} \}^{1/2}$$

$$P = (1^{-2} + [\frac{5}{10}]^{-1})^{1/2} = (1 + 2)^{1/2} = \sqrt{3}$$

◀ ECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas en las cuales la incógnita figura en el exponente o en la base.

A continuación se estudiarán aquellos casos que son factibles de resolverlos utilizando las leyes de exponentes.

I. $x^a = x^b \Leftrightarrow a = b$; $\forall x \neq 0 \wedge 1$

Ejemplo:

Resolver: $7^{2x-5} = 7^{x+3}$

Resolución:

$7^{2x-5} = 7^{x+3} \Leftrightarrow 2x - 5 = x + 3 \quad \therefore x = 8$

II. $x^a = y^a \Leftrightarrow x = y$; $\forall a \neq 0$

Ejemplo:

Resolver: $x^{10} = 32^2$

Resolución:

Escribiendo el segundo miembro en base 2:

$x^{10} = (2^5)^2 \Leftrightarrow x^{10} = 2^{10} \quad \therefore x = 2$

III. $x^a = a^a \Leftrightarrow x = a$; $\forall x \neq 0$

Llamado también el caso de las analogías, pero no es genérico (es decir no siempre se cumple).

También: $\sqrt[x]{x} = a^a \Leftrightarrow x = a$; $\forall x \neq 0$

Aplicaciones:

1. Calcular a si: $(a^2)^a (a^3)^3 = (a^5)^4 (a^3)^2 (a^1)^{-1}$

Resolución:

Efectuando en el primer y segundo miembro:

$a^{2a} a^{3a} = a^{20} a^6 a^{-1} \Rightarrow a^{5a} = a^{25}$

Entonces: $5a = 25$

$\therefore a = 5$

2. Calcular x en: $\sqrt{\frac{3^{n+5} + x^x}{3^n x^x + 3}} = 3$

Resolución:

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$\frac{3^{n+5} + x^x}{3^n x^x + 3} = 3^2 \Rightarrow 3^{n+5} + x^x = 3^{n+2} x^x + 3^3$

Factorizando:

$3^3(3^{n+2} - 1) = x^x(3^{n+2} - 1) \Rightarrow 3^3 = x^x$

$\therefore x = 3$

3. Calcular x si: $x^{x^3} = 36$

Resolución:

Elevando al cubo miembro a miembro:

$(x^{x^3})^3 = (36)^3$

Efectuando la permutación indicada:

$(x^3)^{x^3} = (6^2)^3 \Rightarrow (x^3)^{x^3} = 6^6 \Rightarrow x^3 = 6$

$\therefore x = \sqrt[3]{6}$

4. Calcular x si: $(5x)^x = 5^{5^5}$

Resolución:

Elevando a la quinta miembro a miembro:

$[(5x)^x]^5 = [5^5]^{5^5}$

Efectuando en el primer miembro: $(5x)^{5x} = (5^5)^{5^5}$

Luego se puede afirmar: $5x = 5^5 \quad \therefore x = 5^4$

5. Si: $\sqrt[11]{\sqrt{x}\sqrt{121x}} = \sqrt[11]{\sqrt{x}\sqrt{2a}}$; hallar: $N = \frac{11\sqrt{x}}{a}$

Resolución:

Transformando en un solo radical ambos miembros:

$\sqrt[11]{\sqrt{x}\sqrt{121x}} = \sqrt[11]{2a}$

Pero: $121x = (11\sqrt{x})^2$; luego: $\sqrt[11]{\sqrt{x}\sqrt{(11\sqrt{x})^2}} = \sqrt[11]{2a}$

En el segundo miembro: multiplicando por 2 al índice y elevando al cuadrado el radicando:

$\sqrt[11]{\sqrt{x}\sqrt{(11\sqrt{x})^2}} = \sqrt[22]{(2a)^2}$

De donde podemos afirmar que: $11\sqrt{x} = 2a$

Reemplazando en la expresión pedida: $N = \frac{2a}{a}$

$\therefore N = 2$

6. Hallar x en: $\sqrt[9]{5} \sqrt[4]{3^{8-x^{-1}}} = 3^{-1} \sqrt[4]{125}$

Resolución:

Por el caso I: $a^x = a^b \Leftrightarrow x = b$; $a \neq 0 \wedge 1$

Transformando las bases en ambos miembros:

$(5^{\frac{1}{9}})^{\sqrt[4]{3^{8-x^{-1}}}} = 5^9 \Rightarrow 5^{\frac{\sqrt[4]{3^{8-x^{-1}}}}{9}} = 5^9 = 5^{\frac{8-x^{-1}}{9}} = 5^9$

Igualando los exponentes:

$\frac{\sqrt[4]{3^{8-x^{-1}}}}{9} = 9 \Rightarrow \sqrt[4]{3^{8-x^{-1}}} = 9^2 \vee \sqrt[4]{3^{8-x^{-1}}} = 3^4 \Rightarrow 3^{\frac{8-x^{-1}}{4}} = 3^4$

De donde: $\frac{8-x^{-1}}{4} = 4 \Rightarrow 8-x^{-1} = 4^2$

Escribiendo la igualdad en función de la base 2:

$(2^3)^{-x^{-1}} = 2^4 \Rightarrow 2^{-3x^{-1}} = 2^4$; luego: $-3(x^{-1}) = 4$

$\Rightarrow -x^{-1} = \frac{4}{3} \Rightarrow -\frac{1}{x} = \frac{4}{3} \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$

7. Si $x \in \mathbb{R}^+$, calcular a partir de: $x^{x^{x^2+2}} = 2^{\frac{-\sqrt{8}}{8}}$

Resolución:

Transformando el exponente del segundo miembro; multiplicando su numerador y denominador por $\sqrt[4]{2}$.

$x^{x^{x^2+2}} = 2^{\frac{-\sqrt{8}}{8} \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}} = 2^{\frac{-\sqrt{8}}{8} \frac{1}{\sqrt[4]{2}}}$

Descomponiendo el primer exponente:

$x^{x^{x^2+2}} = 2^{\frac{-\sqrt{16}}{8\sqrt[4]{2}}} = 2^{\frac{-2}{8\sqrt[4]{2}}} \Rightarrow (x^{x^2})^{x^2} = (2^{-\frac{1}{4}})^{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}}$

Utilizando el caso III: Si $x^x = a^a \Leftrightarrow x = a$, $\forall x \neq 0$

Luego podemos afirmar que:

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{2^{1/4}} = 2^{-1/4}$$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$$(x^2)^2 = (2^{-1/4})^2 = 2^{-1/2} = (2^{-1})^{1/2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}$$

Nuevamente; si $x^2 = a^a \Leftrightarrow x = a$; podemos afirmar que:

$$x^2 = \frac{1}{2}; \text{ como } x \in \mathbb{R}^+ \therefore x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

8. Calcular el valor de x en: $(4^{125^x})^{25^x} = 4^{(5^2)^5}$

Resolución:

Eliminando el paréntesis en el primer miembro:

$$(4^{125^x})^{25^x} = 4^{(5^2)^5}$$

Transformando convenientemente cada miembro:

$$4^{(5^3)^x(5^2)^x} = 4^{5^{10}} \Rightarrow 4^{5^{3x}5^{2x}} = 4^{5^{10}} \Rightarrow 5^{3x+2x} = 5^{10} \\ \Rightarrow 3x + 2x = 10 \therefore x = 2$$

9. Calcular a en: $\underbrace{a^{320} + a^{320} + \dots + a^{320}}_{81 \text{ veces}} = 81^{81}$

Resolución:

Observemos que en el primer miembro el sumando se repite 81 veces, entonces:

$$\underbrace{a^{320} + a^{320} + \dots + a^{320}}_{81 \text{ veces}} = 81^{81}$$

Entonces:

$$81^1 a^{320} = 81^{81} \Rightarrow a^{320} = 81^{80}$$

pero: $81 = 3^4$

$$\Rightarrow a^{320} = (3^4)^{80} = 3^{320} \Rightarrow a^{320} = 3^{320} \therefore a = 3$$

10. Si $x^{\sqrt{x}} = 4$, hallar:

$$E = \left[x^{\frac{1}{256} x^{1/2 + \sqrt{x}}} \right]^{\sqrt{x}}$$

Resolución:

Transformemos convenientemente la expresión E :

Como $x^{\sqrt{x}} = 4$:

$$E = \left[x^{\frac{1}{256} x^{1/2 + \sqrt{x}}} \right]^{\sqrt{x}} = \left[x^{\frac{1}{256} x^{1/2} x^{\sqrt{x}}} \right]^{\sqrt{x}} = \left[x^{\frac{1}{256} (x^{\sqrt{x}})^{1/2}} \right]^{\sqrt{x}}$$

$$\therefore E = \left[x^{\frac{1}{256} 4^{1/2}} \right]^{\sqrt{x}} = \left[x^{\frac{1}{256} 2} \right]^{\sqrt{x}} = x^{\sqrt{x}} = 4$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Reducir: $A = \frac{\overbrace{x \cdot x \cdot x \dots x}^{(n-3) \text{ veces}}}{\underbrace{x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \dots x^2}_{(n+3) \text{ veces}}} x^{n+9}; x \neq 0$

Resolución:

Por definición de potencia:

$$A = \frac{x^{n-3}}{(x^2)^{n+3}} x^{n+9} = \frac{x^{n-3}}{x^{2n+6}} x^{n+9} = x^0 \Rightarrow A = 1$$

2. Determinar el exponente final de x en:

$$M = \sqrt{x^2} \sqrt{x^8} \sqrt{x^{24}} \dots 15 \text{ radicales}$$

Resolución:

Por propiedad:

$$M = \sqrt{x^2} \sqrt{x^8} \sqrt{x^{24}} \dots 15 \text{ factores}$$

$$M = x^1 x^2 x^3 \dots x^{15}$$

$$M = x^{1+2+3+\dots+15} \Rightarrow M = x^{\frac{15(16)}{2}} \Rightarrow M = x^{120}$$

$\therefore$ Exponente final: 120

3. Reducir: $\frac{\sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4} \sqrt[3]{x^3}}$

Resolución:

$\therefore$ Aplicando la regla práctica: $\frac{\sqrt[3]{x^3} \sqrt[3]{x^4}}{\sqrt[3]{x^4} \sqrt[3]{x^3}} = \sqrt[3]{x^3}^{\frac{13}{11}} = \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x}$

4. Reducir: $A = \frac{7^{n+3} - 7^{n+1}}{3 \times 2^4 \times 7^{n+1}}; n \in \mathbb{Z}^+$

Resolución:

$$\text{Factorizando: } A = \frac{7^{n+1}(7^2 - 1)}{3 \times 16 \times 7^{n+1}}$$

$$A = \frac{49 - 1}{48} \therefore A = 1$$

5. Si: $2^{-x} = \frac{1}{3}$; calcular: $(4^x)^2 + (8^x)^{1/3} + (16^x)^{1/2}$

Resolución:

$$\text{Como: } 2^{-x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{2^x} = \frac{1}{3} \Rightarrow 2^x = 3$$

La expresión a calcular se transforma:

$$(2^2)^{2x} + (2^3)^{x/3} + (2^4)^{x/2};$$

$$2^{4x} + 2^x + 2^{2x}; (2^4)^x + (2^2)^x + (2^2)^x$$

$$\therefore \text{Reemplazando: } 3^4 + 3 + 3^2 = 93$$

6. Calcular el valor de: $E = \frac{2}{y} \left[\frac{x^y + y^{\sqrt{x}}}{y+1} \right]^{y^2-y}$

$$\text{Para: } x = \frac{y+1}{y+1} \sqrt{y+1}$$

Resolución:

$$\text{Del dato: } x = \frac{y+1}{y+1} \sqrt{y+1} \Rightarrow x^{y^2-y} = y^y$$

$$\frac{x^{y^2}}{x} = yy \Rightarrow \frac{y^{\sqrt{x^2}}}{y^{\sqrt{x}}} = y \Rightarrow \frac{y^y}{y^{\sqrt{x}}} = y$$

$$\frac{x^y}{y^{\sqrt{x}}} + 1 = y + 1 \Rightarrow \frac{x^y + y^{\sqrt{x}}}{y^{\sqrt{x}}} = y + 1 \Rightarrow \frac{x^y + y^{\sqrt{x}}}{y+1} = y^{\sqrt{x}}$$

$$\text{Reemplazando: } E = \frac{2}{y} \left[y^{\sqrt{x}} \right]^{y^2-y} = \frac{2}{y} x^{y^2-y}$$

$$\text{como: } x^{y^2-y} = y^y \therefore E = \frac{2}{y} y^y \Rightarrow E = 2y^{y-1}$$

36. Simplifique:

$$T = \frac{1}{ab + bc + ca} \sqrt[3]{\frac{a^2 b^2 c^2}{abc} \left[\frac{1}{abc} \right]^{a+b+c}}$$

 $\forall abc \neq 0$
Resolución:

$$T = \left[\frac{a^2 b^2 c^2}{abc} \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \right]^{a+b+c}$$

$$T = \left[\frac{1}{abc} \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \right]^{a+b+c} = \left[\frac{1}{(abc)^{\frac{4}{3}}} \right]^{a+b+c} \therefore T = 1$$

37. Hallar la suma de las soluciones de:

$$64(2^x)^2 + 1 = 65(2^x)$$

Resolución:

$$64(2^x)^2 - 65(2^x) + 1 = 0 \Rightarrow 2^x = m$$

Cambio de variable:

$$64m^2 - 65m + 1 = 0$$

$$\begin{array}{r} 64m & \times & -1 \\ m & \times & -1 \end{array}$$

$$(64m - 1)(m - 1) = 0$$

$$\bullet \quad 64m - 1 = 0 \quad \bullet \quad m - 1 = 0$$

$$m = \frac{1}{64}$$

$$m = 1$$

$$2^x = 2^{-6}$$

$$2^x = 2^0$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -6$$

38. Reducir:

$$T = \frac{\sqrt[n]{\sqrt[n]{1+n^{-1}}}}{(n+1)^{-\frac{1}{n}}}; n \neq 0$$

Resolución:

$$\text{Como: } \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{n}^{-1}$$

$$\text{Sea: } a = \sqrt[n]{n}$$

$$T = \frac{\sqrt[n]{\sqrt[n]{1+n^{-1}}}}{(n+1)^{-\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{\sqrt[n]{1+n^{-1}}}}{[n+1]^{-\frac{1}{n}}}$$

$$T = \frac{n+1}{1+n} = \frac{n+1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{\frac{n+1}{n}} \Rightarrow T = n$$

39. Efectuar:

$$S = \left[\frac{\sqrt[4]{2}}{2} \sqrt[4]{2} \right] \left[-8^{-1} \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{2} \right]$$

Resolución:

$$\text{Si: } a = \sqrt[4]{2} \Rightarrow a^2 = \sqrt{2}$$

Reemplazando:

$$S = \left[\frac{\sqrt[4]{2}}{2} \sqrt[4]{2} \right] \left[-8^{-1} \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{2} \right]$$

$$S = \left[\frac{\sqrt[4]{2}}{2} \sqrt[4]{2} \right] \left[-8^{-1} \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{2} \right]$$

$$\text{Si: } b = \sqrt[4]{2}$$

$$S = \left[\sqrt[4]{2} \right] \left[-\sqrt[4]{2} \right] = \left[\sqrt[4]{2} \right] \left[\sqrt[4]{2} \right]^{-1} = \left[\sqrt[4]{2} \right]^0 \therefore S = 1$$

 40. Si $ab \neq 0$, reducir:

$$P = \left[\frac{b}{a^{-1}} \right]^{-1} \times \left(\frac{a}{b} \right)^a \times \left[\frac{a}{b} \right]^{\frac{2}{2}-3b} \times \left[\frac{b}{a} \right]^{3a-b} \times \left[\frac{a}{b} \right]^{\frac{2}{2}}$$

Resolución:

Buscando bases iguales

$$P = \left(\frac{b}{a} \right)^{a+b} \times \left(\frac{a}{b} \right)^a \times \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{2}-3b} \times \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{3a-b} \right] \left[\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{2}{2}} \right]$$

$$P = \left(\frac{b}{a} \right)^{a+b} \times \left(\frac{a}{b} \right)^a \times \left(\frac{a}{b} \right)^{a-6b} \times \left(\frac{a}{b} \right)^{-3a+3b} \times \left(\frac{a}{b} \right)^{2b}$$

$$P = (ab)^{3a-3a+6b-6b} = \left(\frac{a}{b} \right)^0 \therefore P = 1$$

41. Efectuar: $T = \left[\frac{\sqrt[3]{9}}{3} \sqrt[3]{9} \right]^{3^{3^3}}$

Resolución:

Análisis particulares:

$$\bullet \quad \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{(3^2)^3} = 3^2$$

$$\bullet \quad \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

Luego:

$$T = \left[\frac{3^2}{3} \sqrt[3]{9} \right]^{3^{3^3}} = \left[\frac{3^2}{3} \sqrt[3]{9} \right]^{3^{3^3}}$$

$$T = 9^{3^3 \times 3} = 9^{3^4} = 9^8 \therefore T = \sqrt[8]{9}$$

 42. Si: $x^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$, hallar el valor de x .

Resolución:

Dándole una forma conocida.

$$\bullet \quad x^{\frac{1}{3}} = \frac{3^{\frac{2}{3}}}{3}$$

$$\bullet \quad \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^3 = \left(\frac{3^{\frac{2}{3}}}{3} \right)^3$$

$$\sqrt[3]{x} = \left(\frac{1}{3} \right)^{3 \times \frac{1}{3}} \Rightarrow \sqrt[3]{x} = \left(\frac{1}{27} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{Por comparación: } \sqrt[3]{x} = \frac{1}{27} \quad ; \quad \sqrt[3]{x} = 3^{-3}$$

$$(\sqrt[3]{x})^3 = (3^{-3})^3 \therefore x = 3^{-9}$$

 43. Hallar los valores de x en: $2^{2x} + 128 = 3 \times 2^{x+3}$.

Resolución:

Transformando y trasponiendo tenemos:

$$2^{(2x)} - (3)(2^x)(2^3) + 128 = 0;$$

$$(2^x)^2 - 24(2^x) + 128 = 0$$

Sea: $2^x = a$

reemplazando:

$$a^2 - 24a + 128 = 0$$

$$\begin{array}{r} a \quad -16 \\ a \quad -8 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{De donde: } a - 16 &= 0; a = 16; 2^x = 2^4; x = 4 \\ a - 8 &= 0; a = 8; 2^x = 2^3; x = 3 \end{aligned}$$

∴ Los valores de x son: 4 y 3

44. Efectúe: $P = \left[\sqrt[2]{\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{4}} \times \sqrt[2]{\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{4}}}} \right]^{3^{-1}}$

Resolución:

Como: $8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

Hagamos que: $a = 1 + \sqrt{2}$

$$P = \left[\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{4} \times a} \times \sqrt[2]{\sqrt[2]{4} \times a}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$P = \left[\sqrt[2]{\sqrt[2]{\sqrt[2]{4} \times a} \times \sqrt[2]{\sqrt[2]{4} \times a}} \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sqrt[2]{a \times \sqrt[2]{4} \times a} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$P = \left[\sqrt[2]{a \times \sqrt[2]{4} \times a} \right]^{\frac{1}{2}} = \left(2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad \therefore P = 2$$

45. A partir de: $nn^{nn^{nn}} = 5$, hallar n

Resolución:

$$nn^{nn^{nn}} = 5 \Rightarrow n \times n^5 = 5$$

$$n^6 = 5 \quad \therefore n = \sqrt[6]{5}$$

46. Calcular x en: $x^{1+x^{1+x}} = \sqrt[4]{x^5 \sqrt[4]{x^5}}$

Resolución:

$$x^{1+x^{1+x}} = \sqrt[4]{x^5 \sqrt[4]{x^5}} = M$$

De donde:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^{1+x^{1+x}} &= M; \quad x^{1+x^{1+x}} = M \\ x^{1+M} &= M \quad \dots(I) \end{aligned}$$

$$\bullet \quad \sqrt[4]{x^5 \sqrt[4]{x^5}} = M \Rightarrow \sqrt[4]{x^5 \sqrt[4]{x^5}} = M$$

$$\sqrt[4]{x^5} = M \Rightarrow x^{\frac{5M}{4}} = M \quad \dots(II)$$

(II) en (I):

$$x^{1+M} = x^{\frac{5M}{4}} \Rightarrow 1 + M = \frac{5M}{4} \Rightarrow M = 4$$

En (I): $x^{1+4} = 4 \quad \therefore x = \sqrt[5]{4}$

47. Hallar el valor de x en:

$$\sqrt[3]{2x} - 3\sqrt[3]{2x} - 3\sqrt[3]{2x} - \dots = 2$$

Resolución:

$$\sqrt[3]{2x} - 3\sqrt[3]{2x} - 3\sqrt[3]{2x} - 3\sqrt[3]{2x} \dots = 2$$

$$\sqrt[3]{2x} - 3(2) = 2 \Rightarrow 2x - 6 = 8 \quad \therefore x = 7$$

48. Reducir a su mínima expresión:

$$T = \sqrt[2]{a^{\sqrt{2}+1} \sqrt[2]{a^{3-\sqrt{2}}} \sqrt[2]{a^{1-5\sqrt{2}}} \sqrt[2]{a^{8-\sqrt{2}}}}$$

Resolución:

Transformando a exponente fraccionario

$$T = a^{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \times a^{\frac{3-\sqrt{2}}{2}} \times a^{\frac{1-5\sqrt{2}}{2}} \times a^{\frac{8-\sqrt{2}}{2}}$$

$$T = a^{\frac{\sqrt{2}+1}{2} + \frac{3-\sqrt{2}}{2} + \frac{1-5\sqrt{2}}{2} + \frac{8-\sqrt{2}}{2}}$$

$$T = a^{\frac{4(\sqrt{2}+1) + 2(3-\sqrt{2}) + 2(1-5\sqrt{2}) + 2(8-\sqrt{2})}{4}}$$

$$T = a^{\frac{4\sqrt{2}+4+6\sqrt{2}-4+2-10\sqrt{2}+8\sqrt{2}-2}{4}} = a^{\frac{8\sqrt{2}}{4}} \quad \therefore T = a^2$$

49. Al efectuar: $T = \left(\sqrt[4]{8} \sqrt[5]{3} \right)^{\frac{20}{6} \sqrt[3]{6}}$ se obtiene:

Resolución:

Transformando a exponente fraccionario:

$$T = 3^{\frac{5\sqrt[3]{6}}{4}} = 3^{\frac{5\sqrt[3]{6} \times \frac{20}{6}}{4}}$$

$$T = 3^{\frac{2^{4/3} \times 2^{39/20}}{2^{3/4}}} = 3^{2^{\frac{4}{5} + \frac{39}{20} - \frac{3}{4}}} = 3^{2^{\frac{16+39-15}{20}}}$$

$$T = 3^{2^{\frac{40}{20}}} = 3^{2^2} \quad \therefore T = 81$$

50. Simplifique:

$$T = \left(\frac{3^{x+2} - 3^{x+1} + 3^x}{3^{x-2} - 3^{x-1} + 3^x} \right) - \left(\frac{2^{1-x} + 3^{1-x}}{3^{x-1} + 2^{x-1}} \right)^{(1-x)^{-1}}$$

Resolución:

Descomponiendo:

$$T = \left[\frac{(3^x)(3^2) - 3^x(3) + 3^x}{(3^x)(3^{-2}) - 3^x(3^{-1}) + (3^x)} \right] - \left[\frac{\frac{2}{2^x} + \frac{3}{3^x}}{\frac{3^x}{3} + \frac{2^x}{2}} \right]^{\frac{1}{1-x}}$$

$$T = \left[\frac{3^x(9-3+1)}{3^x\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}+1\right)} \right] - \left[\frac{\frac{2(3^x)+3(2^x)}{(2^x)(3^x)}}{\frac{2(3^x)+(2^x)3}{(3)(2)}} \right]^{\frac{1}{1-x}}$$

$$T = \frac{7}{9} - \left(\frac{6}{6^x} \right)^{\frac{1}{1-x}} = 9 - 6 \quad \therefore T = 3$$

51. Luego de resolver: $\sqrt[4]{3} \sqrt[3]{\sqrt{2+1} \sqrt[3]{2-1}} = 27$

Calcule: $T = (-x)^{(-x)^{-1}}$

Resolución:

De la ecuación:

$$\sqrt[4]{3} \times 3(\sqrt{2+1})(\sqrt[3]{2-1})\sqrt[3]{3} = 3^3 \Rightarrow \frac{1}{3} \times 3\sqrt[3]{3} = 3^3 \Rightarrow 3^{\frac{1}{3}+1} = 3^3$$

$$\left(3^{\frac{1}{3}+1} \right)^{\frac{1}{3}} = 3^3 \Rightarrow \frac{1}{3^{\frac{1}{3}+1}} = 3 \Rightarrow 3^{-\left(\frac{1}{3}+1\right)} = 3^1$$

Usando el dato, se tiene: $T = 2^{2^x n} \Rightarrow T^{\frac{1}{n}} = 2^{2^x}$

$$\text{Luego: } V = \frac{T^{\frac{1}{n}}}{-2^{2^7}(S)} = \frac{2^{2^7}}{-2^{2^7}(-1)} = 1 \quad \therefore V = 1$$

58. Hallar el valor de:

$$E = \frac{2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4}}{2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} + 2^{x-4}}$$

Resolución:

En el numerador factorizamos 2^{x+1} y en el denominador 2^{x-4} , así:

$$E = \frac{2^{x+1}(1 + 2 + 2^2 + 2^3)}{2^{x-4}(2^3 + 2^2 + 2 + 1)}$$

$$\text{De aquí: } E = \frac{2^{x+1}}{2^{x-4}} = 2^5 \quad \therefore E = 32$$

59. Simplificar $\forall x \in \mathbb{N} - \{1\}$

$$S = \frac{\sqrt[3]{2^x + 3^{-x}} + \sqrt[3]{2^{-x} + 3^x}}{\sqrt[3]{6^x + 1}}$$

Resolución:

Se puede escribir:

$$S = \frac{\sqrt[3]{2^x + \frac{1}{3^x}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2^x} + 3^x}}{\sqrt[3]{6^x + 1}}$$

$$S = \frac{\sqrt[3]{\frac{2^x + 1}{3^x}} + \sqrt[3]{\frac{1 + 6^x}{2^x}}}{\sqrt[3]{6^x + 1}} = \frac{\sqrt[3]{\frac{2^x + 1}{3^x}} + \sqrt[3]{\frac{1 + 6^x}{2^x}}}{\sqrt[3]{6^x + 1}}$$

Haciendo: $\sqrt[3]{6^x + 1} = a$

$$\Rightarrow S = \frac{\frac{a}{3} + \frac{a}{2}}{a} = \frac{5a}{6a} \quad \therefore S = \frac{5}{6}$$

60. Simplificar: $T = \frac{2^{2^{3+n}} \sqrt{2^{2^n}} \sqrt{2^{-2^n}} \sqrt{2^{7 \times 2^n}} \sqrt{2^{2^{2^n} \times 2^n}}}{2^{2^{2^n} \times 2^n}}$

Resolución:

Sea: $2^{2^n} = x$

$$\bullet \quad 2^{2^3 \times 2^n} = 2^{2^3 \times 2^n} = 2^{2^n \times 2^3} = (2^{2^n})^8 = x^8$$

$$\bullet \quad 2^{7 \times 2^n} = 2^{2^n \times 7} = (2^{2^n})^7 = x^7$$

$$\bullet \quad 2^{2^{2^n} \times 2^n} = 2^{2^{2^n} \times 2^n} = 2^{2^{2^n} \times 2^n} = 2^{2^{2^n} \times 2^n}$$

$$2^{(2^{2^n})^{16}} = 2^{x^{16}}$$

Reemplazando en el problema:

$$T = \frac{x^8 \sqrt{x} \sqrt{2^{-1} \sqrt{x^7} 2^{x^{16}}}}{(x^8 x^7 x^7 x^7 x^7) \sqrt{2^{x^{16}}}}$$

$$T = \frac{(2^{-1} x^{16}) \sqrt{2^{x^{16}}}}{2^{x^{16}}} = \frac{1}{2} \quad \therefore T = 4$$

61. Hallar el equivalente de: $P = \frac{9 \times \sqrt[3]{3^4} \sqrt{(3^7 \sqrt{9})^2}}{(\sqrt[3]{81} \sqrt[3]{3})^2}$

Resolución:

$$\text{Sea: } \sqrt[3]{3^4} = \sqrt[3]{81} = a$$

$$P = \frac{9 \times \sqrt[3]{3^4} \sqrt{(3^7 \sqrt{9})^2}}{9 \times \sqrt[3]{3^4} \sqrt{9}} = \frac{7 \times 9 \times \sqrt{(3^7 \sqrt{9})^2 \times 7}}{9 \times \sqrt[3]{3^4} \sqrt{9}}$$

$$P = \frac{7 \times 9 \times \sqrt{(3^7)^2 \times 9^2}}{9 \times \sqrt[3]{3^4} \sqrt{9}} = \frac{7 \times 9 \times \sqrt{1}}{9 \times \sqrt[3]{3^4} \sqrt{9}} \quad \therefore P = 1$$

62. Hallar el equivalente simplificado de:

$$M = \left[\left(\frac{2 \times x^{-9}}{\sqrt{x^9}} \right)^{9 \times x^{-1}} \right]^{9 \times x^{-1}}; x \neq 0.$$

Resolución:

Haciendo que: $a = x^{-1}$, y reduciendo:

$$\frac{2 \times x^{-9}}{\sqrt{x^9}} = \frac{2 \times x^{-9}}{x^{\frac{9}{2}}} = \frac{2 \times x^{-9}}{x^{\frac{9}{2}}} = \frac{2 \times x^{-9}}{x^{\frac{9}{2}}} = x^{\frac{9}{2} \times (-1)} \therefore M = x^9$$

63. Si:

$$\begin{cases} (x + y) \times 3^{y-x} = 2 & \dots(I) \\ \frac{x-y}{x+y} = 3^{\frac{3}{2}} & \dots(II) \end{cases}$$

calcular: x e y

Resolución:

$$\text{De (II): } x + y = (3^{\frac{3}{2}})^{y-x} \quad \dots(1)$$

$$(1) \text{ en (I): } (3^{\frac{3}{2}})^{y-x} \times 3^{y-x} = 2$$

$$\frac{(3^{\frac{3}{2}})^{y-x}}{3^{x-y}} = 2 \Rightarrow \left(\frac{3^{\frac{3}{2}}}{3} \right)^{x-y} = 2$$

$$(3^{\frac{3}{2}})^{x-y} = 2 \Rightarrow 2^{(x-y)/3} = 2^1$$

De donde:

$$\frac{x-y}{3} = 1; x - y = 3 \quad \dots(2)$$

(2) en (1):

$$x + y = (3^{\frac{3}{2}})^3 \Rightarrow x + y = 54 \quad \dots(3)$$

De: (2) y (3) se deduce que:

$$\therefore x = \frac{57}{2}; y = \frac{51}{2}$$

64. Reduzca: $S = \left[\frac{8^{2^x} \sqrt{2^{2^x} \sqrt{x^{2^{2^x} \times 2}}}}{2^{x^{2^x} \times 2}} \right]^{2^{x^{2^x} \times 2}}$

Resolución:

Sea: $a = x^{-x^{-1}}$

Como: $2^{x+2} = 2^x \times 2^2$

$$S = \frac{(2^{2^x})^2 \sqrt{2^{2^x} \sqrt{x^{2^{2^x} \times 2}}}}{2^{2^x \times 2}} = \frac{(2^{2^x})^2 (2^{2^x}) \sqrt{x^{2^{2^x} \times 2}}}{2^{2^x \times 2}}$$

Hallando: $b = 2^{2^x}$

$$\therefore S = \frac{(b^3)^2 \sqrt{b^2 \sqrt{x^{2^{2^x} \times 2}}}}{b^2} = x$$

65. Simplificar: $M = \left(\frac{a^{2a^a} \sqrt{a^{a^{a^a} \times a^a}}}{a^{a^a \times a^a}} \right)^{a^{a^a \times a^a}}$

Resolución:

Efectuando:

$$M = \frac{a^{2a^a} \sqrt{a^{a^{a^a} \times a^a}}}{a^{a^a \times a^a}} = \frac{a^{2a^a} \sqrt{a^{a^{a^a} \times a^a}}}{a^{a^a \times a^a}}$$

$$\therefore M = \frac{a^{2a^a} \sqrt{a^{a^{a^a} \times a^a}}}{a^{a^a \times a^a}} = a$$

66. Resolver: $x^{4\sqrt{x}+0.25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^2}-2\sqrt{2}}$

Resolución:

Transformemos así:

$$x^{4\sqrt{x}+0.25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^2}-2\sqrt{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^2}}\right]^{\frac{1}{2^2}-2\sqrt{2}}$$

$$x^{4\sqrt{x}+0.25} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^2}} = \left(x^{\frac{1}{2^2}}\right)^{\frac{1}{2^2}-2\sqrt{2}}$$

De aquí, comparando: $x^{4\sqrt{x}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2^2}}}$

Elevamos a la $1/4$, así:

$$\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{4\sqrt{x}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2^2}}\right]^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 4\sqrt{x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow 4\sqrt{x} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Luego, comparando tenemos:

$$4\sqrt{x} = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \therefore x = \frac{1}{4} = 0,25$$

67. Determinar el valor de verdad de las proposiciones:

I. $\forall x \in \mathbb{R}; x^0 = 1 \Rightarrow (-2)^0 = 1$

II. Si: $(x^m)(x^n) = x^{m+n} \Rightarrow (3^3)(3^3) = 39$

III. $\forall x \in \mathbb{R}; (-x)^2 = x^2 \wedge (-3)^2 = -9$

Resolución:

I. Analicemos por lógica proposicional:

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^0 = 1 \Rightarrow (-2)^0 = 1$$

F	V	$\Rightarrow$ (I) es V
V		

II. $(x^m)(x^n) = x^{m+n} \Rightarrow (3^3)(3^3) = 39$

V	F	$\Rightarrow$ (II) es F
F		

III. $\forall x \in \mathbb{R}; (-x)^2 = x^2 \vee (-3)^2 = -9$

V	F	$\Rightarrow$ (III) es V
V		

$\therefore$ En consecuencia se tiene VFV.

68. Resolver la ecuación: $x^{x^{0.5}} = \sqrt{0,5}$

Resolución:

Se tiene: $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

Elevamos a la $(1/2)$: $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}$

Hagamos como se indica: $(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

Ojo con el artificio en el 2.º miembro, la idea es buscar una cantidad elevada a ella misma (como en el primer miembro).

$$(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\Rightarrow (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}}$$

Por comparación: $(x^{\frac{1}{2}}) = \left(\frac{1}{16}\right)$

$\therefore$ Elevando al cuadrado: $x = \frac{1}{256} = 4^{-4}$

69. Se tiene la siguiente igualdad: $(\sqrt{x})^{\sqrt{x}} = \sqrt{a^{a-1}}$. Anunciar el valor de no verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Las expresiones quedan bien definidas, si: $x \in \mathbb{R}$.
- II. La igualdad se verifica si y solo si $a \in \mathbb{R}^+$; $x = a$.
- III. Si x existe entonces a existe.

Resolución:

I. Para que las expresiones queden perfectamente definidas: $x \in \mathbb{R}$, pero además debe ser positivo (la proposición no lo dice), en caso contrario $\sqrt{x} \notin \mathbb{R}$.
 $\Rightarrow$ (I) es F.

II. Es evidente que $\sqrt{a}$ existe siempre que $a \geq 0$ pero cuando $a = 0$ no se puede establecer por comparación $x = a = 0$ porque se daría una indeterminación de la forma $\sqrt{0^0 \times 0}$ por tanto a estrictamente es real positivo, siendo $x = a$.
 $\Rightarrow$ (II) es V.

III. Por la proposición anterior, x existirá siempre que a exista y defina perfectamente la expresión.
 $\Rightarrow$ (III) es V.

$\therefore$ Luego, el valor de no verdad de las proposiciones será: VFF

70. Si $x^x = 2$; calcular el valor de: $x^{x^{1+2x^{1+x}}}$

Resolución

Verifique las transformaciones:

$$x^{x^{x^{2x}}} = x^{(x)(x)^{2x}} = x^{(x)(x)^{2x(x)^x}} = x^{x^{1+2x^{1+x}}} = (x^x)^{(x^x)^{2(x^x)}}$$

Reemplazando $x^x = 2$, se tiene:

$$\therefore 2^{2^{2(2)}} = 2^{2^4} = 2^{16}$$

71. De la igualdad $x^{(x-1)^2} = 2x + 1$

calcular: $x - \frac{1}{x}$

Resolución:

De la igualdad se tiene: $x^{x^2-2x+1} = 2x + 1$

Multiplicando ambos miembros por x^{2x+1}

$$\Rightarrow (x^{2x+1})(x^{x^2-2x+1}) = (x^{2x+1})(2x + 1)$$

PROBLEMA 2 (UNI 1975)

La expresión: $(n^m)^{\frac{1}{m}} - (x^{\frac{1}{m}})^{\frac{m}{m+1}} + m\sqrt{x^{2m}}$ es igual a:

- A) x B) $2x$ C) x^2 D) $2x^2$ E) $3x$

Resolución:

Efectuando, aplicando leyes de exponentes:

$$x^{\frac{m}{m}} - x^{\frac{(m+1)}{m} \cdot \frac{m}{m+1}} + x^{\frac{2m}{m}} = x - x + x^2 = x^2$$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 1978)

Si: $P = \frac{10\sqrt{10}^{10\sqrt{10}}}{\sqrt[5]{5}^{\frac{4}{5}}}$ Calcular: $E = \sqrt{P^P}$

- A) $1/2$ B) 10 C) 5 D) 2 E) N. A.

Resolución:

Llamemos a: $P = \frac{N}{D}$

Entonces:

$$N = 10\sqrt{10}^{10\sqrt{10}} \Rightarrow N = 10\sqrt{10}^N \Rightarrow \sqrt[N]{N} = 10\sqrt{10}$$

Identificando $N = 10$

Análogamente: $D = 5$

$$\therefore P = \frac{N}{D} = \frac{10}{5} = 2$$

Se pide: $E = \sqrt{2^{2^2}}$

$$\Rightarrow E = \sqrt{2^E} \Rightarrow \sqrt[E]{E} = \sqrt{2} \quad \therefore E = 2$$

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 1978)

Simplificar la siguiente expresión:

$$E = \left[\left(2^{-1} \sqrt{\frac{x}{x^2}} \right)^{x^{x-1}} \right]^{x^{x-1}}$$

- A) x^{-2x} B) x^{-x} C) x^{2x}
D) x^x E) $x^{x/4}$

Resolución:

Efectuando tendremos que:

$$E = \left[2^{-1} \sqrt{\frac{x}{x^2}} \right]^{x^{x-1} \left(x^{\frac{1}{x}} \left(x^{-\frac{1}{x}} \right) \right)} = \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{x^2}} \right]^{x^0}$$

$$\text{de donde: } E = \left[\frac{1}{2} \right]^{x^0}$$

$$\therefore E = x^x$$

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 1982 - I)

Al simplificar: $\frac{(\sqrt[3]{b^{3x-y}})(2\sqrt[3]{b^{x+4y}})}{3\sqrt[3]{b^{x+3y}}}$

se obtiene:

- A) $6\sqrt[3]{19b^x b^{12y}}$ B) $6\sqrt[3]{b^{19x+12y}}$ C) $3\sqrt[3]{b^{6x+12y}}$
D) $b^3 \sqrt[3]{b}$ E) $b^6 \sqrt[3]{b}$

Resolución:

Llevando todo a un solo radical:

$$6\sqrt[3]{\frac{b^{18x-9y+3x+12y}}{b^{2x+9y}}} = 6\sqrt[3]{b^{19x}} = \sqrt[3]{b^{18} b} = b^6 \sqrt[3]{b}$$

Clave: D



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Si $x^y = 2$; calcular el valor de: $\frac{x^{3y}x^{2y}}{x^{2y} + x^{3y}x^{4y} - 4}$
- A) 32 B) 30 C) 28
D) 24 E) 25
2. Si $x = \sqrt[7]{8}$ y además se tiene: $x^{n^2} = (nx)^x$; hallar n^2 .
- A) 16 B) 8 C) 64
D) 60 E) 32
3. Si $ab = a^b = 2$; hallar: ab^{ab}
- A) a B) 2a C) 4a
D) 8a E) 2
4. Si al reducir:

$$\left[\dots \left[\left[(x^a)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{3}{2}} x^{-\frac{3}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \dots \right]^{\frac{1}{2}}$$

n corchetes

$x > 0 \wedge x \neq 1$

El exponente final de x es 0,5; siendo $a = 2^{16} - 3$; hallar n .

5. Hallar el exponente final de x en:
$$\frac{x^{\frac{a-b}{a+b}} x^{\frac{b-c}{b+c}}}{x^{\frac{a-c}{a+c}}}$$

$$\text{Si: } \frac{1}{1+ba^{-1}} + \frac{1}{1+cb^{-1}} + \frac{1}{1+ac^{-1}} = -3$$

6. Si $2^x = y \wedge 2^y = x$; calcular: $y^{\frac{1}{x}} x^{\frac{1}{y}}$
- A) 2 B) 3 C) 1
D) 4 E) 6

7. Indicar el valor más simple de: $\left\{ 3^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \right\}^{\left\{ \frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}} \right\}^{3-1}}$
- A) 3 B) 1 C) 2
- D) 4 E) 8

8. Calcular el valor aproximado de:

$$\sqrt{10}\sqrt{10}\sqrt{10}\dots$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

9. Si $x, y \in \mathbb{Z}^+$; $y - x \geq 2$; hallar el valor más simple de:

$$\frac{y-x}{\sqrt{\frac{x^{x+y} y^y + y^{x+y} x^x}{x^{2y} y^x + y^{2x} x^y}}}$$

- A) $\frac{x}{y}$ B) 1 C) $\frac{y}{x}$ D) 2 E) 0

- 10. Indicar el exponente final de x en:**

$$\sqrt{x^{10}} \sqrt{x^9} \sqrt{x^8} \dots \sqrt{x}; x > 0$$

- A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{11}$
D) $\frac{2^{12} - 1}{2^{12}}$ E) $\frac{2^{12} - 1}{2^{11}} + \frac{13}{2}$

- 11. Simplificar:**

$$E = \frac{p}{p+1 - \frac{p}{p+1 - \frac{p}{p+1 - \frac{p}{\ddots}}}}$$

- A) {1} B) {p} C) {p; 2}
D) {1; p} E) 0

- 12. Si $0 < a < 1$; reducir:**

$$A = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - a^2}}{1 + \sqrt{1 - a^2}}} + \sqrt{\frac{1 - a^2}{a^2}}$$

- A) $\frac{1}{a}$ B) a C) 1 D) 2 E) 4

13. Si se cumple: $x^{\sqrt{x}} = 4$; calcular: $\left(x^{\frac{1}{256}} \cdot x^{\frac{1}{2} + \sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$

- A) 2 B) 4 C) 8
D) 10 E) 1

- 14. Sabiendo que: $a = \sqrt[3]{575}$; $b = \sqrt[3]{45}$; simplificar:**

$$M = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a^2 + ab + b^2)$$

- A) 500 B) 480 C) 720
D) 600 E) 530

- ### 15. El monomio:

$$M(x) = \left\{ \sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{bx^5}}}} \right\}^{3n}$$

es de grado 9; calcular el valor de n .

- A) 20 B) 24 C) 26
D) 28 E) 16

- 16. Hallar el mayor valor de n si:**

$$(\eta\sqrt{\eta})^{\frac{1}{n^3}} = \left[\left[\left[\left[2^{\left(1+\frac{1}{4}\right)} \right]^{\left(1+\frac{1}{2}\right)} \right]^{\left(1+\frac{1}{3}\right)} \right]^{\left(1+\frac{1}{4}\right)} \right]^{\frac{1}{10}}$$

- A) $\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 4
 D) 3 E) $\sqrt[3]{16}$

17. Si $x \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}$; hallar n que verifica:

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}$$

- A) 8 B) 9 C) 10
 D) 4 E) 5

18. Considerando que: $\frac{1}{x} = 5^{x^5}$

Encontrar el valor de: $\sqrt{x^5 - 1} + \sqrt[3]{x^{-x^5} + 3}$

- A) 4 B) 0 C) 2 D) 3 E) 8

19. Indicar el exponente final de x en:

$$\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} \sqrt[3]{x} \dots n \text{ radicales}$$

- A) $1 - \frac{1}{3^n}$ B) $1 + \frac{1}{3^n}$ C) $1 - 3^n$
 D) 2 E) $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

20. Sabiendo que: $x = \sqrt[n]{n}$

Calcular el valor de: $(x^n)^{x^{n^n}} + (x^n)^{x^{n^n}} + (x^{x^{n^n}})^n$

- A) $2n$ B) $3n$ C) n
 D) 2 E) $8n$

21. Si $x^x = 2$; hallar: $x^{x^{x+1}}$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22. Reducir: $\sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} \dots 100 \text{ radicales}$

- A) $x^{2^{100}}$ B) $2^{200} - 1$ C) $2^{20} - 1$
 D) $x^{\frac{2^{100}-1}{2^{100}}}$ E) $x^{1024} - 1$

23. Sabiendo que: $a + \frac{1}{b} = 1 \wedge b + \frac{1}{c} = 1$

Calcular el valor de: $E = a \sqrt{\frac{1+b^2c^2}{a^2+1}} + b \sqrt{\frac{c^3a^3+1}{b^3-1}}$

- A) -2 B) -1 C) 0
 D) 1 E) 2

24. Reducir: $E = \left[\sqrt[3]{8} \sqrt[3]{8} \right]^{(\sqrt[3]{2})^{\sqrt[3]{2}-6}}$

- A) 1 B) 2 C) 4
 D) 8 E) 16

25. Hallar el valor de: $K = (a^{\sqrt[3]{a}})^{\sqrt[3]{a}-9}$ para: $a = 2^{-1}$

- A) 2 B) 4 C) $\sqrt{2}$ D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

26. Indicar el exponente final de x en:

$$m \sqrt{x^{m^2}} \cdot m^2 \sqrt{x^{m^3}} \cdot m^3 \sqrt{x^{m^4}} \dots m^n \sqrt{x^{m^{n+1}}}$$

- A) m B) n C) $m+1$
 D) $n+1$ E) mn

27. Simplificar la expresión:

$$F = \sqrt[3]{\frac{x^3}{x^2}} + \sqrt[4]{\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^5}}}{x^2}}$$

- A) x B) x^{-1} C) x^2
 D) x^{-2} E) 1

28. Resolver la ecuación: $5^{2x+1} - 3 \times 5^{2x-1} = 550$
Y dar como respuesta el valor de x^2 .

- A) 2 B) 2,25 C) 2,5
 D) 2,75 E) 3,5

29. Sabiendo que: $y^{x^2+7x+12} = 1 \wedge y > 0$, además: $x + y = 6$, calcular la suma de los valores que admite y .

- A) 23 B) 20 C) 19
 D) 17 E) 16

30. Hallar la solución de la ecuación trascendental.

$$\sqrt[7]{\frac{x^{16}+x^x}{x^x+x^2}} = x; (x > 0 \wedge x \neq 1)$$

- A) -9 B) -7 C) 2 D) 7 E) 9

31. Calcular el exponente final de x en:

$$\frac{a+b \sqrt{x^{a-b}} - b+c \sqrt{x^{b-c}}}{a+c \sqrt{x^{a-c}}}$$

Sabiendo que: $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = 1005$

- A) 2010 B) 2009 C) 2008
 D) 2007 E) 2006

32. Si x es positivo, simplificar la expresión:

$$M = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{3}{4}} \sqrt{\frac{4}{5}} \dots \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{\sqrt{x^{n^2+3n}}}$$

- A) $\sqrt{x}$ B) x^n C) x^2
 D) x E) 1

33. Calcular el valor de $a + b + c$, si:

$$a = \sqrt{6 + \sqrt{3} \sqrt{3} \dots}$$

$$b = \sqrt{12 + \sqrt{12} + \sqrt{12} + \dots}$$

$$c = \sqrt{13 - \sqrt{13} + \sqrt{13} - \sqrt{13} + \dots}$$

- A) 10 B) 9 C) 8
D) 7 E) 5

34. Si x e y son dos números positivos, hallar la expresión equivalente a:

$$H = 2007 \sqrt{\frac{x^{2007} + y^{2007}}{x^{-2007} + y^{-2007}}}$$

- A) 1 B) 2 C) x
D) $x + y$ E) xy

35. Sabiendo que: $M = 2 \left(\sqrt[3]{\frac{28^3 + 112^3}{28^3 + 7^3}} \right)^3$

$$N = 4 \left(\sqrt[3]{\frac{10^3 + 50^3}{25^3 + 5^3}} \right)^5$$

Hallar el valor de $M - N$.

- A) 0 B) 7 C) 14 D) 28 E) 36

36. Simplificar la expresión

$$\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{a} + \dots + \sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a} \dots \sqrt[3]{a}} \quad \begin{matrix} \text{b sumandos} \\ \text{b factores} \end{matrix}$$

- A) $\sqrt[3]{a}$ B) a C) 1
D) a^{-1} E) $\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{a}$

37. Reducir:

$$E = \left[\left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{4} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{125} \right)^{-3} + \left(\frac{1}{81} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

- A) 1 B) 2 C) 4
D) $1/2$ E) $1/4$

38. Calcular el valor de: $R = \frac{[-9^{-2-1}][243^{-0.2}]^{-1}}{[81^{-4-2-1}][-(1/27)^{-3-1}]}$

- A) -1 B) 3 C) -3
D) $1/3$ E) $-1/3$

39. Sabiendo que: $m^n = \frac{1}{3}$ $\wedge$ $n^m = -2$; calcular el valor de:

$$F = m^{m+1} + n^{m-1-n}$$

- A) -8 B) 1 C) $-4/9$
D) 4 E) $1/9$

40. Conociendo que: $n^n = n + 1$, reducir la siguiente expresión:

$$T = \frac{n^{n^2-n+1} \sqrt{(n+1)^{(n+1)^{n-1}}}}{n^{n^2-n+1}}$$

- A) n B) n^n C) $n^n + 1$
D) $\sqrt[n]{n}$ E) n^{n+1}

41. Si: $n^n = 2$, calcular el valor de: $E = \sqrt[n]{n^{n^2-2n^{1-n}}}$

- A) 2 B) 4 C) 8 D) 16 E) 32

42. Reducir: $S = \frac{2 \frac{x-1}{x} x^{2x} - x^2 \frac{x-1}{x} x^{14}}{x-1 \sqrt{x^{x+7}}}$

Sabiendo que: $x \in \mathbb{Z}^+ / x \geq 2008$

- A) 1 B) x C) $2x$
D) 2 E) x^2

43. Determinar el valor de: $-x^{-x-x+x} \left[\frac{x^{-x^x} + x^{x-x}}{x^{-x-x} + x^{x^x}} \right]$;

cuando: $x = 2^{-100}$.

- A) 0 B) 1 C) -1
D) $\frac{1}{64}$ E) 2^{-200}

44. Sabiendo que: $\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}$; además

$$y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{y}} = \sqrt[3]{2^{\sqrt{2}}}, \text{ calcular: } zy(x^2)^{\frac{1}{2}}$$

- A) 8 B) 4 C) 2
D) 1 E) 16

45. Teniendo en cuenta que:

$$A = k \sqrt[3]{\frac{\left(\frac{1}{n} \right)^{\frac{k}{2}}}{(1)(2)(3) \dots n}} - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{9n} + \dots + \frac{1}{k^2 n} \right)$$

Además t cumple con la condición: $x^t = (tx)^x$;

siendo $x = 10^{\frac{1}{9}}$, calcular $t^2 \operatorname{sgn}(A)$.

- A) 10 B) 100 C) -10
D) -100 E) 0

46. Calcular n si en la expresión:

$$\underbrace{[\dots [(x^a)^{1/2} x^{-3/2}]^{1/2} x^{-3/2}]^{1/2} \dots]^{1/2}}_{n \text{ corchetes}}$$

el exponente de x luego de reducir la expresión es 0,5; además $a = 2^{16} - 3$.

- A) 100 B) 110 C) 14 D) 2 E) 3

47. Luego de resolver: $2x + 1 = \frac{3}{2} \left[\sqrt[3]{\frac{1}{x}} \right]^{4x-1}$

si $x > 0$ señalar, el valor de: $\left(\frac{1}{x} \right)^{\left(\frac{1}{x} \right)}$

- A) 16 B) 81 C) $1/64$
D) $1/256$ E) 256

48. Siendo $x > 0$ resolver:

$$x - \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} + x + \sqrt[3]{2 - 1} = 10\sqrt{17 + 6\sqrt{8}}$$

- A) 4 B) 3 C) -2
D) -3 E) 6

49. Si: $(x^{x+3})(x^{2x+2}) = a^{\frac{1-a}{a}}$

Hallar el equivalente a: $\left(\frac{1}{a} \right)^{-\left(\frac{1}{a} \right)} x^{-x}$

- A) 1 B) $\sqrt{x}$ C) x^{x+1}
D) x^2 E) x

50. Luego de resolver: $x^{(x-1)^2} = 2x + 1$, donde $x > 0$, indicar el valor de: $(x^{\sqrt{2}-1})^x$

- A) $3 + 2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$
D) $1 - \sqrt{2}$ E) $3 - 2\sqrt{2}$

51. Si se cumplen las igualdades $x^8 = \sqrt{3^{\sqrt{3}}}$; $y = x^{\left(\frac{1}{y^x}\right)}$ calcular: y^{3x}

- A) 3 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 27

52. Siendo $A = \sqrt{2+4\sqrt{8+16}} \dots$

$$B = \sqrt[3]{x^5 \sqrt[5]{x^4 \sqrt[9]{x^{24} \sqrt[17]{x^{240}} \dots}}}$$

Calcular el valor aproximado de: $\frac{AB}{x}$

- A) 4 B) 2 C) 8 D) 1 E) 0

53. Sabiendo que:

$$m = \left(\sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x^2}} \dots\right) \left(\sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3}} \dots\right) \dots \left(m+2 \sqrt[m+1]{x^{m+1} \sqrt[m+2]{x^{m+1}}} \dots\right)$$

Calcular el valor aproximado de x en función de m .

- A) m B) m^m C) $m^{\frac{1}{m}}$
D) $\frac{1}{m}$ E) m^2

54. Señalar el valor numérico de: $M = \frac{1}{m} \left\{ \frac{x^m + m\sqrt{x}}{m+1} \right\}^{m^2-1}$

$$\text{Si: } x = m^{m+1} \sqrt[m]{m^{m-1} \sqrt[m]{m}} \quad ; \quad m \in \mathbb{Z} \wedge m > 9$$

- A) m B) 1 C) m^m
D) $\sqrt[m]{m}$ E) $\frac{1}{m}$

55. Sabiendo que:

$$x_1 = \frac{1}{2} ; x_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} ; \dots ; x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{(1/2)^{n-1}} \quad \text{--- } n(\text{veces})$$

Calcular el valor aproximado de x_n cuando n crece indefinidamente.

- A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

56. Indicar el valor de: $\sqrt[3]{x^{1-7(3x+1)^{-1}}}$

$$\text{si se cumple que: } x^{x^{\sqrt{2}+0.25}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) $\sqrt[3]{3}$

57. Si: $x = t^{-1/\sqrt{t}}$; $y = t^{1/(t-1)}$ / $t > 0 \wedge t \neq 1$, hallar la relación entre x e y .

- A) $x^{\frac{1}{y}} = y^x$ B) $y^{\frac{1}{x}} = x^y$ C) $x^y = y^x$
D) $x^x = y^y$ E) A y B

58. Efectuar: $E = \sqrt[2]{4(2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1}}$

- A) $1/2$ B) $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2}$
D) 4 E) 2

59. Si: $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$; hallar el valor de n que verifica la igualdad:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{x}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\left(\frac{1}{x}\right)^n}}$$

Y otorgar como respuesta el valor de $(n+3) \div 7$

- A) 3 B) 2 C) 5
D) 4 E) 1

60. Calcular: $S = \left[\frac{((6^2 \times 3)^2 \times 6^2 \times 3) 2^{16^2-15^2}}{((3^2 \times 6)^2 \times 3^2 \times 6^2)^2} \right]^{\frac{16^2-15^2}{31}}$

- A) 1 B) 8 C) 32
D) 16 E) 64

61. Simplificar: $S = \left[(2^{-3^{-1}})^{27^{2^{-2^{-1}}}} \right]^2$

- A) 8 B) 4 C) $1/2$
D) $1/4$ E) $\sqrt{2}$

62. Simplificar: $T = \sqrt[3]{\frac{3^{6n} \times 36}{27^{2n+1} + 9^{3n+1}}}$

- A) 16 B) 3 C) 9
D) 27 E) 6

63. Si: $x + \frac{1}{x} = 3$

$$\text{Hallar el valor de: } V = \left[x^x + \left(\frac{1}{x}\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)} \right] \left[x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^x \right]$$

- A) 28 B) 21 C) 15
D) 20 E) 24

64. Hallar el valor de: $S = \frac{m^m n^n p^p}{m^p n^m p^n}$

$$\text{Si: } \sqrt[m]{mx} = \sqrt[p]{nx} = \sqrt[n]{px} = x$$

- A) 1 B) 2 C) 0,5
D) 4 E) $1/4$

65. Dada la condición: $x^{x-2} = 1 - x^{-1}$

$$\text{Simplificar: } T = \frac{\sqrt{x} \cdot x^x}{x^{x-1}}$$

- A) x B) $1/x$ C) 1
D) x^x E) $\sqrt{x}$

66. Calcular el valor de:

$$V = \sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{(9x)^{4m}} \sqrt[4]{(4x)^{3m}}}{(6x)^{2m+1}}}$$

Si es independiente de x

- A) 4 B) $3/2$ C) $2/3$
D) $1/2$ E) 2

67. Sabiendo que: $\begin{cases} a^b = 2 \\ b^a = 0,5 \end{cases}$

Evaluar: $S = \left[\frac{a^{b^1-a} + b^{a^1-b}}{a^{b^1+a} + b^{a^1+b}} \right]^{1+a^b b^a}$

- A) 10 B) 2 C) 4
D) 8 E) 16

68. Dar el equivalente reducido de:

$T = (\sqrt[3]{5})^{(\sqrt{2})^{1/2}}$

- A) 13 B) $\sqrt{5}$ C) 25
D) $1/2$ E) $\sqrt[4]{5}$

69. Simplificar: $V = \frac{n+3}{n-1} \sqrt[n]{x^{3+5+7+\dots+n}}$

- A) $\sqrt{x}$ B) $\sqrt[4]{x}$ C) x
D) 1 E) x^2

70. Simplificar: $S = \sqrt{x \sqrt{x^2 \sqrt{x^3 \sqrt{x^4 \dots}}}}$

Dando el exponente final de x

- A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 1
D) $1,5$ E) $2,5$

71. Simplificar: $T = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \sqrt{\frac{\sqrt{2}^{\sqrt{3}} \sqrt{3}^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}^{\sqrt{2}}}{\sqrt{6}^{\sqrt{2}} + \sqrt{2}^{\sqrt{3}+\sqrt{2}}}}$

- A) 4 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) 3

72. Dado que: $a + b + c = abc$

Simplificar: $V = x \left[\frac{\sqrt[3]{x^{b+c}} + \sqrt[3]{x^{c+a}} + \sqrt[3]{x^{a+b}}}{x^{ab} + x^{bc} + x^{ac}} \right]$

- A) 0 B) x^{abc} C) $1/x$
D) x^2 E) 1

73. Dar la forma más simple de:

$S = (ab^{-b} + ba^{-a})[a^{-(a+1)} + b^{-(b+1)}]^{-1}$

- A) 2 B) a C) ab
D) b E) $a^a b^b$

74. Simplificar: $T = \frac{x^2 x^4 x^6 \dots n^{\text{factores}}}{x^3 x^5 x^7 \dots n^{\text{factores}}}$

- A) x^n B) x^{-n} C) 1
D) x E) $1/x$

75. Hallar el valor de: $V = (x^{-2} + y^{-2})^{-1} (xy^{-1} + x^{-1}y)$

Si: $x = 3 + \sqrt{2}$

$y = 3 - \sqrt{2}$

- A) 4 B) 5 C) 7 D) 1 E) 0

76. Hallar el exponente final de x en:

$E = \underbrace{\sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3 \sqrt[4]{x^3 \dots \sqrt[4]{x^3}}}}}_{n \text{ radicales}}$

- A) $\frac{2^n - 1}{2^n}$ B) $\frac{4^n - 1}{4^n}$ C) $\frac{2^n + 1}{4^n}$
D) $\frac{4^n - 1}{4}$ E) $\frac{4^n + 1}{2^n}$

77. Si se tiene que: $x^x = x + 1$

Simplificar: $S = x^x \sqrt{x} \sqrt[4]{x} \times \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

- A) x^2 B) x C) $1/x$
D) $\sqrt[3]{x}$ E) x^x

78. Simplificar: $T = (0,25)(16)^{\frac{1}{2}(0,0625)^{(0,125)(0,5)}}$

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 16

79. Si: $ab = b^b = 2$

Hallar el equivalente reducido de:

$U = ab^{ab^{ab}}$

- A) 16 B) 16^a C) 4
D) 4^a E) 8^a

80. Evaluar la expresión: $D = \frac{\sqrt[5]{4^5 \sqrt[4]{4} \dots \sqrt[5]{4 \sqrt[4]{2}}}}{\sqrt[3]{2 \sqrt[3]{2} \dots \sqrt[3]{2}}}$

- A) 1 B) 2 C) 4
D) $0,5$ E)

CLAVES

1. A	11. D	21. C	31. D	41. D	51. D	61. B	71. C
2. C	12. A	22. D	32. B	42. B	52. A	62. C	72. E
3. C	13. B	23. E	33. A	43. C	53. C	63. D	73. C
4. B	14. E	24. D	34. E	44. A	54. B	64. A	74. E
5. B	15. D	25. E	35. A	45. D	55. B	65. A	75. C
6. D	16. E	26. E	36. C	46. C	56. D	66. B	76. B
7. A	17. B	27. B	37. E	47. E	57. C	67. D	77. B
8. C	18. A	28. B	38. C	48. B	58. E	68. B	78. C
9. B	19. E	29. D	39. B	49. D	59. A	69. B	79. D
10. E	20. B	30. E	40. A	50. B	60. E	70. B	80. A

Expresiones algebraicas

04 capítulo

Jean Le Rond D'Alembert nació y murió en París (16 de noviembre de 1717-29 de octubre de 1783). Fue un matemático, filósofo y enciclopedista francés, y uno de los máximos exponentes del movimiento ilustrado. D'Alembert, recién nacido, fue abandonado en la puerta de la iglesia de Saint-Jean-le Rond (de ahí el nombre que se le impuso).

A los 18 años consiguió el título de bachiller en artes, después de varios años de estudio en una escuela jansenista. Tras dos años de estudiar derecho empezó a cursar la carrera de medicina, que pronto abandonó. La gran pasión de D'Alembert fueron las matemáticas, que había aprendido en forma prácticamente autodidacta; en 1739, presentó su primer trabajo en la prestigiosa Academia de Ciencias de París. Dos años después, con tan solo 24 años de edad, fue elegido miembro de esa Academia.

Abordó la matemática a través de la física, con el problema de los tres cuerpos, la precesión de los equinoccios y las cuerdas vibrantes. Esto le llevó a estudiar las ecuaciones diferenciales y las ecuaciones a las derivadas parciales. También inventó un criterio para distinguir una serie convergente de una divergente. Su obra maestra fue el *Tratado de dinámica*, donde enunció el teorema que lleva su nombre (principio de D'Alembert). El teorema fundamental del Álgebra recibe en algunos países de Europa el nombre de «teorema de D'Alembert-Gauss», dado que D'Alembert fue el primero en dar una prueba casi completa sobre dicho teorema.



Fuente: Wikipedia

« EXPRESIONES TRASCENDENTES

Denominados también **no algebraicas** ya que es un conjunto de números y letras ligados entre sí por las operaciones de adición, multiplicación, división, potenciación, etc. en un número infinito de veces; o en todo caso las que no estén incluidas en el caso anterior. Entre ellas tenemos:

Exponenciales: cuando su variable aparece en el exponente: 2^{x+1} ; a^x ; x^x

Trigonómicas: cuando su variable está afectada de alguna función trigonométrica: $\sin x$; $\cos x$; $\tan x$; ... etc.

Logaritmos: cuando su variable está afectada de la función logaritmo $\log x$; $\ln x$.

Circulares: vienen a ser las funciones inversas a las trigonométricas más conocidas como las funciones arcos: $\arccos x$; $\arctan x$; $\arcsen x$; ... etc.

Hiperbólicas: cuando su variable está afectada de las funciones hiperbólicas: seno hiperbólico ($\sinh$), coseno hiperbólico ($\cosh$), ... etc.

Estas son bastante utilizadas en el cálculo superior.

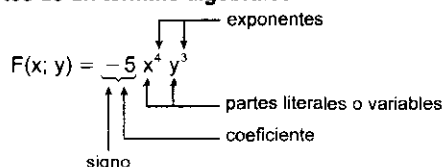
« TÉRMINO ALGEBRAICO

Es aquella expresión algebraica donde no participan las operaciones de adición ni sustracción.

Ejemplos:

- $A(x; y) = 2x^4y^3$
- $B(x; y; z) = 7x^3y^2z^5$

Partes de un término algebraico



Términos semejantes

Son aquellos que se caracterizan por tener las mismas partes literales afectadas de los mismos exponentes.

Ejemplo:

$3x^4y^3$; $-7x^4y^3$ son términos semejantes
 $2^5x^9y^8$; $2^7x^9y^8$ son términos semejantes
 $-4x^3y^2$; $-4x^2y^3$ no son términos semejantes

« CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Por su naturaleza

Se clasifican de acuerdo a la forma en que sus exponentes afectan a sus variables.

Expresión algebraica racional (EAR): los exponentes que afectan a las variables son números enteros. Esta a su vez puede ser:

- **Expresión algebraica racional entera (EARE):** los exponentes son enteros positivos.
- **Expresión algebraica racional fraccionaria (EARF):** los exponentes son enteros negativos o también si aparecen variables como denominador.

Expresión algebraica irracional (EAI): es aquella donde al menos uno de los exponentes que afectan a las variables es fraccionario o también si aparecen variables bajo radicales.

De lo expuesto anteriormente, podemos resumir el siguiente cuadro:

EXPRESIÓN	SUBDIVISIÓN	EXPONENTE
Racional	Entera	$\in \mathbb{Z}^+$
	Fraccionaria	$\in \mathbb{Z}^-$
Irracional		Fraccionario

Ejemplos:

- $3x^2y + 5x^3y^9 - 4xz$ es una EARE
- $4x^5 - x^5z^3 + xz^{-1}$ es una EARF
- $\sqrt{2}x^5 - 4x^3y + z^9$ es una EARE
- $3x^2z - x^{-2}z^3$ es una EARF
- $x^3 + y^4 + \sqrt[3]{z}$ es una EAI
- $x^{4/3} + y^4 - z\sqrt[3]{x+y}$ es una EAI

Por su número de términos

Pueden ser:

Monomios: cuando tienen un solo término.

Ejemplos:

- $A(x; y) = 8x^5y^9$
- $F(x; y; z) = \sqrt{5}x^4y^3z$

Multinomios: cuando tienen dos o más términos.

Ejemplos:

- $P(x; y) = 3x^4y + 2x^3y^4 - 7x^{-2}y^9$
- $F(x; y) = 4x^5 + 2xy^6 - \sqrt[5]{x+2}$

Un caso particular de estos es el polinomio.

Polinomio

Es aquella expresión algebraica cuyos términos son todos racionales enteros.

Ejemplos

- $F(x; y) = x^4 + x^3 - 2y^5$
- $P(x; y; z) = 3xy^3 + 7xy^4 - \sqrt{2}x^9z^3$

« VALOR NUMÉRICO DE UN POLINOMIO Y CAMBIO DE VARIABLES

Es el resultado que se obtiene a partir de un polinomio al reemplazar valores asignados a sus variables.

Ejemplo:

Sea: $P(x) = x^2 + 3x - 1$

Entonces:

$$P(2) = 2^2 + 3(2) - 1 = 9$$

$$P(-2) = (-2)^2 + 3(-2) - 1 = -3$$

$$P(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 + 3(\sqrt{3}) - 1 = 3\sqrt{3} + 2$$

$$P(a+1) = (a+1)^2 + 3(a+1) - 1 = a^2 + 5a + 3$$

$$P(x-2) = (x-2)^2 + 3(x-2) - 1 = x^2 - x - 3$$

$$P[P(x)] = P[x^2 + 3x - 1] = (x^2 + 3x - 1)^2 + 3(x^2 + 3x - 1) - 1$$

Observaciones

1. En todo polinomio la suma de coeficientes se obtiene reemplazando a su(s) variable(s) por la unidad.

$$\Sigma \text{coeficientes} = P(1)$$

Ejemplo:

Sea: $P(x) = x^3 + 4x^2 + 7x - 3$

$$\Sigma \text{coeficientes} = P(1) = 1^3 + 4(1)^2 + 7(1) - 3 = 9$$

2. En todo polinomio el término independiente (TI) se obtiene reemplazando a su(s) variable(s) por cero.

$$TI = P(0)$$

Ejemplo:

Sea: $P(x) = x^3 + 4x^2 + 7x - 3$

$$TI = P(0) = 0^3 + 4(0)^2 + 7(0) - 3 = -3$$

Ejemplos:

1. Calcular: $E = \frac{P(2) - 2P(-2)}{P(1) - P(-1)}$

Si: $P(x) = x^2 + 3x - 1$

Resolución:

Calculando separadamente:

$$P(2) = 4 + 6 - 1 = 9$$

$$P(-2) = 4 - 6 - 1 = -3$$

$$P(1) = 1 + 3 - 1 = 3$$

$$P(-1) = 1 - 3 - 1 = -3$$

Reemplazando en la expresión pedida:

$$E = \frac{9 - 2(-3)}{3 - (-3)} = \frac{15}{6} \quad \therefore E = 5/2$$

2. Si: $P(x) = x^3 - 3x + 1$

Hallar: $S = \sqrt[4]{\frac{P(3) - P(2) + P(1)}{P(2) - P(1) - P(-2)}} + 1$

Resolución:

Calculando separadamente:

$$P(3) = 27 - 9 + 1 = 19$$

$$P(2) = 8 - 6 + 1 = 3$$

$$P(1) = 1 - 3 + 1 = -1$$

$$P(-2) = -8 + 6 + 1 = -1$$

Reemplazando en la expresión dada:

$$S = \sqrt[4]{\frac{19 - 3 - 1}{3 + 1 + 1}} + 1 = \sqrt[4]{\frac{15}{5}} + 1 = \sqrt[4]{3} + 1$$

$$\therefore S = \sqrt[4]{2}$$

3. Si: $P(x) = x^2 + x + 1$; hallar: $P[2 - P(0)]$

Resolución:

Calculando primero $P(0)$: $P(0) = 0 + 0 + 1 = 1$
en la expresión se tendrá:

$$P(1) = 1^2 + 1 + 1$$

$$\therefore P[2 - (0)] = P(1) = 3$$

4. Si: $F(x) = x^2 + x + 1$; $G(x) = x^2 - 2x + 2$ y
 $H(x) = F(x+1) + G(x-1)$; hallar: $H(1)$

Resolución:

Calculando primero:

$$F(x+1) = (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^2 + 3x + 3$$

$$G(x-1) = (x-1)^2 - 2(x-1) + 2 = x^2 - 4x + 5$$

Reemplazando:

$$H(x) = x^2 + 3x + 3 + x^2 - 4x + 5 = 2x^2 - x + 8$$

$$\text{Luego: } H(1) = 2(1)^2 - (1) + 8 \quad \therefore H(1) = 9$$

5. Si: $P(x) = x + 7$; hallar $P[P(x)]$

Resolución:

Reemplazando el valor de $P(x)$:

$$P[P(x)] = P(x) + 7; \text{ como } P(x) = x + 7$$

$$\text{Entonces: } P[(x)] + 7 = x + 7 + 7 = x + 14$$

6. Si: $P(x+1) = x + 3$; hallar $P(x)$

Resolución:

Primera forma:

Escribiendo $(x+3)$ en función de $x+1$:

$$P(x+1) = x + 1 + 2$$

Luego, donde aparezca $(x+1)$ se colocará x :

$$P(x) = x + 2$$

Segunda forma:

$$\text{Haciendo: } y = x + 1 \Rightarrow x = y - 1$$

Escribiendo la expresión original en términos de y :

$$P(y) = y - 1 + 3 \Rightarrow P(y) = y + 2$$

$$\text{Una vez reducida se hace: } y = x \quad \therefore P(x) = x + 2$$

7. Siendo: $P(x+7) = x^2 + 4x - 3$

Determinar: $P(x)$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } x + 7 = y \Rightarrow x = y - 7$$

$$\text{En la expresión original: } P(y) = (y-7)^2 + 4(y-7) - 3$$

$$\text{Reduciendo: } P(y) = y^2 - 7y - 3$$

$$\text{Haciendo: } y = x \Rightarrow P(x) = x^2 - 7x - 3$$

8. Si: $P\left(\frac{x-1}{2}\right) = x^3 - x + 1$; hallar $P(-2)$

Resolución:

Para calcular la expresión pedida podemos hacer:

$$\frac{x-1}{2} = -2 \Rightarrow x = -3$$

Este valor se reemplaza en la igualdad original:

$$P(-2) = -23$$

9. Si: $P(x-3) = 5x - 7$ y $P[F(x)+2] = 10x - 17$
hallar: $F(x-2)$

Resolución:

En el primer polinomio en lugar de x colocaremos $F(x) + 5$:

$$P[F(x) + 5 - 3] = 5[F(x) + 5] - 7$$

$$P[F(x) + 2] = 5 F(x) + 18$$

$$10x - 17 = 5F(x) + 18$$

Despejando tenemos: $F(x) = 2x - 7$

Entonces: $F(x - 2)$ será: $F(x - 2) = 2(x - 2) - 7$

$$\therefore F(x - 2) = 2x - 11$$

10. Si: $F(x^x - 2) = x^x \sqrt{\frac{x^{x^2+3x}}{x^{x^2+2x}}}$, calcular $F(1)$.

Resolución:

Dándole una forma adecuada a la expresión:

$$F(x^x - 2) = x^x \sqrt{\frac{(x^x)^{x^2+3}}{(x^x)^{x^2+2}}}$$

Sea: $x^x - 2 = 1 \Rightarrow x^x = 3$

Reemplazando se tendrá:

$$F(1) = \sqrt[3]{\frac{3^{3^3}}{3^{3^2}}} = \sqrt[3]{\frac{3^{27}}{3^9}} = \sqrt[3]{3^{18}}$$

$$\therefore F(1) = 3^6$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Dado: $F(x) = 4x^2 - 8x - 31$; evaluar:

$$E = [F(0)]^{[F(4)]^{[F(2)]}}$$

Resolución:

$$F(2) = 4(2)^2 - 8(2) - 31 = -31$$

$$F(4) = 4(4)^2 - 8(4) - 31 = 1$$

$$F(0) = 4(0)^2 - 8(0) - 31 = -31$$

$$\Rightarrow F = (-31)^{1^{(-31)}} = -31$$

2. Si: $H(x) = 2x^3 + x^4$; $P(x) = 4x^8 - 2x^3 - x^5$ y $G(x) = 3x^4 - x^9$; calcular: $H(4) + P(4) + G(4)$

Resolución:

Tenemos:

$$H(4) + P(4) + G(4) = 2(4)^3 + 4^4 + 4(4)^8 - 2(4)^3 - (4)^5 + 3(4)^4 - (4)^9 = 1792$$

3. Si: $P(x) = ax + b$ y además: $P[P(P(x))] = 8x + 189$. Calcular: $P(3)$

Resolución:

$$[P(a(ax + b) + b)] = 8x + 189$$

$$a[a(ax + b) + b] + b = 8x + 189$$

$$\frac{a^3x + a^2b + ab + b}{\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow} = \frac{8x + 189}{\uparrow \quad \uparrow}$$

$$\text{Entonces: } a^3 = 8 \Rightarrow a = 2 \quad \wedge$$

$$b(a^2 + a + 1) = b(2^2 + 2 + 1) = 189 \Rightarrow b = 27$$

$$\text{Luego: } P(x) = 2x + 27$$

$$\Rightarrow P(3) = 2(3) + 27 \therefore P(3) = 33$$

4. Si: $G(x) = x - 1$; $F(x) = x + 1$

$$\text{Determinar: } G\left\{\frac{1}{G\left[F\left(\frac{1}{x}\right)\right]}\right\}$$

Resolución:

$$F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + 1 \Rightarrow G\left[F\left(\frac{1}{x}\right)\right] = \frac{1}{x} + 1 - 1 = \frac{1}{x}$$

$$G\left\{\frac{1}{G\left[F\left(\frac{1}{x}\right)\right]}\right\} = G\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = G(x) = x - 1$$

5. Si: $F(x) = \frac{x^2}{x+1}$ y $F(x) = P[F(x)]$; calcular: $P(64)$

Resolución:

$$F(x) = P[F(x)] \text{ si: } F(x) = a$$

$$\Rightarrow P(a) = a \therefore P(64) = 64$$

6. Calcular m en:

$$F(x) = (3x^m + x^{m-1})^m (mx^2 - x + 3)^3 (x^2 + 192)$$

Sabiendo que el coeficiente principal del producto es igual al término independiente del mismo.

Resolución:

$$F(x) = (x^{m-1})^m (3x + 1)^m (mx^2 - x + 3)^3$$

$$\text{Coeficiente principal} = 3^m(m^3)$$

$$\text{Término independiente} = 3^3(192)$$

$$3^m(m^3) = 3^4(4^3) \Rightarrow m = 4$$

7. Si: $F(x) = x(x - 6) + 9$; calcular:

$$E = \frac{\sqrt[9]{F(x)^{\frac{3}{2}}}}{F(x+3) - F(x-2) - 5}$$

Resolución:

$$F(x) = (x - 3)^2 \Rightarrow F\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 3\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$F(x + 3) = [(x + 3) - 3]^2 = x^2$$

$$F(x - 2) = [(x - 2) - 3]^2 = (x - 5)^2$$

$$E = \frac{\sqrt[9]{(x-3)^2 \cdot \frac{9}{4}}}{x^2 - (x^2 - 10x + 25) - 5} \Rightarrow E = \frac{x-3}{10(x-3)}$$

$$\text{Si: } x \neq 3; E = 1/10$$

8. Sabiendo que: $G(x) = x$
 $G[5P(x) - 4F(x)] = 13x + 18$
 $G[2P(x) + F(x)] = 15$

hallar el valor numérico de: $G[P[F(2)]]$

Resolución:

$$\text{Como: } G(x) = x \Rightarrow G(*) = * \quad \dots (I)$$

De (I):

$$5P(x) - 4F(x) = 13x + 18 \quad \dots (II)$$

$$2P(x) + F(x) = 15 \quad \dots \text{ (III)}$$

$$P(x) = x + 6 \Rightarrow P(-1) = 5$$

$$F(x) = 3 - 2x \Rightarrow F(2) = -1$$

$$\text{Luego: } G[P(F(2))] = G[P(-1)] = G(5) = 5$$

9. Siendo: $S(x) = 2x + 3$
Además: $S[F(x) + G(x)] = 4x + 3$
 $S[F(x) - G(x)] = 7$

$$\text{Hallar: } K = F(G(F(G \dots (F(G(1)) \dots)))$$

Resolución:

$$S[F(x) + G(x)] = 2[F(x) + G(x)] + 3 = 4x + 3$$

$$S[F(x) - G(x)] = 2[F(x) - G(x)] + 3 = 7$$

$$F(x) + G(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x + 1$$

$$F(x) - G(x) = 2 \Rightarrow G(x) = x - 1$$

$$G(1) = 0 \Rightarrow F[G(1)] = F(0) = 1$$

Como termina en la evaluación de F:

$$K = F[G(F(G \dots))] = 1$$

10. Si: $P(x + 4) = 5x - 1$ y $P[F(x) + 3] = 10x + 14$
calcular el valor de $F(4)$

Resolución:

$$P(x + 4) = 5(x + 4) - 21$$

$$\text{Si: } x + 4 = a \Rightarrow P(a) = 5a - 21$$

$$P[F(x) + 3] = 5[F(x) + 3] - 21 = 10x + 14$$

$$\text{Despejando: } F(x) = 2x + 4 \Rightarrow F(4) = 12$$

11. Si: $F(x) = x^2 + 1$ y $H(x) = x^2 - 1$
calcular: $E = H[F(x)] - F[H(x)]$

Resolución:

$$H[F(x)] = H(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 - 1$$

$$= x^4 + 2x^2 + 1 - 1$$

$$F[H(x)] = F(x^2 - 1) = (x^2 - 1)^2 + 1$$

$$= x^4 - 2x^2 + 1 + 1$$

$$\Rightarrow H[F(x)] - F[H(x)] = 4x^2 - 2$$

12. Si: $F(x) = 1 + \frac{2}{x}$; $G(x) = \frac{4}{3-x}$

Calcular un valor de x que verifique la condición:

$$F[G(x)] = 2 - G[F(x)]; \text{ señalar: } x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Resolución:

$$F[G(x)] = F\left(\frac{4}{3-x}\right) = 1 + \frac{2}{\left(\frac{4}{3-x}\right)} = \frac{5-x}{2}$$

$$G[F(x)] = G\left(1 + \frac{2}{x}\right) = \frac{4}{3 - \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{2x}{x-1}$$

Como $F[G(x)] = 2 - G[F(x)]$; tenemos:

$$\frac{5-x}{2} = 2 - \frac{2x}{x-1}$$

$$= \frac{x^2 - 6x + 1}{2(x-1)} = 0 \Rightarrow x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

Si: $x = 3 + 2\sqrt{2}$, tenemos:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 + \frac{1}{(3 + 2\sqrt{2})^2} \times \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2}{(3 - 2\sqrt{2})^2}$$

$$= (3 + 2\sqrt{2})^2 + \frac{(3 - 2\sqrt{2})^2}{(9 - 8)^2} = 2(9 + 8) = 34$$

13. Si: $F(x) = 4x + 5$ y $F[g(x) + 3] = 8x + 5$
Hallar: $g(4)$

Resolución:

$$F[g(x) + 3] = 4[g(x) + 3] + 5 = 8x + 5$$

$$\text{Despejando: } g(x) = 2x - 3 \Rightarrow g(4) = 5$$

14. Hallar el valor numérico de $F(5)$ donde:

$$F(m) = \left[\frac{\sqrt[m]{(m+4)^{m-1}} \sqrt[m]{(m-2)^{m-1}} \sqrt[m]{m+22}}{\sqrt[m]{(m-2)^0} \sqrt[m]{(m+4)}} \right]^{\frac{m}{1-m}}$$

Resolución:

$$F(m) = \left[\frac{(\sqrt[m]{m+4})^{(m-1)} (\sqrt[m]{m-2})^{(m-1)} (\sqrt[m]{m+22})}{m^2 \sqrt[m]{(m+4)}} \right]^{\frac{m}{1-m}}$$

$$F(5) = \left(\frac{5\sqrt[5]{9} \cdot 20\sqrt[5]{3} \cdot 100\sqrt[5]{27}}{25\sqrt[5]{9}} \right)^{-\frac{5}{4}}$$

$$= \left(\frac{3^{\frac{2}{5}} \cdot 3^{\frac{1}{5}} \cdot 3^{\frac{3}{5}}}{3^{\frac{2}{5}}} \right)^{-\frac{5}{4}} = \left(\frac{3^{\frac{48}{100}}}{3^{\frac{8}{100}}} \right)^{-\frac{5}{4}} = 3^{-2}$$

15. Si: $P(x + 2) = x^2 + 4x + 4$
Hallar: $P(x + 4) - P(x - 4)$

Resolución:

$$P(x + 2) = (x + 2)^2$$

$$\text{Si: } x + 2 = a \Rightarrow P(a) = a^2$$

$$\left. \begin{aligned} P(x + 4) &= (x + 4)^2 \\ P(x - 4) &= (x - 4)^2 \end{aligned} \right\} (-)$$

$$P(x + 4) - P(x - 4) = (x + 4)^2 - (x - 4)^2$$

$$= x^2 + 8x + 16 - x^2 + 8x - 16$$

$$P(x + 4) - P(x - 4) = 16x$$

16. Hallar n en el polinomio:

$$P(x - 2) = (3nx - 8n)^2 + (x - 2)^{2n} + 12x - 24$$

Sabiendo que el término independiente de la variable excede en 14 a la suma de coeficientes del polinomio.

Resolución:

$$\text{Si: } x - 2 = y \Rightarrow x = y + 2$$

$$P(y) = [3n(y + 2) - 8n]^2 + y^{2n} + 12(y)$$

$$P(y) = (3ny - 2n)^2 + y^{2n} + 12y$$

$$\text{término independiente} = (-2n)^2 = 4n^2$$

$\Sigma \text{coef. del polinomio} =$

$$[3n(1) - 2n]^2 + (1)^{2n} + 12 = n^2 + 13$$

Por condición:

$$T.I. - \Sigma \text{coef.} = 14 \Rightarrow 4n^2 - (n^2 + 13) = 14$$

$$3n^2 = 3 \times 3^2 \Rightarrow n = 3$$

17. Si: $F(x) = F(x-1) + F(x-2)$
 Además: $F(1) = 3$ y $F(2) = 4$
 calcular el valor de: $F[F(0)]$

Resolución:

Dando valores adecuados a x en la primera relación.

$$\text{Para } x = 2: F(2) = F(1) + F(0) \Rightarrow F(0) = 1$$

$$\text{Se pide: } F[F(0)] = F[F(1)] = F(3)$$

Nuevamente dando un valor adecuado a x en la primera relación:

$$\text{Para } x = 3: F(3) = \frac{F(2)}{4} + \frac{F(1)}{3} \quad \therefore F(3) = 7$$

18. Señalar el valor de: $x(11)$ sabiendo que:
 $x(2a-1) = x(2a+1) - a + 1$; además: $x(3) = 1$

Resolución:

$$\text{Si: } 2a - 1 = 3 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{en la expresión: } x(3) = x(5) - 2 + 1 \Rightarrow x(5) = 2$$

$$\text{Si: } 2a - 1 = 5 \Rightarrow a = 3; \text{ en la expresión:}$$

$$x(5) = x(7) - 3 + 1 \Rightarrow x(7) = 4$$

$$\text{Si: } 2a - 1 = 7 \Rightarrow a = 4; \text{ en la expresión:}$$

$$x(7) = x(9) - 4 + 1 \Rightarrow x(9) = 7$$

$$\text{Si: } 2a - 1 = 9 \Rightarrow a = 5; \text{ en la expresión:}$$

$$x(9) = x(11) - 5 + 1 \quad \therefore x(11) = 11$$

19. Si: $F(x) = \frac{2x-1}{x-2}$; además: $F[F(x)] = 2$

$$\text{Hallar el valor de: } E = x + \sqrt[3]{(x+7)^{(x+4)}}$$

Resolución:

$$2 = F[F(x)] = F\left(\frac{2x-1}{x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{2x-1}{x-2}\right) - 1}{\frac{2x-1}{x-2} - 2} = \frac{4x-2-x+2}{2x-1-2x+4} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{3x}{3} = 2 \Rightarrow x = 2 \quad \therefore E = \sqrt[3]{9^5} = 9^2 = 81$$

20. Dado el polinomio:

$$P(x-1) = (2x-3)^{2n} + (3x-2)^{2n} - 32(x-2)$$

Hallar n tal que el término independiente del polinomio sea igual al doble de la suma de coeficientes del mismo.

Resolución:

$$\text{Del enunciado: } T_1 = 2 \sum \text{coef.}$$

$$\text{Es decir: } P(0) = 2P(1) \quad \dots (*)$$

$$\text{En el polinomio para } x = 1:$$

$$P(0) = (-1)^{2n} + 1^{2n} - 32(-1) = 34$$

$$\text{Para } x = 2: P(1) = (1)^{2n} + (4)^{2n} + 32(0) = 1 + 4^{2n}$$

$$P(0) \text{ y } P(1) \text{ en } (*):$$

$$34 = 2[1 + 4^{2n}] \Rightarrow 34 = 2 + 2 \cdot 4^n$$

$$32 = 2^{2n+1} = 2^5 = 2^{2n+1}$$

$$\Rightarrow 5 = 2n + 1$$

$$\therefore n = 2$$

21. Si consideramos a los siguientes polinomios:

$$P(x) \equiv 3x - 10 \quad \dots (I)$$

$$P[F(x)] \equiv 6x + 5 \quad \dots (II)$$

Hallar $F(8)$.

Resolución:

En (I) hagamos: $x = F(x)$: $P[F(x)] \equiv 3F(x) - 10$; como $P[F(x)] \equiv 6x + 5$; luego se tendrá $6x + 5 = 3F(x) - 10$

$\Rightarrow 6x + 15 = 3F(x)$, es decir: $F(x) = 2x + 5$.
 Finalmente, para calcular $F(8)$, hagamos $x = 8$ en $F(x) \Rightarrow F(8) = 2(8) + 5 \quad \therefore F(8) \equiv 21$

22. Si: $P(x) = \frac{3x+4}{2x-3}$; encontrar el equivalente de: $P[P(x)]$.

Resolución:

Para encontrar: $P[P(x)]$ debemos reemplazar x por:

$$P(x) \text{ en la condición } P[P(x)] = \frac{3P(x)+4}{2P(x)-3}; \text{ como:}$$

$$P(x) = \frac{3x+4}{2x-3} \text{ luego se tendrá:}$$

$$P[P(x)] = \frac{3\left(\frac{3x+4}{2x-3}\right) + 4}{2\left(\frac{3x+4}{2x-3}\right) - 3};$$

Finalmente efectuando operaciones se consigue:

$$\therefore P[P(x)] = x$$

23. Si: $P[P(P(x))] = 27x + 52$, calcular el valor de: $P(-2)$.

Resolución:

Para resolver este problema se tendrá en cuenta que el polinomio $P(x)$ que ha dado origen a $P[P(P(x))]$ es de 1.º grado, pues $P[P(P(x))]$ también lo es, luego nos planteamos un problema general.

Si: $P(x) = ax + b$; $a \neq 0$. Hallar el equivalente de:

$$\underbrace{P[P(P(x)) \dots P(x)]}_{n \text{ veces}};$$

Dicho problema lo resolveremos por un método inductivo:

- Hallemos $P[P(x)]$ a partir del dato:

$$P[P(x)] \equiv aP(x) + b$$

$$P[P(x)] = a(ax+b) + b \Rightarrow P[P(x)] = a^2x + b(a+1) \quad \dots (I)$$

- Hallemos: $P[P(P(x))]$ a partir de (I):

$$P[P(P(x))] \equiv a^2P(x) + b(a+1)$$

$$P[P(P(x))] = a^2(ax+b) + b(a+1)$$

$$\Rightarrow P[P(P(x))] = a^3x + b(a^2+a+1) \quad \dots (II)$$

- Hallemos: $P[P(P(P(x)))]$ a partir de (II).

$$P[P(P(P(x)))] = a^3P(x) + b(a^2+a+1)$$

$$\Rightarrow P[P(P(P(x)))] = a^4x + b(a^3+a^2+a+1)$$

$$P[P(P(P(x)))] = a^4x + b(a^3+a^2+a+1) \quad \dots (III)$$

De acuerdo a la forma que presenta (I), (II) $\wedge$ (III) deducimos:

$$\underbrace{P[P(P(x)) \dots P(x)]}_{n \text{ veces}} = a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1);$$

es decir:

Propiedades

$$\underbrace{P[P \dots [P(x)] \dots]}_{n \text{ veces}} = a^n x + b \left(\frac{a^n - 1}{a - 1} \right)$$

Ahora en el problema: $P(x) = ax + b$... (I)
Por dato: $P[P(x)] = 27x + 52$; según la propiedad planteamos:

$$a^2 x + b \left(\frac{a^2 - 1}{a - 1} \right) = 27x + 52.$$

De la identidad: $a^2 = 27 \wedge b \left(\frac{a^2 - 1}{a - 1} \right) = 52$

Con lo cual conseguimos: $a = 3 \wedge b = 4$; luego en (I) se obtiene: $P(x) = 3x + 4$, finalmente tenemos $P(-2) = 3(-2) + 4 \therefore P(-2) = -2$

24. Calcular el valor de n si dado $P(x) = nx + 3$, se verifica: $P(x) + P(2x) + P(3x) = 30x + m$.

Resolución:

Observar que: $P(2x) = n(2x) + 3 = 2nx + 3$;
 $P(3x) = n(3x) + 3 = 3nx + 3$.

Por condición:

$(nx + 3) + (2nx + 3) + (3nx + 3) = 30x + m$; es decir:
 $6nx + 9 = 30x + m$; de la identidad: $6n = 30$
 $\therefore n = 5$

25. Sea: $F(x) = \sqrt{x^2 + 2F(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$, tal que: $F(x) > 2$, calcular el valor numérico de: $2000 - F(\sqrt{1999^2 - 1})$

Resolución:

Como: $F(x) > 2$, podemos elevar al cuadrado a ambos miembros de la identidad mostrada:

$$[F(x)]^2 = x^2 + 2F(x), \text{ dando forma: } [F(x)]^2 - 2[F(x)] = x^2$$

$$[F(x)]^2 - 2[F(x)] + 1 = x^2 + 1 \Rightarrow [F(x) - 1]^2 = x^2 + 1.$$

Es decir: $F(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 1$... (I)

Ahora reemplazando: $x = \sqrt{1999^2 - 1}$ en (I) se consigue:

$$F(\sqrt{1999^2 - 1}) = \sqrt{[\sqrt{1999^2 - 1}]^2 + 1} + 1 = 2000.$$

Finalmente el valor pedido será: $2000 - 2000 = 0$

$$\therefore VN = 0$$

26. Si: $F(x) = x + 2$; $H(x) = x - 2$. Proporcionar el equivalente de: $F[H(x)] + H[F(x)]$.

Resolución:

• Para encontrar $F[H(x)]$ se deberá reemplazar x por $H(x)$ en $F(x)$:

$$F[H(x)] = H(x) + 2; \text{ pero: } H(x) = x - 2, \text{ luego } F[H(x)] = x - 2 + 2 = x \quad \dots (I)$$

• Para encontrar $H[F(x)]$ se deberá reemplazar x por $F(x)$ en $H(x)$:

$$H[F(x)] = F(x) - 2; \text{ pero } F(x) = x + 2, \text{ luego } H[F(x)] = x + 2 - 2 = x \quad \dots (II)$$

Finalmente de sumando (I) y (II) se obtiene lo pedido:

$$\therefore F[H(x)] + H[F(x)] = 2x$$

27. Si: $x F(x) + 16 = 4 F(x) + x^2$; encontrar: $F(x - 4)$.

Resolución:

Efectuando transposición de términos en la condición tenemos: $x F(x) - 4 F(x) = x^2 - 16$

$$\Rightarrow (x - 4) F(x) = x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4)$$

De donde: $F(x) = x + 4 \quad \dots (I)$

Como se pide: $F(x - 4)$; debemos reemplazar en (I) x por $(x - 4)$ así:

$$F(x - 4) = (x - 4) + 4 \therefore F(x - 4) = x$$

28. Sabiendo que:

$$\phi(x + 5) = 2x - 1 \quad \text{y} \quad \phi(\psi(x) + 1) = 4x + 3$$

Calcular: $\psi[\phi(7)]$

Resolución:

Si: $\phi(x + 5) = 2x - 1 \Rightarrow \phi(7) = 3$

Luego, se busca $\psi(3)$:

De: $\phi(x + 5) = 2x - 1 = 2(x + 5) - 11$

Cambiando $x + 5$ por $\psi(x) + 1$:

$$\phi(\psi(x) + 1) = 2(\psi(x) + 1) - 11$$

Por dato: $2(\psi(x) + 1) - 11 = 4x + 3$

De donde: $\psi(x) = 2x + 6 \therefore \psi(3) = 12$

29. Se sabe que un polinomio $P(x)$ es tal que es de 3.º grado, $P(1) = P(-2)$, $P(0,5) = 2P(1/2)$, $P(2) = 12$, $P(0) = 2$. ¿Cuál es el coeficiente del término lineal del polinomio?

Resolución:

$P(x)$ es de tercer grado,

como: $P(1/2) = 0 \Rightarrow 1/2$ es raíz.

Luego: $P(x) = (2x - 1)(ax^2 + bx + c)$,

como $P(0) = 2 \Rightarrow$ término independiente = 2

Luego: $P(x) = (2x - 1)(ax^2 + bx - 2)$

$P(1) = P(-2)$: $a + b + c = -5(4a - 2b - 2)$

$$\Rightarrow 7a - 3b = 4 \quad \dots (I)$$

$P(2) = 12$: $3(4a + 2b - 2) = 12$

$$4a + 2b = 6 \quad \dots (II)$$

de (I) y (II): $a = b = 1$

$$\Rightarrow P(x) = (2x - 1)(x^2 + x - 2)$$

$$\Rightarrow P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2$$

$\therefore$ Coeficiente del término lineal = -5

30. Sea $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ un polinomio de grado n . Definimos un operador sobre los polinomios mediante $D[a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n] = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + na_n x^{n-1}$.

Determinar el polinomio $P(x)$ tal que

$D[P(x)] = 3x^2 + 2x^3$. Dar la suma de sus coeficientes como respuesta.

Resolución:

Por dato: $D[P(x)] = 3x^2 + 2x^3$;

Según el operador: $D[P(x)] = 3x^{3-1} + \frac{4}{2}x^{4-1}$

Luego se concluye: $P(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^4 + a_0$

Nos piden: $\Sigma \text{coef}[P] = P(1) = a_0 + \frac{3}{2}$

Observar que el operador D aplicado al polinomio representa a la primera derivada del polinomio.


PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 1970)

¿Cuál es el valor numérico de la expresión:

$(2 - x - x^2)^{1-x}$, para $x = -2$?

- A) -0,25 B) -54 C) 2
D) 0 E) 512

Resolución:

Reemplazando el valor de x en la expresión dada, se tendrá:

$$[2 - (-2) - (-2)^2]^{1-(-2)} = [2 + 2 - 4]^3 = 0$$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 1971)

Encontrar el valor numérico de:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} - \frac{bc}{a} - \frac{ac}{b} - \frac{ab}{c} + a^2 - b^2 - c^2$$

Para: $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{3}$; $c = \frac{1}{4}$

- A) $7\frac{11}{144}$ B) $7\frac{1}{12}$ C) $9\frac{5}{144}$
D) $9\frac{8}{27}$ E) $8\frac{5}{72}$

Resolución:

Reemplazando los valores dados en la expresión dada:

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{\frac{1}{4}}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$S = \frac{12}{2} + \frac{8}{3} + \frac{6}{4} - \frac{2}{12} - \frac{3}{8} - \frac{4}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$$

$$S = 9 + \frac{5}{144}; S = 9\frac{5}{144}$$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 1978)

En el siguiente polinomio: $P_2(x) = ax^2 + bx + c$

Se sabe que: $P_{(1)} = P_{(3)} = 0$ y $P_{(2)} = 2$

Calcular: $(a - b + c)$

- A) -4 B) -8 C) -12
D) -16 E) -20

Resolución:

Por dato: $P_{(1)} = a + b + c = 0$

$$P_{(3)} = 9a + 3b + c = 0$$

$$P_{(2)} = 4a + 2b + c = 2$$

Resolviendo el sistema: $a = -2$; $b = 8$; $c = -6$

Se pide: $a - b + c = -16$

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 1983 - II)

El polinomio: $P_{(x)} = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ es tal que:

$$P_{(0)} = 0, P_{(-1)} = 6 \text{ y } P_{(x)} = P_{(1-x)}$$

Calcular: $(2c - b)$

- A) 2a B) 3 - a C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

Como: $P_{(0)} = 0 \Rightarrow e = 0$

Además: $P_{(x)} = P_{(1-x)}$

$$P_{(0)} = P_{(1)} = 0 \Rightarrow a + b + c + d = 0 \quad \dots(I)$$

$$P_{(-1)} = 6 \Rightarrow a - b + c - d = 6 \quad \dots(II)$$

$$P_{(-1)} = P_{(2)} = 6 \Rightarrow 16a + 8b + 4c + 2d = 6 \quad \dots(III)$$

$$8a + 4b + 2c + d = 3 \quad \dots(IV)$$

$$(1) + (2): a + c = 3 \Rightarrow a = 3 - c \quad \dots(V)$$

$$(1) - (2): b + d = -3 \Rightarrow d = -3 - b \quad \dots(VI)$$

(IV) y (V) en (III):

$$8(3 - c) + 4b + 2c - 3 - b = 3$$

$$-6c + 3b = -18 \quad \therefore 2c - b = 6$$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

El valor numérico de:

$$P(x) = x^5 + (3 - 3\sqrt{3})x^4 - 9\sqrt{3}x^3 + 5x + 7\sqrt{3}$$

Para: $x = 3\sqrt{3}$ es:

- A) $20\sqrt{3}$ B) $22\sqrt{3}$ C) $24\sqrt{3}$
D) $26\sqrt{3}$ E) $28\sqrt{3}$

Resolución:

Por Ruffini:

$$x = 3\sqrt{3} \begin{array}{c|ccc|c} 1 & (3 - 3\sqrt{3}) & -9\sqrt{3} & 0 & 5 & 7\sqrt{3} \\ & 3 & 9 & 0 & 0 & 15\sqrt{3} \\ \hline & 1 & 3 & 0 & 5 & 22\sqrt{3} \end{array}$$

$$R = P_{(3\sqrt{3})} = 22\sqrt{3}$$

Clave: B



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Se define:

$$P(\alpha \cdot \beta) = \frac{P(\alpha)}{P(\beta)}; \alpha > \beta,$$

Además $P(x) \neq 0, \forall x$, calcular: $P(6) \times P(2) - P(3) \times P(1)$

- A) 6 B) 2 C) 3
D) 1 E) 0

2. Dado los polinomios:

$$H(x+1) = 4x - 5$$

$$F(-x) = x + 1;$$

$$P(x) = H(x) + F(x)$$

determinar: $P(x) + H(1) \times F(-1)$

- A) $3x - 18$ B) $3x$ C) $3x + 10$
D) $3x - 8$ E) $3x + 18$

3. Si
- $H(x) = (x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+n)$

 $n \in \mathbb{N} \wedge n > 30$; calcular $\sum_{i=1}^{10} H(-i)$

- A) 1 B) 2 C) 10
D) 0 E) mayor que 50

4. Si:
- $[F(x)]^2 \times F\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^3$
- ; calcular:
- $F(3)$

- A) -6 B) 5 C) 2
D) 3 E) -1

5. Si se cumple:

$$P(x-1) + P(2) = P(x) + P(1-x) + (5x-4)P(x+1) + 6x^4$$

Calcular la suma de coeficientes de $P(x+8)$

- A) -6 B) 6 C) 2
D) 14 E) -2

6. Si:
- $P(x) = \pi$
- ;
- $f(x) = 0$
- ; calcular:
- $\sum_{i=1}^{10} (P(i) + f(i))$

- A) π B) 10π C) 0
D) $10 + \pi$ E) 55π

7. Si:
- $P(x) = \frac{3x+4}{2x-3}$
- ; encontrar el equivalente de
- $P[P(x)]$

- A) x^2 B) x C) 0
D) x^{-1} E) $2x$

8. Si:
- $a(x+1)^2 + b(x-1)^2 = 9x^2 + 10x + c$

Hallar: abc

- A) 42 B) 48 C) 126
D) 224 E) 36

9. Si
- $H(H(x)) = 4x + 1$
- , calcular el mayor valor de
- $H\left(\frac{7}{3}\right)$

- A) $\frac{17}{3}$ B) 5 C) -5
D) 0 E) 7

10. Del siguiente polinomio:

$$P(x+3) = ax^2 + bx + 2$$

Se cumple que: suma de coeficiente es igual al término independiente. Calcular $\frac{b}{a}$.

- A) $\frac{9}{4}$ B) $\frac{4}{9}$ C) 5
D) $\frac{1}{5}$ E) 9

11. Si se cumple
- $P(2x) = P(x+3)$
- ; calcular
- $P(2) \div P(5)$

- A) 2 B) 1 C) -1
D) -2 E) Faltan datos

12. Si:
- $P(x+5) = \underbrace{(x+3)^{19} + (x+1)^{19} + (x-1)^{19} + \dots}_{20 \text{ sumandos}}$

Calcular $P(21)$

- A) 0 B) 19^2 C) 19^3
D) 19^4 E) 19^5

13. Si el polinomio:

$$P(x) = (n-16)x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \dots + (n+1)$$

es mónico; calcular la suma del término independiente con la suma de coeficientes.

- A) 171 B) 172 C) 188
D) 189 E) 177

14. Si:
- $5f(x) = x + 2 + \frac{f(x)}{3}$
- , calcular
- $f\left(\frac{64}{3}\right)$

- A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\frac{7}{4}$
D) 1 E) 7

15. Si:
- $p(x) = \frac{\sqrt{5}x + \sqrt{7}}{\sqrt{11}x - \sqrt{5}}$
- ;
- $x \neq \frac{\sqrt{55}}{11}$

Indicar el valor de: $P[P[P[P[P(2003)]]]]$

- A) 2003 B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{11}$
D) $\sqrt{5}$ E) 1000

16. Si:
- $f(2x+1) = x$
- , calcular

$$E = 2f(x) - f(2x)$$

- A) 4 B) $\frac{1}{4}$ C) 1
D) $-\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2}$

17. Si se cumple que:
- $P(x) = Q\left(2 + \frac{1}{x}\right)$

y además $Q(x) = 2x + 7$; calcular: $E = P(2)$

- A) 4 B) 8 C) 12
D) 10 E) 11

18. Calcular:
- $G[F(1)]$

$$\text{si: } F(x) + G(x) = 5x - 8$$

$$F(x) - G(x) = 7x + 6$$

- A) 5 B) 12 C) -12
D) 7 E) 6

19. Si: $P(x+2) = 6(x+1) - 5$
además: $P(f(x)) = 12x - 17$
hallar: $f(10)$
A) 12 B) 19 C) 20
D) 10 E) 13
20. Sea $P(x) = Q(x)$ tal que $P(x) = 3(x+a) - b(x-2)$
 $Q(x) = 2bx + 11$, calcular: $a + b$
A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 0
21. Calcular a en el polinomio: $P(x) = 2x + 1$
si: $P(P(a)) = 5$
A) 1 B) $1/2$ C) $1/3$
D) $1/5$ E) 2
22. Sabiendo que: $F(x) = \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{3}}{\sqrt{5}x - \sqrt{2}}$
Obtener: $F[F(x)]$
A) $2x$ B) $\frac{x}{3}$ C) $5x$
D) $\frac{x}{5}$ E) x
23. Si se cumple que:
 $F(x) = \frac{x+1}{x-1}$; $F[G(x)] = \frac{x}{x-2}$
Dar el valor de $G(x)$.
A) x B) $x+1$ C) $x-1$
D) $2x-1$ E) $2x$
24. Si: $F(x-2) = 2x^2 - x - 1$, calcular $F(1) + F(-1)$
A) 15 B) 16 C) 14
D) 13 E) 12
25. Si: $F(x^3 + 1) = x^2 + x - 12$, calcular: $F(9) + F(28)$
A) -6 B) 6 C) 0
D) 12 E) -12
26. Si: $F(x) = \begin{cases} x^2 + 1; & x \leq 1 \\ \sqrt{x} + 1; & x > 1 \end{cases}$
Calcular: $F(-3) + F(4)$
A) 15 B) 9 C) 11
D) 13 E) 12
27. Si: $P(x) = x^2 + 3x - 10$, hallar: $P(x+3)$
A) $x^2 + 10x + 8$ B) $x^2 + 9x + 8$
C) $x^2 + 9x$ D) $x^2 + 8$
E) x^2
28. Si: $P(x^3 - \sqrt{x}) = 5(x^3 - \sqrt{x})^2 + 2(x^3 - \sqrt{x} + 1) - 2$
hallar: $P(-2) + P(0)$
A) 14 B) 16 C) 12
D) 18 E) 20
29. Si la suma de coeficientes de: $P(x) = (x^2 - nx - 1)^2$,
es igual al término independiente de:
 $Q(x) = (x^3 - 2x + 2)^3 + 9$; hallar n .
A) 5 B) 6 C) 4 D) 2 E) 8
30. Si: $F(x+3) = x^2 + 2x - 15$, hallar: $F(x+5)$
A) $x^2 + 6x - 7$ B) $x^2 + 6x$ C) $x^2 - 7$
D) $x^2 + 5x + 7$ E) $x^2 + 9$
31. Si: $P(x+1) = x^2 - 3x - 28$, hallar: $P(3x-1)$
A) $3x^2 - 21x$ B) $9x^2 - 18$
C) $9x^2 - 21x - 18$ D) $9x^2 + 21x + 18$
E) $3x^2 - 7x - 9$
32. Si: $P(x) = 3x + 4 \wedge P(Q(y)) = 6y + 7$, hallar: $Q(3)$
A) 9 B) 7 C) 11
D) 5 E) 13
33. Si: $F(x) = ax + b$; $F(1) = 4 \wedge F(-1) = 6$, hallar:
 $F(F(5))$
A) 0 B) 5 C) -5
D) 10 E) -10
34. Si: $F(x) = (x-1)^2 + a$, hallar: $\frac{F(x) - F(x+2)}{x}$; $x \neq 0$
A) 4 B) -4 C) 2
D) -2 E) 1
35. Si: $x, y \in \mathbb{Z}^+$; se cumple:
 $F(x+y) = F(x) + F(y) \wedge F(1) = 6$, hallar: $F(3)$
A) 1 B) 12 C) 18
D) 16 E) 6
36. Dar el valor de:
 $\frac{1}{101} [P(\sqrt{2}) + P(\sqrt{3}) + P(\sqrt{4}) + \dots + P(\sqrt{102})]$
sabiendo que: $P\left(x - \frac{1}{x}\right) = x^2 - \frac{1}{x^2}$
A) 50 B) 52 C) 53
D) 54 E) 60
37. Si: $[F(x)]^2 F\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \left(\frac{x}{3}\right)^3$
calcular el valor de $F(3)$
A) 2 B) 5 C) -6
D) 3 E) -1
38. Si: $P\left[\frac{\sqrt{3}x-1}{\sqrt{3}x+1}\right] = \sqrt{3}x$.
Calcular: $E = \frac{P(2)P(4)P(6)\dots P(98)P(100)}{P(3)P(5)P(7)\dots P(97)P(99)}$
A) 2,01 B) 2,02 C) 2,03
D) $\sqrt{3}$ E) 2
39. Sea: F una función tal que: $F: \mathbb{N}^+ \Rightarrow \mathbb{N}^+$; cumple:
I. $F(2) = 0$
II. $F(ab) = F(a) + F(b)$
III. $F(n) = 0$; si la última cifra de n es 3

Calcular: $F(1994)$

- A) 1994 B) 0 C) 1993
D) 1992 E) $(1994)^2$

40. Si: $F(x) = ax + b$ y $F(2) = 11$; $F(-2) = -5$; hallar el valor de $F(3)$

- A) 13 B) 12 C) 15
D) 16 E) 18

41. Si: $P(x - 2) = x^2 - 4x + 4$, hallar:

$$E = \sqrt{P(3) - P(4)}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

42. Siendo $P(x)$ y $F(x)$ dos polinomios los cuales satisfacen:

$$P(4x + 1) + 3x = 7 + F(x + 3)$$

$$F(5x + 1) - 13 = x^2 - P(2x + 11)$$

Calcular: $\sqrt[3]{F(P(13))}$

- A) 4 B) 2 C) 6
D) 7 E) 9

43. Dado: $P(x - 1) = ax^5 - bx^3 + cx - 6$
calcular el valor de $P(2)$; sabiendo que $P(-4) = 7$

- A) -11 B) 10 C) -17
D) 15 E) -19

44. Si: $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$
calcular: $P(-2) + P(2) + P(-3) + P(3)$

- A) 10 B) 0 C) 8
D) -10 E) -8

45. Si: $P(x) = x^2 + 2x + 1$; $Q(x) = x^2 - 2x + 1$; calcular:
 $P(3) + Q(-3)$

- A) 32 B) 0 C) 16
D) 64 E) 12

46. Si: $F(x + 3) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$; calcular: $F(4) + F(-2)$

- A) -12 B) -20 C) -54
D) -56 E) -43

CLAVES

1. E	7. B	13. D	19. B	25. A	31. C	37. C	43. E
2. A	8. C	14. A	20. B	26. D	32. B	38. A	44. B
3. D	9. B	15. A	21. B	27. B	33. B	39. B	45. A
4. A	10. C	16. D	22. E	28. B	34. B	40. C	46. D
5. A	11. B	17. C	23. C	29. C	35. C	41. E	
6. B	12. A	18. C	24. C	30. A	36. A	42. B	

Grados

05

capítulo

Simon Stevin (1548-1620) también conocido como Simón de Brujas o Stevinus (forma latinizada de su nombre) fue un matemático, ingeniero militar e hidráulico, constructor de molino y fortificaciones, semiólogo, contable e intendente neerlandés. Se le considera el padre de los números negativos por ser el primer matemático que los aceptó como resultado de las ecuaciones algebraicas.

Se conoce muy poco sobre su vida privada, incluso la fecha exacta de su nacimiento y la fecha y lugar de su muerte son desconocidas. Se sabe que fue criado en la fe calvinista y que al morir en 1620 dejó esposa y dos hijos, se ha supuesto que no llevaba excesivo tiempo casado con ella dada la juventud de estos.



Bélgica, 1548 - Holanda, 1620

Simon Stevin

A sus 37 años, publicó *La aritmética de Simón Stevin, de Brujas*, breve tratado sobre las fracciones decimales. En él, Stevin exponía con suma claridad el empleo de fracciones decimales para la extracción de la raíz cuadrada de un número. También introdujo una nueva notación para describir los números decimales, de escaso éxito dada su complejidad frente a otras más compactas. Otra gran aportación de Stevin fue la de la noción de número, pues hasta entonces los matemáticos desconocían que el número implicaba la unidad, pertenecientes a una misma naturaleza y, por tanto, divisibles. Destacó, además, por ser el primer matemático que reconoció la validez del número negativo.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Es una característica atribuida a los exponentes de las variables; esto significa de que el grado es un número natural.

CLASES DE GRADOS

Grado relativo (GR)

Está referido a una sola variable y se calcula de la siguiente manera:

En un monomio: el grado relativo de una variable es el exponente de dicha variable.

Ejemplo:

$$M(a; x; y) = 3^2 a^7 b^8 x^5 y^{11} z^2 \Rightarrow GR(a) = 7 \wedge GR(x) = 5$$

En un polinomio: el grado relativo de una variable es el mayor exponente que presenta dicha variable en uno de los términos del polinomio.

Ejemplo:

$$P(x; y; z) = 3x^7 y^9 z^{10} - \sqrt{2} x^{13} y^5 z^7 + \frac{3}{2} x^{11} y^7 z^9$$

$$\Rightarrow GR(x) = 13; GR(y) = 9; GR(z) = 10$$

Grado absoluto (GA)

Está referido al conjunto de todas las variables; y se calcula así:

En un monomio: el grado absoluto es la suma de los exponentes de las variables.

Ejemplo:

$$\text{Sea el monomio: } M(x; y; z) = a^5 x^8 y^5 z^4$$

$$\text{Entonces: } GA(M) = 8 + 5 + 4 = 17$$

Observaciones

$$GA(M) = GR(x) + GR(y) + GR(z)$$

En un polinomio: el grado absoluto es la mayor suma de exponentes de variables obtenida en uno de sus términos.

Ejemplo: Sea el polinomio:

$$R(x; y; z) = \sqrt{3} \overbrace{x^5 y^8 x^{11}}^{25} - \overbrace{7x^{14} y^4 z^8}^{26} + 11 \overbrace{x^7 y^{10} z^7}^{24}$$

$$GA(R) = 26$$

Ejemplos:

1. Si: $GA(P) \approx 11$

$$GR(x) - GR(y) = 5; P(x; y) = 4^3 x^{n+3} y^{m-2} z^{mn}$$

Hallar: mn

Resolución:

$$n + 3 + m - 2 = 11 \Rightarrow m + n = 10 \dots (I)$$

$$n + 3 - m + 2 = 5 \Rightarrow m = n \dots (II)$$

$$\text{de (I) y (II): } m = n = 5 \quad \therefore mn = 25$$

2. Hallar "n" si la expresión:

$$M(x) = 2^3 a^5 \sqrt[3]{x^n} \sqrt[4]{x^{2n}} \sqrt[5]{x^{3n}} \text{ es de grado 22.}$$

Resolución:

Simplificando la expresión se tendrá:

$$M(x) = 2^3 a^5 (\sqrt[60]{x^{33n}}) = 2^3 a^5 x^{\frac{33n}{60}}$$

$$\text{Luego, por condición: } \frac{33}{60} n = 22 \quad \therefore n = 40$$

3. Hallar la suma de los coeficientes del trinomio homogéneo:

$$P(x; y; z) = (m + n)x^m + (m^2 - n^2)y^n - (m + n)z^{m-n}$$

Resolución

Por concepto de polinomio homogéneo:

$$m^n \approx n^m = m^{m-n}$$

$$m^n \approx m^{m-n} \Rightarrow 2n = m$$

$$m^n \approx n^m \Rightarrow (2n)^{(n)} = n^{2n}$$

$$\text{De donde: } n = 2 \Rightarrow m = 4$$

Suma de coeficientes:

$$m + n + m^2 - n^2 - (m + n) = m^2 - n^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

4. Calcular "n" en la siguiente expresión:

$$M = xyz + 2x^2 y^2 z^2 + 3x^3 y^3 z^3 + nx^n y^{2n} z^{3n}$$

$$\text{Si: } GA(M) = 12$$

Resolución:

Observamos que el polinomio está ordenado y el GA está expresado por su término de mayor grado, luego la única posibilidad es:

$$n + 2n + 3n = 12 \quad \therefore n = 2$$

5. Hallar $m + n$, si el polinomio:

$$P(x; y) = 5x^{3m+2n+1} y^{m-n+3} + \sqrt{2} x^{3m+2n+2} y^{m-n+5} + 7x^{3m+2n-1} y^{m-n+6}$$

es de $GA(P) = 41$ y además el $GR(x)$ es al $GR(y)$ como 5 es a 2.

Resolución:

De los datos:

$$\bullet \quad GA(P) = 41 \Rightarrow 4m + n + 7 = 41$$

$$4m + n = 34 \quad \dots (1)$$

$$\bullet \quad \frac{GR(x)}{GR(y)} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{3m+2n+2}{m-n+6} = \frac{5}{2}$$

$$m + 9n = 26 \quad \dots (2)$$

$$4(2) - (1): n = 2 \wedge m = 8 \quad \therefore m + n = 10$$

6. Si el término independiente y el coeficiente principal del polinomio:

$$P(x) = (x^2 - 3x + 5)(6x^n - x + n)(2x^4 + x^2 + n + 1) \\ (10x^{n-1} - 5x^n - 1); (n > 1)$$

son iguales. Hallar el grado de $P(x)$.

Resolución:

Por dato: coef. princ. $(P) = T(P)$

$$\text{Del polinomio: } (1)(6)(2)(-5) = (5)(n)(n+1)(-1)$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 3 \times 4 \Rightarrow n = 3$$

$$\text{Se pide: } GA(P) = 2 + 3 + 4 + 3$$

$$\therefore GA(P) = 12$$

Observaciones

Grado de multiplicación de polinomios

Sea: $P = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_n$

Donde:

$GA(P_1) = a_1$; $GA(P_2) = a_2$; $GA(P_3) = a_3$; ...;

$GA(P_n) = a_n$.

Entonces: $GA(P) = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

7. Dado: $\frac{x^{2a-1}y^{2b-1}}{y^{1+2a}x^{2b-a}}$; es de: $GR(x) = 19 \wedge GR(y) = 22$

calcular: $b + 2a$

Resolución:

Dato: $GR(x) = 19 \Rightarrow 2a - 1 - (2b - a) = 19$

$2a - 1 - 2b + a = 19 \Rightarrow 3a - 2b = 20 \quad \dots(I)$

También: $GR(y) = 22$

$2b - 1 - (1 + 2a) = 22$

$2b - 1 - 1 - 2a = 22 \Rightarrow 2a - 2b = -24 \quad \dots(II)$

De (I) - (II), se tiene: $a = 44$

En (II): $2(44) - 2b = -24 \Rightarrow b = 56$

Se pide: $b + 2a = 56 + 2(44) = 144$

8. Sean 2 polinomios: $P(x)$; $Q(x)$ donde se tiene que $[GA(P) > GA(Q)]$

Si el grado de: $\frac{(P+Q)^3}{Q}$ es 12, y el grado de $\sqrt[4]{PQ}$ es 2, determinar: $GA(P)$.

Resolución:

El grado de $\frac{(P+Q)^3}{Q}$ es 12

Sea: $GA(P) = a \wedge GA(Q) = b$

Como: $GA(P) > GA(Q) \Rightarrow 3a - b = 12 \quad \dots(I)$

Como el grado de $\sqrt[4]{PQ}$ es 2

$\Rightarrow \frac{a+b}{4} = 2 \Rightarrow a + b = 8 \quad \dots(II)$

De (I) y (II): $a = 5 \wedge b = 3 \therefore GA(P) = 5$

Observaciones

Sea P un polinomio, $GA(P) = a$

Entonces: $GA[(P)^n] = an$

9. ¿Cuántos términos posee el polinomio homogéneo: $P(x; y) = x^n + x^{n-3}y^3 + x^{n-6}y^6 + \dots$ para que sea de grado 45 con respecto a y ?

Resolución:

Como es homogéneo el último término es de la forma: $x^{n-45}y^{45}$

Luego, el número de términos podría observarse en el polinomio:

$$x^n + x^{n-3}y^{3(1)} + x^{n-6}y^{3(2)} + \dots + x^{n-45}y^{3(15)}$$

De donde se puede apreciar que el número de términos será: $15 + 1 = 16$

10. Hallar el grado de:

$$P(x) = \underbrace{(x^{11} + 1)(x^{19} + 2)(x^{29} + 3)(x^{41} + 4) \dots}_{12 \text{ factores}}$$

Resolución:

$P_1(x) = x^{11} + 1$; $P_2(x) = x^{19} + 2$; $P_3(x) = x^{29} + 3$;

$P_4(x) = x^{41} + 4$; ...; $P_{12}(x) = x^a + 12$

$\Rightarrow GA(P_1) = 11$; $GA(P_2) = 19$; $GA(P_3) = 29$;

$GA(P_4) = 41$; ...; $GA(P_{12}) = a_{12}$

Vemos la sucesión:

$$\left. \begin{array}{cccccc} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 & \\ 11; & 19; & 29; & 41; & \dots; & a \\ +8 & +10 & +12 & & & \\ +2 & +2 & & & & \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{por sucesiones:} \\ \Rightarrow t_n = 7n^2 - 13n + 17 \end{array}$$

Luego:

$GA(P) = 11 + 19 + 29 + 41 + \dots + a$

$GA(P) = [7(1)^2 - 13(1) + 17] + [7(2)^2 - 13(2) + 17] + \dots + [7(12)^2 - 13(12) + 17]$

$GA(P) = 7(1^2 + 2^2 + \dots + 12^2) - 13(1 + 2 + \dots + 12) + 17 \times 12 = 3740$

11. Hallar el grado absoluto del monomio:

$$M(x; y) = \left[\frac{n-1}{7} \sqrt[7]{\frac{xy}{xy}} \right]^n \left[\frac{m-n}{3} \sqrt[3]{\frac{xy}{(xy)^m}} \right]^m$$

Resolución:

$$M(x; y) = \left[\frac{(xy)^n}{xy} \right]^{\frac{7}{n-1}} \left[\frac{xy^n}{xy^n} \right]^{\frac{3}{m-n}}$$

$$M(x; y) = (xy)^{(n-1)\left(\frac{7}{n-1}\right)} (xy)^{-\left(\frac{3}{m-n}\right)(m-n)}$$

$$M(x; y) = (xy)^7 (xy)^{-3} = (xy)^4 = x^4 y^4$$

$\therefore GA(M) = 8$

12. Sabiendo que el grado de $P(x)$ y $Q(x)$ son m y n respectivamente. Hallar el grado de:

$$[P^3(x)Q^2(x) + P^2(x)Q^3(x)]; m > n$$

Resolución:

El grado de: $P^3(x)Q^2(x)$ es $3m + 2n$

El grado de: $P^2(x)Q^3(x)$ es $2m + 3n$ y $m > n$

Como el grado de $P^3(x)Q^2(x)$ es mayor que el grado de $P^2(x)Q^3(x)$ el grado de:

$$[P^3(x)Q^2(x) + P^2(x)Q^3(x)] \text{ es } 3m + 2n$$

PROBLEMAS

RESUELTOS

1. Hallar la reducción de:

$$G(x; y) = 2mx^{m-2n}y^{m-3} + 3nx^2y^{n+2}; mn \neq 0$$

Resolución:

Para que sea reducible, los términos tienen que ser semejantes.

$$2 = m - 2n \wedge m - 3 = n + 2 \Rightarrow n = 3 \wedge m = 8$$

$$G(x; y) = 2(8)x^2y^5 + 3(3)x^2y^5 \Rightarrow G(x; y) = 25x^2y^5$$

2. Hallar el grado absoluto de J, donde:

$$J(x; y) = 3x^{n-4}y^{\frac{n}{2}+1} - x^{n-5}y^{\frac{n}{4}+1} - 5x^{n+2}y^{\frac{n}{2}+3}$$

Sabiendo además: $6 < GR(x) < 12$

Resolución:

Como "n" es positivo: $GR(x) = n + 2$

Además: $n - 5 \geq 0 \Rightarrow n \geq 5$;

También: $\frac{n}{4}$ debe ser entero, entonces "n" es 4

$$6 < n + 2 < 12 \Rightarrow 4 < n < 10$$

Como: $n \geq 5$ y n es 4 $\Rightarrow n = 8$; en J:

$$J(x; y) = 3x^4y^5 - x^3y^3 - 5x^{10}y^7$$

$$\therefore GA(J) = 17$$

3. Sabiendo que al reducir la expresión:

$$F(x; y) = 2^{\frac{m+n}{2}} \sqrt{\frac{x^{\frac{m+5}{2}} y^{\frac{n+4}{2}}}{x^{\frac{m-5}{2}} y^{\frac{n-4}{2}}}}$$

Representa un monomio en el cual se cumple:

$$\frac{GR(x)}{GR(y)} = 20; \text{ según esto, hallar } n/m.$$

Resolución:

$$F(x; y) = 2 \left(\frac{x^{\frac{m+5}{2}} y^{\frac{n+4}{2}}}{x^{\frac{m-5}{2}} y^{\frac{n-4}{2}}} \right)^{\frac{1}{m+n}}$$

$$F(x; y) = 2(x^{\frac{10}{m}} y^{\frac{8}{n}})^{\frac{1}{m+n}} = 2x^{\frac{10}{m(m+n)}} y^{\frac{8}{n(m+n)}}$$

$$\frac{GR(x)}{GR(y)} = 20 \Rightarrow \frac{\frac{10}{m(m+n)}}{\frac{8}{n(m+n)}} = 20$$

$$\frac{10n}{8m} = 20 \Rightarrow \frac{n}{m} = 16$$

4. Determinar el grado de:

$$M(x; y) = \frac{(x^{n+2})^{n-2}}{(x^n y^n + 1)(x^n + 1)^{n+1}}; n \in \mathbb{N}$$

Resolución:

El grado de $(x^{n+2})^{n-2}$ es $(n+2)^2$

El grado de $(x^n y^n + 1)$ es 2n

El grado de $(x^n + 1)^{n+1}$ es $(n+1)^2$

El grado de $M(x; y)$ es: $(n+2)^2 - [(n+1)^2 + 2n]$

Y debe ser mayor o igual que cero

$$n^2 + 4n + 4 - (n^2 + 4n + 1)$$

$\therefore$ El grado de $M(x; y)$ es 3

5. Qué valor debe tener "n" para que la expresión adjunta:

$$x^3 \sqrt{x^{-1} \sqrt[3]{x^{-1} \sqrt[3]{x^{-n}}}}, \text{ sea de segundo grado.}$$

Resolución:

De la expresión:

$$x(x)^{\frac{(-1)3 - 1)3 - n}{3 \times 3 \times 3}} = x^{\frac{27 - 12 - n}{27}} = x^{\frac{15 - n}{27}}$$

$$\text{Como es de } 2.^\circ \text{ grado: } \frac{15 - n}{27} = 2 \Rightarrow n = -39$$

6. En el siguiente polinomio:

$$M = 2x^m y^{n-1} + 3x^{m+1} y^n - 7x^{m-2} y^{n-2} + x^{m-3} y^{n+1}$$

el grado relativo con respecto a x vale 12, siendo el grado absoluto del polinomio 18. Hallar el grado relativo con respecto a y.

Resolución:

De la expresión; el mayor exponente de x es m + 3.

$$\text{Como } GR(x) = 12 \Rightarrow m + 3 = 12 \Rightarrow m = 9$$

El término con mayor grado es: $x^{m+3} y^{n+1}$

$$\text{Como: } GA(M) = 18 \Rightarrow m + 3 + n + 1 = 18 \Rightarrow n = 5$$

$$\text{En la expresión: } 2x^9 y^4 + 3x^{10} y^5 - 7x^7 y^7 + x^{12} y^6$$

$$\text{Por lo tanto: } GR(y) = 7$$

7. En el polinomio:

$$F(x; y) = 4x^{m+n-2} y^{n-3} + 7x^{m+n+5} y^{m-4} + \sqrt{2} x^{m+n-6} y^{m+2}$$

Se verifica que la diferencia entre los grados relativos a x e y es 5, además que el menor exponente de y es 3. Hallar el grado absoluto del polinomio.

Resolución:

De la expresión:

$$GA(x) = m + n + 5 \wedge GA(y) = m + 2;$$

$$(m + n + 5) - (m + 2) = 5 \Rightarrow n = 2$$

El menor exponente de y es:

$$m - 4 = 3 \Rightarrow m = 7$$

$$F(x; y) = 4x^7 y^4 + 7x^{14} y^3 + 2x^3 y^9 \therefore GA(F) = 17$$

8. De:
- $P(x; y) = x^{a-6} y^{a+5} + x^{2a-6} y^4 - (xy)^{a-7}$

Calcular el GA mínimo:

Resolución:

Como el grado es (+); también para que el grado A sea mínimo debe de tener el grado cero:

$$x^{a-7} y^{a-7} \Rightarrow GA[P(x; y)] = 2(a-7) = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$P(x; y) = xy^{12} + x^6 y^4 - 1$$

$$\therefore GA[P(x; y)] = 13$$

9. Calcular el valor de "m" con la condición, que el polinomio:

$$E(x; y) = x^{2m+n-4}y^{m-n+2} + x^{2m+n-3}y^{m+n+1} + x^{2m+n-2}y^{m+3+n}$$

Sea de grado absoluto 28 y que la diferencia de los grados relativos a x e y sea igual a 6.

Resolución:

$$GR(x) = 2m + n - 2 \wedge GR(x) - GR(y) = 6$$

$$GR(y) = m + n + 3; (2m + n - 2) - (m + n + 3) = 6$$

$$\Rightarrow m = 11$$

$$GA(E) = 3m + 2n + 1 = 28 \quad \therefore n = -3$$

10. Sabiendo que en el monomio:

$$M(x; y) = \left[\frac{n^{n-1}}{n^{n-1}} \sqrt[n]{(x^n)^{n^{2n-1}} (y^n)^{n^{1-n}}} \right]^{3n-2}$$

el GR(x) es 32. Hallar el GR(y)

Resolución:

$$M(x; y) = \left(\frac{n^{2n-1}}{n^{2n-1}} \sqrt[n]{x^{n^{2n}} y^{n^n}} \right)^{3n-2}$$

$$M(x; y) = (x^{n^{2n}} y^{n^n})^{3n-2 \cdot (2n-1)}$$

$$M(x; y) = (y^{n^{2n}})^{n^{n-1}} (y^{n^n})^{n^{n-1}} = x^{3n-1} y^{n^{2n-1}}$$

$$GR(x) = 32 \Rightarrow n^{3n-1} = 2^{3(2)-1} \Rightarrow n = 2$$

$$GR(y) = n^{2n-1} = 2^{2(2)-1} = 8$$

11. Se tienen 3 polinomios enteros P, Q y R (definidos en la variable x), si se sabe que la suma de los grados de Q y R excede en 10 unidades al grado de P; también el grado de $\sqrt[4]{P^2QR}$ es 10 y el grado de $\frac{(PQ)^3}{R^4}$ es 34, hallar la diferencia de los grados en Q y P.

Resolución:

$$\text{Supongamos: } GA(P) = a; GA(Q) = b; GA(R) = c$$

$$\text{Dato: } b + c = a + 10 \quad \dots(I)$$

$$\text{Otro: } GA(\sqrt[4]{P^2QR}) = 10$$

$$\Rightarrow \frac{2a + b + c}{4} = 10 \Rightarrow 2a + b + c = 40 \quad \dots(II)$$

$$\text{Además: } GA\left[\frac{(PQ)^3}{R^4}\right] = 34$$

$$\Rightarrow 3a + 3b - 4c = 34 \quad \dots(III)$$

Nos piden: b - a

$$\bullet (II) - (I): 2a = 30 - a \Rightarrow a = 10$$

$$\bullet \text{ En (I): } b + c = 20 \Rightarrow c = 20 - b$$

$$\bullet \text{ En (III): } 30 + 3b - 4(20 - b) = 34$$

$$\Rightarrow 30 + 3b - 80 + 4b = 34$$

$$7b = 84 \Rightarrow b = 12 \quad \therefore b - a = 2$$

12. Sea P un polinomio definido por:

$P(x) = (1 + 2x)^n + (1 + 3x)^n$, tal que la suma de coeficientes excede en 23 al término independiente. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El polinomio P(x) es de grado 2.

II. La suma de sus coeficientes es 25.

III. El término cuadrático de P(x) es $12x^2$.

Resolución:

$$\text{De } P(x) = (1 + 2x)^n + (1 + 3x)^n$$

$$\text{Observar: } GA(P) = n$$

$$\bullet \Sigma \text{coef.}(P) = P(1) = 3^n + 4^n$$

$$\bullet TI(P) = P(0) = 1 + 1 = 2$$

$$\text{Dato: } \frac{\Sigma \text{coef.}(P)}{3^n + 4^n} = \frac{TI(P) + 23}{25}$$

De aquí: n = 2; con esto:

$$GA(P) = n = 2 \Rightarrow (I) \text{ es V}$$

$$\Sigma \text{coef.} = 25 \Rightarrow (II) \text{ es V}$$

$$\text{Térn. cuadr.}(P) = 4x^2 + 9x^2 = 13x^2 \Rightarrow (III) \text{ es F}$$

$\therefore$ VVF

13. Si P es un polinomio definido por:

$$P(x; y) = 4x^{a-1}y^{b-2} + 3x^{a+2}y^{b-1} + 6x^{a+3}y^{b-2}, \text{ tal que:}$$

$$GA(P) = 20 \text{ y } GR(x) = 8, \text{ hallar el valor de } T = ab.$$

Resolución:

$$P(x; y) = \underbrace{4x^{a-1}y^{b-2}}_{t_1} + \underbrace{3x^{a+2}y^{b-1}}_{t_2} + \underbrace{6x^{a+3}y^{b-2}}_{t_3}$$

Se nota:

$$\begin{cases} GA(t_1) = a + b - 1 \\ GA(t_2) = a + b + 1 \\ GA(t_3) = a + b + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} GA(P) = a + b + 1 \\ \Rightarrow a + b + 1 = 20 \quad \dots(I) \end{cases}$$

$$\text{Además: } GR(x) = a + 3 = 8 \text{ (dato)} \Rightarrow a = 5$$

$$\text{En (I): } 5 + b + 1 = 20 \Rightarrow b = 14$$

$$\therefore T = ab = (5)(14) = 70$$

14. Sea P un polinomio homogéneo definido por:

$$P(x; y) = ax^c + bx^{c-1}y^a - cx^ay^b - dy^{2c-3}$$

Tal que la suma de sus coeficientes es -8, entonces el valor de M = a + b + c + d, es:

Resolución:

Del polinomio homogéneo:

$$P(x; y) = \underbrace{ax^c}_{t_1} + \underbrace{bx^{c-1}y^a}_{t_2} - \underbrace{cx^ay^b}_{t_3} - \underbrace{dy^{2c-3}}_{t_4}$$

$$GA(t_1) = GA(t_2) = GA(t_3) = GA(t_4)$$

$$\Rightarrow c = c - 1 + a = a + b = 2c - 3$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

$$\bullet (1) = (4): c = 2c - 3 \Rightarrow c = 3$$

$$\bullet (1) = (3): a + b = 3$$

Además:

$$\Sigma \text{coef.}(P) = P(1; 1) = a + b - c - d = -8$$

$$\text{Aquí: } 3 - (c + d) = -8 \Rightarrow c + d = 11$$

$$\therefore M = 3 + 11 = 14$$

15. A condición: $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} = \frac{c}{a+c}$, hallar el grado

$$\text{absoluto de: } P(x; y; z) \equiv \frac{(a+b)^2 + c^2}{x^{7a^2} y^{6ac} z^{2bc}}$$

Resolución:

• Se pide: $E = \frac{7a^2 + 6ac + 2bc}{(a+b)^2 + c^2} \quad \dots(I)$

• De la condición: $\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} = \frac{c}{a+c}$

Aplicando propiedad de serie de razones iguales, tenemos:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{b+c} = \frac{c}{a+c} = \frac{a+b+c}{2(a+b+c)} = \frac{1}{2}$$

Ahora, igualando cada término a: $\frac{1}{2}$ se tendrá:
 $a = b = c = k$ (constante)

Finalmente reemplazando en (I) tenemos:

$$E = \frac{7k^2 + 6k^2 + 2k^2}{(2k)^2 + k^2} \quad \therefore E = 3$$

16. Hallar los términos que tiene el polinomio:

$$P(a; b; c) = 3\sqrt[3]{\frac{a^{xy}}{b^x c^y}} + 3\sqrt[3]{\frac{a^{2xy}}{b^{x+1} c^{y+1}}} + 3\sqrt[3]{\frac{a^{3xy}}{b^{x-2} c^{y+2}}} + \dots$$

Si es homogéneo y de grado 20 respecto de "a".

Resolución:

Sea el polinomio de "n" términos:

$$P = 3\sqrt[3]{\frac{a^{xy}}{b^x c^y}} + 3\sqrt[3]{\frac{a^{2xy}}{b^{x+1} c^{y+1}}} + 3\sqrt[3]{\frac{a^{3xy}}{b^{x+2} c^{y+2}}} + \dots$$

con el grado de "a":

$$\frac{nxy}{3} = 20 \Rightarrow nxy = 60 \quad \dots(I)$$

Por concepto de polinomio homogéneo en los dos primeros términos:

$$\frac{xy - x - y}{3} = \frac{2xy - x - 1 - y - 1}{3}$$

$$\text{Efectuando resulta: } xy = 2 \quad \dots(II)$$

$$\therefore \text{Al reemplazar (II) en (I): } n = 30$$

Nota

- Grado relativo a $x = GR_x(P)$
- Grado absoluto de $P(x) = GA[P(x)] = [P]^0$
- Grado absoluto = grado

17. Calcular $m + n$, si el polinomio:

$$P(x; y) = 3x^{2m+n-4}y^{m-n+2} + 5x^{2m+n-3}y^{m-n+1} - 7x^{2m+n-2}y^{m+n}$$

Es de grado 10 y la diferencia entre los grados relativos a x e y es 4.

Resolución:

Observar que: $[P]^0 = 3m + 2n - 2 = 10$,
 es decir: $3m + 2n = 12 \quad \dots(I)$

También: $GR(x) = 2m + n - 2 \wedge GR(y) = m + n + 2$,
 por dato: $GR(x) - GR(y) = 4$, es decir:
 $(2m + n - 2) - (m + n + 2) = 4 \Rightarrow m = 8$.

$$\text{En (I): } n = -6$$

$$\therefore m + n = 2$$

18. La siguiente expresión en variable x :

$$(a + b^2)^{\frac{a-b}{a-b}} x^{\frac{6}{a-b}} - ab^{\frac{a-b}{a-b}} x^{\frac{4}{a-b}} + (b-a)x$$

Puede reducirse a monomio; según esto, proporcionar su valor reducido.

Resolución:

Escribiendo así la expresión:

$$(a + b^2)x^{\frac{6}{a-b}} - abx^{\frac{4}{a-b}} + (b-a)x$$

Como se puede reducir a monomio; los términos de la expresión tienen que ser semejantes, es decir:

$$\frac{6}{a-b} = \frac{4}{a+b} = 1 \Rightarrow a-b = 6 \wedge a+b = 4$$

Resolviendo: $a = 5 \wedge b = -1$, se pide:

$$M(x) = (a + b^2 - ab + b - a)x \quad \therefore M(x) = 5x$$

19. Encontrar el valor de "n" para el cual, la expresión:

$$M(x) = \frac{[(x^{n-2})^3 x^{2n-3}]^2 x^4}{[(x^n)^2 x^4]^2}$$

Sea de segundo grado.

Resolución:

Efectuando en cada corchete:

$$M(x) = \frac{(x^{3n-6} x^{2n-3})^2 x^4}{(x^{2n-4})^2} = \frac{x^{10n-18-4}}{x^{4n-8}} = x^{6n-22}$$

$$\text{Por condición: } 6n - 22 = 2 \quad \therefore n = 4$$

20. Sabiendo que el grado de la expresión:

$$\sqrt[4]{\frac{x^{2n-1} y^{\frac{2n}{3}}}{z^{2n-3} w^{\frac{5n}{6}}}}^5$$

Es -5. Calcular el valor de "n".

Resolución:

Llamemos P a la expresión, la cual escribiremos

$$\text{así: } P = \left(\frac{x^{2n-1} y^{\frac{2n}{3}}}{z^{2n-3} w^{\frac{5n}{6}}} \right)^{\frac{5}{4}}$$

El grado de la expresión P está dado por:

$$GA(P) = \frac{5}{4} \left[(2n-1) + \frac{2n}{3} \right] - \left[(2n-3) + \frac{5n}{6} \right]$$

$$GA(P) = \frac{5}{4} \left(4 - \frac{n}{6} \right) = 5 - \frac{5n}{24}$$

$$\text{Por condición se debe cumplir: } 5 - \frac{5n}{24} = -5$$

$$\therefore n = 48$$

21. Si P es un polinomio sobre $\mathbb{R}$ definido por:

$$P(x; y) = x^{2n+m-15} + x^{m-n} y^{5-n} + \frac{1}{5-m} x^{6-m}$$

hallar el valor de: $T = 3m - 4n$.

Resolución:

Si P es un polinomio, entonces los exponentes de las variables deben ser números enteros no negativos (vea el coeficiente: $m \neq 5$).

Luego:

$$2n + m - 15 \geq 0 \wedge m - n \geq 0 \wedge 5 - n \geq 0 \wedge 6 - m \geq 0$$

Donde: $m, n \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow 2n + m \geq 15 \wedge m \geq n \wedge n \leq 5 \wedge m \leq 6$$

$$(1) \quad (2) \quad (3) \quad (4)$$

• De (4): $m = \textcircled{6}$; 5; 4; ...

• De (3): $n = \textcircled{5}$; 4; 3; ...

De aquí, los únicos valores de "m" y "n" que verifican (1) y (2) son: $m = 6$ y $n = 5$

$$\therefore T = 3(6) - 4(5) = -2$$

22. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $GA(P + Q) \leq GA(P) + GA(Q)$

II. $GA(P - Q) \leq GA(P) + GA(Q)$

III. $GA(P)^n = GA(P); n \in \mathbb{N}$

IV. $GA(PQ) = GA(P) + GA(Q)$

Si M y N son los números de las proposiciones verdaderas y falsas respectivamente hallar la relación entre M y N.

Resolución:

- I. $GA(P + Q) \leq GA(P) + GA(Q)$; esta proposición se verifica siempre que el $GA(P)$, el $GA(Q)$ y el $GA(P + Q)$ estén perfectamente definidos (la proposición no lo dice).

Por ejemplo: si $P(x) = x^2 + x - 1 \wedge$

$Q(x) = -x^2 - x + 1; P(x) + Q(x) = 0$

El grado de 0 no está definido, por tanto, no verificaría la desigualdad $\Rightarrow$ (I) es F

- II. Es similar a la proposición (I) $\Rightarrow$ (II) es F

III. $GA(P^n) = GA(P) \times n; n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (III) es F

- IV. El grado de un producto es igual a la suma de los grados de cada uno de los factores $\Rightarrow$ (IV) es V

$\Rightarrow M = 1 \wedge N = 3 \therefore N > M$

23. Si P es un polinomio definido por:

$$P(x) = (5x - 1)^{2n-1}(2x + 5)^n + [(3x + 1)(x + 5)]^n + (x^2 + n)(x - 2)$$

Tal que tienen como término independiente -36, hallar el grado del polinomio P.

Resolución:

$$P(x) = (5x - 1)^{2n-1}(2x + 5)^n + [(3x + 1)(x + 5)]^n + (x^2 + n)(x - 2)$$

Aquí: $TI(P) = P(0) = (-1)^{2n-1}(5)^n + [(1)(5)]^n + (n)(-2)$

$\Rightarrow -5^n + 5^n - 2n = -36 \Rightarrow n = 18$

Luego:

$$P(x) = (5x - 1)^{35}(2x + 5)^{18} + [(3x + 1)(x + 5)]^{18} + (x^2 + 18)(x - 2)$$

Donde: Grado (P) = 35 + 18 = 53

24. Si: $P(x; y) = (abc + 16)x^{-a}y^b - (bc + a)x^b y^c + (b - c)x^{-a}y^c$

Es un polinomio idénticamente nulo, calcular el grado de la expresión:

$$Q(x; y) \equiv \sqrt[3]{x^a + c} \sqrt[4]{x^b + y^{-a}}$$

Resolución:

Por ser polinomio: $a \in \mathbb{Z}^+ \wedge \{b; c\} \subset \mathbb{N}$ y como es idénticamente nulo se cumplirá lo siguiente:

$abc + 16 = 0 \dots (I)$

$bc + a = 0 \dots (II)$

$b - c = 0 \dots (III)$

De (II): $bc = -a$; en (I): $a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

Como: $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a = -4$

O sea: $bc = 4$; de (III): $b = c \Rightarrow b^2 = 4$

Como: $b \in \mathbb{N} \Rightarrow b = 2 = c$

Finalmente la expresión dada será:

$$Q(x; y) = \sqrt{x^{-4} + 2} \sqrt{x^2 + y^4} \therefore [Q]^0 = 1$$

25. Dados dos polinomios P y Q (definido en la variable x), indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $GA(P) = 5 \wedge GA(Q) = 5$, entonces $GA(P + Q) = 5$

II. Si $GA(P - Q) = 5$, entonces $GA(Q) < 5$

III. Si $GA(P) > 1 \wedge GA(P^3 Q^2) = 13$, entonces $GA(PQ) = 6$

Resolución:

- I. Supongamos así:

$P(x) = x^5 + x^4 + 1 \Rightarrow GA(Q) = 5$

$P(x) = x^5 + 2 \Rightarrow GA(Q) = 5$

Luego: $P(x) + Q(x) = x^4 + 3 \Rightarrow GA(P + Q) = 4$

Con esto: (I) es F

- II. Sea: $P(x) = x^6 + x^5 + 1 \wedge Q(x) = x^6 + x - 2$; vemos que: $P(x) - Q(x) = x^5 - x + 3$

Donde: $GA(P - Q) = 5$; pero $GA(Q) = 6 > 5 \Rightarrow$ (II) es F

- III. Sea: $GA(P) = m > 1; GA(Q) = n$

como: $GA(P^3 Q^2) = 13$

$\Rightarrow 3m + 2n = 13; m > 1$

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 \end{array} \Rightarrow \text{única posibilidad}$$

Luego: $GA(PQ) = m + n = 5$

$\Rightarrow$ (III) es F $\therefore$ FFF

**PROBLEMA 1 (UNI 1978)**

El siguiente monomio es de grado 2. El valor de "n" es:

$$\frac{n^n}{x^n} \sqrt[n]{x^{n^n}}$$

- A) 1/2 B) 3/2 C) 2/3
D) 2 E) 1

Resolución:

Por ser de grado 2: $\frac{n^n}{n^n} + \frac{n^n}{n(n^n)} = 2 \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} = 2$

∴ Resolviendo: $n = 1$

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 1982 - I)

Si el grado del siguiente monomio:

$$3x^6 \sqrt[5]{9x^4} \sqrt[3]{x^m} \sqrt[4]{2x^m} \text{ es } 8$$

El valor de "m" es:

- A) 2 B) 6 C) 9
D) 12 E) 16

Resolución:

Por teoría de grados: $GA = 6 + \frac{4}{5} + \frac{m}{15} + \frac{m}{30} = 8$

Resolviendo:

$$180 + 24 + 3m = 30 \times 8$$

$$3m = 240 - 204 \Rightarrow m = 12 \quad \therefore m = 12$$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2004 - II)

Dados los siguientes polinomios: $P(x)$ de grado 2 y término independiente uno; y $Q(x) = (x-1)P(x) + 3x + 1$. Si $Q(2) = 7$ y $P(1) = 2$. Halle la suma de raíces de $Q(x)$.

- A) 0 B) -8/3 C) 10/3
D) 4 E) 5

Resolución:

Del problema se sabe:

$$P(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \dots(I)$$

$$Q(x) = (x-1)P(x) + 3x + 1 \quad \dots(II)$$

$$(I) \text{ en } (II): Q(x) = (x-1)(ax^2 + bx + 1) + 3x + 1$$

$$Q(x) = ax^3 + (b-a)x^2 + (4-b)x$$

$$P(1) = 2: 2 = a + b + 1 \Rightarrow a + b = 1 \quad \dots(III)$$

$$Q(2) = 7: 7 = 8a + 4b - 4a + 8 - 2b$$

$$7 = 4a + 2b + 8 \Rightarrow 2a + b = -1/2 \quad \dots(IV)$$

$$\text{De } (III) \text{ y } (IV): a = -\frac{3}{2}; b = \frac{5}{2}$$

$$\text{Luego: } Q(x) = -\frac{3}{2}x^3 - 4x^2 + \frac{3}{2}x = 0$$

$$\text{Aplicando Cardano, suma de raíces: } -\frac{(-4)}{(-3/2)} = -\frac{8}{3}$$

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2007 - II)

Determine el polinomio mónico de menor grado de coeficientes enteros que tenga como raíces a los números reales $\sqrt{2} - 3$ y $\sqrt{3} - 2$. Dar como respuesta la suma de sus coeficientes.

- A) 28 B) 42 C) 56
D) 70 E) 84

Resolución:

Recordemos que si x_1, x_2, x_3, x_4 son las raíces de un polinomio Mónico P , entonces:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

También, si una raíz del polinomio es de la forma $a + \sqrt{b}$, entonces, otra raíz debe ser $a - \sqrt{b}$ cuando los coeficientes son racionales.

En el problema, tenemos de dato las raíces:

$$x_1 = -3 + \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = -3 - \sqrt{2}$$

$$x_3 = -2 + \sqrt{3} \Rightarrow x_4 = -2 - \sqrt{3}$$

Luego, el polinomio Mónico de menor grado es:

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$$

$$P(x) = [x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2][x^2 - (x_3 + x_4)x + x_3x_4]$$

$$P(x) = [x^2 - (-6)x + 7][x^2 - (-4)x + 1]$$

$$P(x) = (x^2 + 6x + 7)(x^2 + 4x + 1)$$

$$\therefore \Sigma \text{ de coef. } (P) = P(1) = (14)(6) = 84$$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

Halle el menor grado del polinomio: $x^n + ax + b$, $a \neq 0$, ($n > 1$), para que $x^2 - 1$ sea un divisor.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

Resolución:

Si $P(x) = x^n + ax + b$, es divisible $(x^2 - 1)$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 - 1)q(x)$$

$$P(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + b = 0 \quad \dots(I)$$

$$P(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^n - a + b = 0 \quad \dots(II)$$

$$\text{Restando } (I) \text{ y } (II): 1 - (-1)^n + 2a = 0$$

$$2a = (-1)^n - 1$$

$$\text{Se tiene: } a \neq 0 \Rightarrow (-1)^n - 1 \neq 0$$

Entonces "n" es impar

∴ Grado mínimo de n: 3

Clave: B



PROBLEMAS

PROPUESTOS



- Si: $P(x; y; z) = 5x^2y^5z^8$
 calcular: $\frac{GR(z) + GA(P)}{GR(x) + GR(y)}$
 A) 23/7 B) 15/7 C) 7/2
 D) 9/5 E) 13/11
- Si: $Q(x; y; z) = \frac{3}{4}x^{14}y^3z^{10}$
 calcular: $\frac{GR(x) + GR(z)}{GR(y) + GA(Q)}$
 A) 6/11 B) 2/5 C) 3/5
 D) 7/10 E) 4/5
- Sea: $P(x; y; z) = 5x^8y^2z^6 \wedge Q(x; y; z) = 3x^5y^6z^8$
 Además: $GA(P) = GA(Q) \wedge GR_x(P) + GR_z(Q) = 11$
 Calcular b.
 A) 7 B) 4 C) 11
 D) 10 E) 9
- Si: $P(x; y) = x^8y^6$; $Q(x; y) = x^6y^6 \wedge R(x; y) = x^6y^8$
 Se sabe que: $GA(P) = 13$; $GA(Q) = 11 \wedge GA(R) = 14$
 Hallar $GR_x(Q) + GR_y(P)$
 A) 10 B) 12 C) 14
 D) 16 E) 18
- Sea el siguiente monomio: $M(x; y) = 7x^8y^6$
 Sabiendo que: $GR(x) = 2 \wedge GA(M) = 5$
 Calcular $a^2 + b^2$
 A) 11 B) 12 C) 13
 D) 14 E) 15
- Dado el siguiente monomio:
 $P(x; y; z) = \frac{1}{3}x^{a-2}y^{2-b}z^{4x}$; $abc \neq 0$
 Además: $GR(x) = c \wedge GR(z) = 8$
 Hallar el grado absoluto del monomio.
 A) 7 B) 6 C) 5
 D) 8 E) 10
- Sea: $P(x; y) = \sqrt{3}x^{a^2}y^{b^2+2}$
 Además: $GR(x) + GA(P) = 2GR(y)$; $GA(P) = 10$
 Calcular: $a^2 + b^2$
 A) 5 B) 4 C) 9
 D) 8 E) 7
- Sea: $P(x; y) = Ax^a y^b \wedge Q(x; y) = Bx^b y^a$
 Si: $P(x; y^2) = Q(x^2; y) \wedge GR_x(P) + GR_y(Q) = 9$
 Hallar: $3a + 2b$
 A) 20 B) 18 C) 36
 D) 32 E) 24
- Sea: $P(x; y) = Ax^a y^c$; $Q(x; y) = Bx^b y^a$
 Si: $P(x^2; y) = Q(x; y^2)$
 Hallar: $GR_x(Q) / GR_y(P)$
 A) b/c B) a C) b
 D) 1 E) c
- ¿Qué tipo de polinomio es:
 $M(x; y; z) = (2x - y + z)^3 + (y - z)^3 + 6x(y - z)(2x - y + z) - 8x^3?$
 A) Monomio B) Binomio
 C) Trinomio D) Polinomio de 3°
 E) Nulo
- Si la expresión: $P(x) = \sqrt[m]{x^{n^2}} + \sqrt[n]{x^{mn}}$;
 se reduce a un polinomio de un solo término.
 Calcular: $\frac{(m+n)^3}{m^3+n^3}$; $m, n \in \mathbb{N} - \{1\}$
 A) 2 B) 4 C) 6
 D) 8 E) 10
- Hallar el grado absoluto del siguiente polinomio:
 $P(x) = (x + 3)^4 + (1 - x)^5$
 A) 5 B) 4 C) 3
 D) 6 E) 2
- Sea: $P(x) = (x + 1)(x^2 + 2)(x^3 + 3) \dots (x^{10} + 10)$
 Calcular $GA(P)$.
 A) 54 B) 55 C) 56
 D) 58 E) 60
- Sea: $P(x; y) = x^{a-1}y^{4-a} + x^{a-2}y^{6-a}$
 Si: $GR_x(P) = GR_y(P) - 3$; hallar "a".
 A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 1
- Sea: $P(x; y) = x^{a+1}y^{a-5} + x^{a-3}y^{a-2} + x^{2a-7}y + x^{a-5}y^a$
 Además $GR_x(P) = 7$. Hallar el $GA(P)$.
 A) 6 B) 5 C) 4
 D) 7 E) 8
- Sea: $P(x; y) = x^{n+2}y^{6-n} + x^{n-2}y^{n+2}$
 Si cada término tiene el mismo grado absoluto,
 hallar "n".
 A) 2 B) 6 C) 4
 D) 8 E) 10
- Se sabe que: $J(a; b) = 3a^{n-3}b^{5-m} + 4a^{m+1}b^{n-5}$,
 es un monomio. Indicar el grado absoluto.
 A) 3 B) 6 C) 7
 D) 5 E) 4

18. En cuánto excede el grado absoluto máximo al grado mínimo que puede tomar el polinomio:

$$P(x; y) = (x^{m-2})^2 + x^{m-5}y^{m+2} - 7y^{8-m}z^{20}$$

- A) 9 B) 5 C) 2
D) 7 E) 4

19. Sea: $P(x) = \frac{(x+1)(x^2+2)(x^3+3)}{n \text{ paréntesis}}$, y sabiendo

que el término independiente es 5040. Hallar el grado del polinomio.

- A) 128 B) 28 C) 64
D) 32 E) 256

20. Hallar el grado del siguiente polinomio:

$$P(x) = \frac{(x+2)(x^5+4)(x^{27}+8)\dots}{n \text{ paréntesis}}$$

término independiente es $(512)^4$.

- A) 72 B) 36 C) 1034
D) 4096 E) 1296

21. Sea el siguiente polinomio:

$$P(x) = (x+3)(x^4+9)(x^9+27)\dots; \text{ si el término independiente es } (243)^9, \text{ hallar el grado del polinomio.}$$

- A) 243 B) 435 C) 90
D) 657 E) 531

22. Sea: $P(x) = \frac{(x+2)(x^3+4)(x^5+6)(x^7+8)\dots}{n \text{ paréntesis}}$

Si el término independiente es 3840, hallar el grado del polinomio.

- A) 25 B) 36 C) 49
D) 16 E) 64

23. Hallar "n", si $F(x)$ es de grado 128.

$$F(x) = \left[\frac{x^n \sqrt{x^n}}{(x^2)^n} \right]^{(n-1)^2}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

24. Si el polinomio:

$$P(x; y) = (m+n)x^2y^5 + 3x^5y^3 - 11x^3y^5 + (n-m)x^5y^3$$

es nulo, determinar mn.

- A) 28 B) 24 C) 16
D) 14 E) 12

25. Hallar el valor de "n" para que la expresión:

$$M(x) = x \sqrt[3]{\frac{x^n \sqrt{x^n}}{x^4 \sqrt{x^{n-2}}}}$$

- reducida, sea de quinto grado.
A) 2 B) 3 C) 5
D) 7 E) 10

26. Siendo:

$$P(x) = (x-2)[p(x+2)+q] + rx - 4x^2 - 15x + 34$$

idénticamente nulo.

$$\text{Calcular: } S = p^2 + q^2 + r^2$$

- A) 81 B) 77 C) 133
D) 225 E) 363

27. Sean: $P(x) = x^n + x^3 + x + 1 - m$

$$Q(x) = x^m + x + 1 + n; m, n \in \mathbb{N} - \{1\}$$

Si el grado absoluto de $P(x)Q(x)$ es 7 y además el término independiente es 7, calcular: $m^2 + n^2$.

- A) 25 B) 37 C) 29 D) 32 E) 31

28. Sean: $P(x) = x^m + x + n$

$$Q(x) = x^n - x + m; m, n \in \mathbb{N} - \{1\}$$

$GA(PQ)$ = término independiente

$$\text{Hallar: } \frac{m^3 + n^3}{m^2 + n^2}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 1/4

29. Sean: $P(x) = x^5 + mx + n$

$$Q(x) = x^3 + nx + m; mn \neq 0$$

Sabiendo que: $GA(P) + n = GA(Q) + m$; el término independiente de $P(x)Q(x)$ es 63.

Calcular: $\sqrt{m+n}$.

- A) 16 B) 4 C) 25
D) 5 E) $\sqrt{5}$

30. Sean: $P(x) = x^n + n \wedge Q(x) = x^m + m$

Si: $GA[P(Q)] = 6 \wedge TI[Q(P)] = 11$; hallar: $m^2 + n^2$.

- A) 37 B) 27 C) 45
D) 13 E) 23

31. Dado el polinomio: $P(x) = x^3 - 3x + 15$

Hallar el valor numérico del polinomio, cuando:

$$x = \sqrt[3]{5 + \sqrt{24}} + \sqrt[3]{5 - \sqrt{24}}$$

- A) 10 B) 15 C) 25
D) 5 E) -10

32. Si $P(x) = (a-b)x^5 + a + (3a+b)x^4 + (b-2a)x + 2$, calcular ab, donde $\Sigma \text{coef.}[P(x)] = 12$ y $TI[P(x)] = 5$.

- A) 4 B) 7 C) 3
D) -1 E) 9

33. Indicar la mayor suma de coeficientes del polinomio $P(x) = (5-2n)x^{4n-5} + (4+n)x^{7-n} - 5$

- A) 4 B) 2 C) 3
D) -2 E) 0

34. En el polinomio homogéneo:

$$P(x; y; z) = 4mx^{(a-1)^{a-1}-1} + y^{2b} + 5z^{(b+1)^2}; m \neq 0,$$

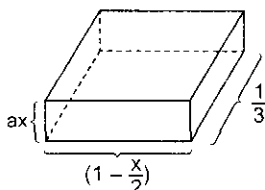
hallar el menor valor de $a+b$.

- A) 9 B) -1 C) 3
D) -5 E) 4

35. Si el polinomio $P(x)$ es idénticamente nulo, siendo:
 $P(x) = (a + b - 4abc)x^2 + (a + c - 3abc)x + b + c - 7abc$,
 calcular el valor de $\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)^{-1}$; $abc \neq 0$

A) 7 B) 1/7 C) 4
 D) 1/4 E) 1/3

36. Si el polinomio mónico $P(x)$ representa el volumen de la caja:



Hallar: $P(0) + P(1) + P(2) + \dots + P(7)$

A) 21 B) 80 C) 75
 D) 84 E) 49

37. Si $P(ax + a) = 4x(x - 1)$, hallar los posibles valores que pueda tomar "a" para que $P(1) = 0$

A) 1; 1/2 B) 1; -1 C) -1; 1/2
 D) 1/2; -1/2 E) 0; 1

38. Si el polinomio:

$P(x; y; z) = 2x^{m-1}y^{n-4}z^6 + 4x^8y^4z^6 + 6x^8y^b z^{n-1}$,
 se reduce a un solo término, calcular el mínimo valor de $m + n + p$.

A) 7 B) 12 C) 9
 D) 6 E) 0

39. Indique el grado del monomio:

$$P(x) = 4(x^1)^2(x^2)^3(x^3)^4 \dots (x^{10})^{11}$$

A) 320 B) 420 C) 350
 D) 440 E) 410

40. Sea el polinomio cuadrático:

$P(x) = (n + 2)x^{n^2 - 2} + nx + (3 - n)$, determine el grado de $[P(x)]^3$, aumentado con el valor de "n".

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 0

41. Sea: $P(x) = x^{100} - 100x^{99} + 199$,

Calcular $P[P(1)] - 198$

A) 4 B) 2 C) 0
 D) 1 E) -2

42. Del polinomio: $P(x; y) = 4x^{n-3}y^{n+2} + 9x^{n+1}y^{5-n}$,
 Hallar la suma de los grados relativos de x e y.

A) 5 B) 7 C) 6
 D) 11 E) 12

43. Sea el siguiente trinomio:

$$P(x; y) = (a - 3)x^8 a y^3 + x^{a/3} y^{b-3} + (b - 3)x^{5-b} y^{2+b}$$

Hallar: $GR_x(P) + GR_y(P) + GA(P)$.

A) 20 B) 15 C) 30
 D) 19 E) 21

44. Dado el polinomio ordenado y completo:

$P(x) = ax^{b-3} + cx^c + a + d$, tal que el término independiente es 9, hallar $a + b + c + d$.

A) 15 B) 42 C) 20
 D) 17 E) 12

45. En el polinomio: $P(x; y) = 2x^{n+3}y^{m-2}z^{6-n} + x^{n-2}y^{m+3}$

Donde: $GA(P) = 16$; $GR_x(P) - GR_y(P) = 5$

Calcular el valor de: $2m + n + 1$

A) 5 B) 10 C) 15
 D) 20 E) 25

46. Hallar: $E = m + n + mn$, si el GA del polinomio
 $P(x; y) = 4x^{m-3}y^{n-2} + 5x^{m+1}y^{n+1} + 7x^m y^{n-2}$ es 8 y el grado relativo de x supera en una unidad al grado relativo de y.

A) 15 B) 14 C) 16
 D) 18 E) 13

47. Hallar el grado del siguiente monomio:

$$N(x; y; z) = -\frac{2}{3}(xy^2)^4 z^8$$

A) 22 B) 20 C) 18
 D) 12 E) 16

48. El siguiente monomio es de grado 66. Calcular "a",
 si: $P(x; y) = -\sqrt{7}(x^{3a-1}y^{a+3})^3$

A) 4 B) 10 C) 5
 D) 6 E) 12

49. Del monomio: $M(x; y) = \frac{2}{3}a^4 x^{2n-2} y^{8-2n}$, hallar el grado.

A) 10 B) 6n C) 3n
 D) 6 E) Ninguno

50. Dado el polinomio: $P(x) = (3n - 5)^2 (\sqrt[4]{x^{n+2}})$,
 calcular su coeficiente, si dicho polinomio es de tercer grado.

A) 625 B) 361 C) 961
 D) 169 E) 49

51. Si el polinomio $M(x) = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^{4\sqrt{a+3}}$, es de segundo grado, calcular su coeficiente.

A) 10 B) 5 C) 25
 D) 12 E) 13

CLAVES

1. A	8. B	15. B	22. A	29. B	36. D	43. B	50. A
2. E	9. E	16. E	23. B	30. D	37. A	44. A	51. E
3. B	10. D	17. C	24. A	31. C	38. D	45. C	
4. A	11. E	18. A	25. E	32. C	39. D	46. A	
5. C	12. B	19. B	26. C	33. B	40. E	47. B	
6. A	13. B	20. E	27. C	34. B	41. D	48. C	
7. D	14. B	21. B	28. B	35. D	42. D	49. D	

Polinomios especiales

06 capítulo

Évariste Galois nació el 25 de octubre de 1811 y murió el 31 de mayo de 1832. Fue un matemático francés. Mientras aún era un adolescente, fue capaz de determinar la condición necesaria y suficiente para que un polinomio sea resuelto por radicales. Dio solución a un problema abierto mediante el nuevo concepto de grupo de permutaciones. Su trabajo ofreció las bases fundamentales para la teoría que lleva su nombre, una rama principal del álgebra abstracta. Fue el primero en utilizar el término «grupo» en un contexto matemático.

Siendo todavía estudiante del Louis-le-Grand, Galois logró publicar su primer trabajo (una demostración de un teorema sobre fracciones continuas periódicas)

y poco después dio con la clave para resolver un problema que había tenido en jaque a los matemáticos durante más de un siglo (las condiciones de resolución de ecuaciones polinómicas por radicales). Sin embargo, sus avances más notables fueron los relacionados con el desarrollo de una teoría nueva cuyas aplicaciones desbordaban con mucho los límites de las ecuaciones algebraicas: la teoría de grupos. Las contribuciones matemáticas de Galois fueron publicadas finalmente en 1843 cuando Joseph Liouville revisó sus manuscritos y declaró que aquel joven en verdad había resuelto el problema de Abel por otros medios que suponían una verdadera revolución en la teoría de las matemáticas empleadas.



Évariste Galois

Francia, 1811 - Francia, 1832

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Son aquellos polinomios que poseen características particulares que los diferencian de otros. Estos son:

POLINOMIO HOMOGÉNEO

Es aquel polinomio cuyos términos tienen el mismo grado absoluto. A este grado común se le denomina Grado de homogeneidad.

Ejemplo:

$$P(x, y) = \underbrace{3x^8y^5z^3}_{14} - \underbrace{7x^7y^7z^4}_{14} + \underbrace{x^{11}y^3z^7}_{14}$$

es homogéneo. Grado de homogeneidad = 14

POLINOMIO ORDENADO

Con respecto a una variable un polinomio está ordenado si los exponentes de esta variable lo están. (ya sea en forma ascendente o descendente).

Ejemplo:

$$F(x, y) = 3x^7y^2 - x^5y^5 + 6x^2y^6$$

Con respecto a x : 7; 5; 2 ordenado en forma descendente. Con respecto a y : 2; 5; 6 ordenado ascendente.

POLINOMIO COMPLETO

Con respecto a una variable un polinomio es completo, si dicha variable presenta todos los exponentes naturales desde cero hasta el grado del polinomio.

Propiedad:

En un polinomio de una sola variable, Si es completo el número de términos es igual al grado de dicho polinomio más uno.

Por ejemplo: $Q(x) = 2x - 5x^4 - 3x^2 + x^3 - 3$

Es completo con respecto a x .

Número de términos: $GA(P) + 1 = 4 + 1 = 5$

POLINOMIO COMPLETO Y ORDENADO

Con respecto a una variable, es aquel que presenta las dos características anteriores.

Propiedad:

En un polinomio completo y ordenado de una sola variable la diferencia de exponentes en dos términos consecutivos siempre es igual a la unidad.

Por ejemplo: $P(x) = 4x^5 - x^4 + x^3 + 4x^2 - \sqrt{2}x + 3$

Es completo y ordenado con respecto a x en forma decreciente.

POLINOMIOS IDÉNTICOS

Dos polinomios reducidos con las mismas variables y los mismos grados son idénticos, si sus términos semejantes poseen los mismos coeficientes.

Propiedad:

Dos polinomios son idénticos si y solo si para los mismos valores de las variables, los valores numéricos de dichos polinomios son iguales.

Por ejemplo:

$$\text{Sean: } P(x) = 4x^2 - 2bx + 5$$

$$Q(x) = ax^2 + 6x + (c - 2)$$

$$\text{Si: } P(x) = Q(x) \Rightarrow a = 4; b = -3; c = 7$$

$$\text{Además: } a \in \mathbb{R}: P(a) = Q(a)$$

POLINOMIOS IDÉNTICAMENTE NULOS

Un polinomio reducido se dice que es idénticamente nulo si los coeficientes de todos sus términos son iguales a cero.

Ejemplo:

$$Ax^4 + Bx + C = 0$$

$$\text{Entonces: } A = B = C = 0$$

Propiedad:

Si un polinomio es idénticamente nulo para cualquier valor de sus variables su valor numérico es igual a cero.

Por ejemplo:

$$\text{Sea: } P(x) = (a - 3)x^3 + (b + 1)x^2 + (c + 4)x + d$$

$$\text{Si: } P(x) = 0 \Rightarrow a = 3; b = -1; c = -4; d = 0$$

Ejemplos

- Calcular ab en el siguiente polinomio homogéneo:

$$P(x, y, z) = x^{(a-b)^{a-b}} + 2y^{(a-b)^{a-b}} + 5z^{(a-b)^{2b}}$$

Resolución:

Si es homogéneo se cumple que:

$$(a + b)^{a-b} = (a - b)^{a-b} = (a + b)^{2b}$$

$$(I) \qquad (II) \qquad (III)$$

$$\text{De (I) y (III): } a - b = 2b \Rightarrow a = 3b$$

$$\text{De (II) y (III): } (2b)^{4b} = (4b)^{2b}$$

Ordenando en forma adecuada:

$$[(2b)^2]^{2b} = (4b)^{2b} \Rightarrow (2b)^2 = 4b \Rightarrow 4b^2 = 4b$$

$$b = 1 \Rightarrow a = 3 \quad \therefore ab = 3$$

- Sabiendo que $P(x) = ax^2 + b$ y además

$$P[P(x)] = 8x^4 + 24x^2 + c.$$

$$\text{Calcular: } a + b + c$$

Resolución:

$$\text{Calculamos: } P[P(x)]$$

$$P[P(x)] = a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b$$

$$\text{Luego: } a^3x^4 + 2a^2bx^2 + ab^2 + b = 8x^4 + 24x^2 + c$$

$$\text{Donde: } a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$2a^2b = 24 \Rightarrow b = 3$$

$$ab^2 + b = c \Rightarrow c = 21$$

Se pide: $a + b + c = 2 + 3 + 21$

$$\therefore a + b + c = 26$$

3. En la identidad:

$$ax^3 + bx^2 + cx = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + x^2$$

hallar: a, b, c y dar el valor de: $E = a^{-b/2-c/2-1}$

Resolución:

Se sabe:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para la identidad:

$$ax^3 + bx^2 + cx = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$$

Efectuando en el segundo miembro:

$$ax^3 + bx^2 + cx = \frac{2x^3 + 3x^2 + x}{6}$$

$$ax^3 + bx^2 + cx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$\text{Luego: } a = \frac{1}{3}; b = \frac{1}{2}; c = \frac{1}{6}$$

Reemplazando en la expresión pedida:

$$E = a^{-b/2-3} = a^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$$

$$\therefore E = 81$$

4. Si el polinomio:

$$P(x) = (4a+2)x^{2a-30} + 4ax^{2a-29} + (4a-2)x^{2a-28} + \dots$$

es completo y ordenado. Calcular a y el grado del polinomio P sabiendo que sus coeficientes son positivos.

Resolución:

Supongamos que el polinomio está completo y ordenado en forma creciente:

$$\text{Luego: } 2a - 30 = 0 \Rightarrow a = 15$$

$$\text{Además: } P(x) = (4a+2)x^0 + 4ax + (4a-2)x^2 + (4a-4)x^3 + \dots + (4a-58)x^n$$

De donde el número de términos es:

$$n.^\circ \text{ de términos} = \frac{\text{último} - \text{anterior al primero}}{\text{razón}}$$

$$n.^\circ \text{ de términos} = \frac{(4a-58) - (4a+2)}{-2} = 31$$

También: $n.^\circ \text{ de términos} = GA(P) + 1$

$$\therefore GA(P) = 30$$

5. Si el polinomio:

$$P(x) = (a^2 + 3ab + b^2)x^3 + (b^2 + 5bc + c^2)x^2 + (c^2 + 7ca + a^2)x + abc - 3$$

es idénticamente nulo. Calcular:

$$L = (a-b)^4c^2 + (b-c)^4a^2 + (c-a)^4b^2$$

Resolución:

Como $P(x) = 0$, se cumple:

- $a^2 + 3ab + b^2 = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 = -3ab$
- $b^2 + 5bc + c^2 = 0 \Rightarrow b^2 + c^2 = -5bc$
- $c^2 + 7ca + a^2 = 0 \Rightarrow c^2 + a^2 = -7ca$
- $abc - 3 = 0 \Rightarrow abc = 3$

Transformando L se tendrá:

$$L = (a^2 + b^2 - 2ab)^2c^2 + (b^2 + c^2 - 2bc)^2a^2 + (c^2 + a^2 - 2ac)^2b^2$$

Reemplazando:

$$L = (-5ab)^2c^2 + (-7bc)^2a^2 + (-9ca)^2b^2$$

$$L = 25(\underbrace{abc}_3)^2 + 49(\underbrace{abc}_3)^2 + 81(\underbrace{abc}_3)^2$$

$$L = 25(3)^2 + 49(3)^2 + 81(3)^2 \therefore L = 1395$$

6. Calcular la suma de los coeficientes del siguiente polinomio homogéneo:

$$P(x, y) = mn x^{4n} y^{3n-2} + 2n x^{2m} y^{5n+4} - m x^{3m} y^{5n+1}$$

Resolución:

Como es homogéneo:

$$7n + 2 = 2m + 5n + 4 = 3m + 5n + 1$$

$$\Rightarrow m = 3 \wedge n = 4$$

$$\Sigma \text{coef.} = mn + 2n - m$$

$$\Sigma \text{coef.} = 3(4) + 2(4) - 3 = 17$$

7. Si se cumple:

$$[n\sqrt{a}a^{n^2}]x^5 + ny^4x - n\sqrt{n}x^5 - 2xy^4 = 0$$

calcular el valor de a .

Resolución:

$$n\sqrt{a}a^{n^2} - n^{(1/n^2)} = 0 \wedge n - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$$

$$\frac{a^4}{a^2} = \frac{1}{2} = \frac{(\sqrt{2})^4}{2} \therefore a = \sqrt{2}$$

8. Si $a \neq b$ y se cumple:

$$a^b x^3 + a^a y^3 = b^{4a} x^3 + b^b y^3$$

calcular: $\sqrt[3]{ab}$

Resolución:

Como son idénticos:

$$a^b = b^{4a} \Rightarrow b = a^{\frac{b}{4a}}$$

$$a^a = b^b \Rightarrow b = a^{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{b}{4a} = \frac{a}{b} \Rightarrow b^2 = 4a^2 \Rightarrow b = 2a \vee b = -2a$$

$$\text{Si: } b = 2a \Rightarrow a^{2a} = (2a)^{4a}$$

$$a^{2a} = [(2a)^2]^{2a} \Rightarrow a = 4a^2 \Rightarrow 1 = 4a$$

$$\Rightarrow a = 1/4 \wedge b = 1/2$$

$$\therefore \sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

9. Calcular $abcd$ si: $P(x) = 2x^{d+c} - 3x^{a+b} + x^{a+c} - 4x^{b-1}$ es completo y ordenado descendientemente.

Resolución:

Como es completo y ordenado:

$$b - 1 = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} b = 1 \\ a + c = 1 \\ a + b = 2 \\ d + c = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 0 \\ a = 1 \\ d = 3 \end{array} \right.$$

$$\therefore abcd = 0$$

10. Siendo el polinomio:

$$Q(x, y) = 5x^{2a+1}y^{b+1} - \sqrt{3}x^{(bc)^{b-c}}y^6 + x^{a^3-3}y^{a+5}$$

homogéneo. Calcular: $a + b + c$ donde: $[a; b; c] \in \mathbb{Z}^+$ **Resolución:**

$$2a + 62 = (bc)^{b-c} + 6 = a^3 + a + 2$$

$$\Rightarrow a^3 + a + 2 = 2a + 62 \Rightarrow a^3 - a = 60$$

$$a(a^2 - 1) = 4(4^2 - 1) \Rightarrow a = 4$$

$$(bc)^{b-c} + 6 = 4^3 + 4 + 2$$

$$(bc)^{b-c} = (4 \times 1)^{4-1}$$

$$\Rightarrow b = 4 \wedge c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 4 + 4 + 1 = 9$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Si:
- $P(x; y; z) = 2(xy)^{a+2}z^b + 9x^{ab+3} - 5(xz^2)^3y^{b-1}$

es homogéneo, calcular: $\sqrt[3]{b+a^2}$ **Resolución:**

$$P(x; y; z) = 2x^{a+2}y^{a+2}z^b + 9x^{ab+3} - 5x^3z^6y^{b-1}$$

$$2a + b + 4 = ab + 3 = b + 8 \Rightarrow a = 2 \wedge b = 5$$

$$\therefore \sqrt[3]{b+a^2} = \sqrt[3]{5+2^2} = 3$$

2. Si los polinomios siguientes poseen el mismo valor numérico para todo
- x
- .

$$P(x) = (a + b + c)x^2 + (a^2 + b^2 + c^2)x + abc$$

$$S(x) = nx^2 + n^2x + 2n^3$$

Hallar: $K = (a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)$ en función de n .**Resolución:**Como poseen el mismo valor numérico para x entonces los polinomios son idénticos:

$$a + b + c = n; a^2 + b^2 + c^2 = n^2 \wedge abc = 2n^3$$

$$K = (n - 2c)(n - 2b)(n - 2a)$$

$$K = n^3 - 2n^2(a + b + c) + 4n(ab + ac + bc) - 8abc \quad \dots(I)$$

como: $a + b + c = n$

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)}{n^2} = n^2$$

 $ab + bc + ac = 0$; en (I):

$$K = n^3 - 2n^2(n) + 4n(0) - 8(2n^3)$$

$$\therefore K = -17n^3$$

3. Calcular el valor de
- mnp
- , siendo:
- $P(x) <> Q(x)$
- donde:

$$P(x) = m(x^3 + 1) + n(x - 2)(x^2 - 1) + p(x - 2)(x^2 - x + 1)$$

$$Q(x) = 3(x^3 - 2x^2 + 5x - 4)$$

Resolución:

$$P(x) = mx^3 + m + nx^3 - nx - 2nx^2 + 2n + px^3 - 3px^2 + 3xp - 2p$$

$$P(x) = (m + n + p)x^3 + (-2n - 3p)x^2 + (3p - n)x + 2n + m - 2p$$

$$Q(x) = 3x^3 - 6x^2 + 15x - 12$$

$$\left. \begin{array}{l} m + n + p = 3 \\ -2n - 3p = -6 \\ 3p - n = 15 \\ 2n + m - 2p = -12 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m = 2 \\ p = 4 \\ n = -3 \end{array}$$

$$\therefore mnp = -24$$

4. El polinomio dado es homogéneo:
- $P(x; y) = ax^{a+3} - abx^{a-1}y^{b+2} + 2by^{b+8}$
- hallar la suma de sus coeficientes.

Resolución:

Como es homogéneo:

$$a + 3 = a + b + 1 = b + 8 \Rightarrow b = 2; a = 7$$

$$\text{La } \Sigma \text{coef.} = a - ab + 2b$$

$$= 7 - 14 + 4 = -3$$

5. Determinar:
- $(a + b + c)$
- sabiendo que el polinomio
- $P(x)$
- es idénticamente nulo.

$$P(x) = 3x^2 + ax - 5 + bx^2 - 11x + c$$

Resolución:

$$P(x) = (3 + b)x^2 + (a - 11)x + c - 5 = 0$$

$$3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$a - 11 = 0 \Rightarrow a = 11$$

$$c - 5 = 0 \Rightarrow c = 5 \quad \therefore a + b + c = 13$$

6. Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio homogéneo.

$$P(x; y; z) = a^3x^{a^b} - b^2y^{b^a} + abz^{a^{a-b}}$$

Resolución:

$$a^b = b^a = a^{a-b} \Rightarrow a^b = a^{a-b} \Rightarrow a^{2b} = a^a \Rightarrow a = 2b$$

$$a^b = b^a \Rightarrow (2b)^b = b^{2b}$$

$$2^b b^b = b^{2b} \Rightarrow 2^b = b^b \Rightarrow b = 2 \wedge a = 4$$

$$\Sigma \text{coef.} = a^3 - b^2 + ab = 4^3 - 2^2 + 8 = 68$$

7. Hallar el grado de homogeneidad del polinomio.

$$F(x; y) = 8x^{m+n}y^n - 5x^{m+6}y^{n+4}$$

Si se sabe que el grado respecto a x es menor en dos unidades que el grado respecto a y .**Resolución:**

Como es homogéneo:

$$m + 2n = m + n + 10 \Rightarrow n = 10$$

$$GR_x(F) = m + n = m + 10$$

$$GR_y(F) = n + 4 = 14$$

$$GR_x(F) - GR_y(F) = 2$$

$$m + 10 - 14 = 2 \Rightarrow m = 6$$

$$\text{Así: } F(x; y) = 8x^{16}y^{10} - 5x^{12}y^{14}$$

∴ El grado absoluto es 26.

8. Si el polinomio $P(x)$ es completo y ordenado ascendentemente, calcular el valor de $(2m - 3n + 4p)$:

$$P(x) = 3x^{p-n+5} - 4x^{n-m+3} + 7x^{m-6}$$

Resolución:

Como es completo y ordenado ascendentemente:

$$\left. \begin{array}{l} p - n + 5 = 0 \\ n - m + 3 = 1 \\ m - 6 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p = +1 \\ n = +6 \\ m = 8 \end{array}$$

$$\therefore (2m - 3n + 4p) = 2(8) - 3(6) + 4(1) = 2$$

9. Si el polinomio $P(x; z)$ es completo, homogéneo y ordenado en forma decreciente respecto a x y en forma creciente respecto a z . Calcular $(a + b)$.

$$P(x; z) = x^{a+1}z^{b+2} + x^a z^{b+3} - 5x^{a-1}z^{b+4} - 7x^{b+2}z^{a+1}$$

Resolución:

Decreciente respecto a x :

$$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$$

$$a - 1 = 1 \Rightarrow a = 2 \quad \therefore a + b = 0$$

10. El polinomio $F(x)$ toma un valor constante k para todo x , y conociendo que:

$$F(x) = (ax + 2)(bx - 1) - x^2; a > 0$$

$$\text{Calcular: } E = b^{a^k}$$

Resolución:

$$F\left(\frac{1}{b}\right) = -\left(\frac{1}{b}\right)^2 = k$$

$$F\left(\frac{-2}{a}\right) = -\left(\frac{-2}{a}\right)^2 = k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2} = \frac{4}{a^2} \Rightarrow a = 2b$$

$$F(1) = (a + 2)(b - 1) - 1 = -\left(\frac{1}{b}\right)^2$$

$$2b^2 - 2 - 1 = -\left(\frac{1}{b}\right)^2$$

$$2b^2 + \frac{1}{b^2} = 2(1)^2 + \frac{1}{(1)^2}$$

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \wedge a = 2 \quad \therefore E = (1)^{2^k} = 1$$

11. Calcular el término independiente del siguiente polinomio racional:

$$P(x) = x^{n-1} + 2x^{n-2} + 3x^{n-3} + \dots + (n-2)x^2 + (n-1)x + n$$

Si al evaluarlo en $P(2)$ resulta 1013.

Resolución:

$$P(2) = 2^{n-1} + 2(2^{n-2}) + 3(2^{n-3}) + \dots + (n-2)(2^2) + (n-1)2 + n = 1013$$

$$2P(2) = 2^n + 2(2^{n-1}) + 3(2^{n-2}) + \dots + (n-2)(2^3) + (n-1)(2^2) + 2n = 2026$$

$$P(2) = 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} \dots + 2^2 + 2 - n = 1013$$

$$P(2) = \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} - (n + 1) = 1013$$

$$2^{n-1} - (n + 2) = 1013 = 2^{9+1} - (9 + 2)$$

$$n = 9 \quad \therefore t_1 = 9$$

12. Calcular: $z = \frac{a^{-1} + b^{-1}}{c^{-1}}$; $abc \neq 0$

Si el polinomio:

$$P(x) = (ab - bc - m^2)x^4 + (bc - ca - 4mn)x^2 + (ca - ab - 4n^2)$$

es idénticamente nulo.

Resolución:

Como el polinomio es idénticamente nulo.

$$\begin{array}{rcl} ab - bc - m^2 & = & 0 \\ bc - ca - 4mn & = & 0 \\ ca - ab - 4n^2 & = & 0 \end{array} \quad \downarrow (+)$$

$$m^2 + 4mn + 4n^2 = 0$$

$$(m + 2n)^2 = 0 \Rightarrow m = -2n \quad \dots (I)$$

$$ab - bc - m^2 = 0$$

$$ca - ab - m^2 = 0$$

$$2ab = c(a + b) \Rightarrow ab = \frac{(a + b)c}{2}$$

$$\therefore z = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{c}} = \frac{\frac{2ab}{c(a+b)}}{\frac{1}{ab}} = \frac{2ab}{ab} = 2$$

13. Se tienen dos polinomios completos y ordenados $P(x)$ y $Q(x)$, si se verifica que la suma de grados relativos de los términos de $P(x)$ exceden en 24 a la suma de grados relativos de los términos de $Q(x)$ y que el grado del producto de multiplicar ambos es 15; hallar el grado absoluto de la suma de ellos.

Resolución:

$$\text{Sea: } P(x) = a + bx + cx^2 + \dots + zx^n$$

la suma de grados relativos a x :

$$\Sigma \text{grados} = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Sea: } Q(x) = t + fx + kx^2 + \dots + ux^m$$

la suma de grados relativos a x :

$$\Sigma \text{grados} = 1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$$

$$\text{Así: } \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2} = 24$$

$$\Rightarrow (n - m)(n + m + 1) = 48 \quad \dots (I)$$

El grado del producto es: $m + n = 15$

$$n - m = 3 \Rightarrow m = 6 \Rightarrow n = 9$$

∴ El grado de la suma de ellos es 9.

14. Encontrar el valor de N siendo $P(x; y) = 4x^{a+3}y^{2b-5} (5^5x^{a+3}y^{4b} + 4^7x^{2b}y^{7b+3})$.

Un polinomio homogéneo, además:

$$N^2 = a^2b^{-2} + 2ab^{-1} + 29.$$

Resolución:

Efectuando la multiplicación indicada en el polinomio $P(x; y)$ se consigue:

$$P(x; y) = 4(5^6) \underbrace{x^{2a+6}y^{6b-5}} + 4(8) \underbrace{x^{a+2b+3}y^{9b-2}}$$

Grado de cada término: $2a + 6b + 1$; $a + 11b + 1$.

Por ser polinomio homogéneo se deberá cumplir lo siguiente:

$$2a + 6b + 1 = a + 11b + 1 \Rightarrow a = 5b \quad \dots (I)$$

Por dato:

$$N^{-2} = a^2 b^{-2} + 2ab^{-1} + 29 \Rightarrow N^{-2} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{b}\right) + 29 \dots (II)$$

Reemplazando (I) en (II) se consigue:

$$N^{-2} = (5)^2 + 2(5) + (29) = 64$$

$$\Rightarrow N^{-1} = \sqrt{64} = 8 \quad \therefore n = 1/8$$

15. Hallar el término independiente del polinomio:

$$P(x) = x^{3n-m} + 2x^{2n} + 3x^{3m-b} + 4x^{m-n+b} + \dots + qx^{a-5}$$

Si es completo y ordenado en forma decreciente.

Resolución:

Por ser un polinomio completo y ordenado en forma decreciente se cumple:

$$(3n - m) - (2n) = 1 \Rightarrow n - m = 1 \quad \dots (I)$$

$$(3m + b) - (m + n + b) = 1 \Rightarrow 2m - n = 1 \quad \dots (II)$$

Sumando (I) y (II): $m = 2$, luego reemplazando en (I): $n = 3$

$a - 5 = 0 \Rightarrow a = 5$; ahora el polinomio $P(x)$ será:

$P(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + \dots + qx^0$ donde q es su término independiente.

Notar que en cada término el coeficiente y el exponente suman: 8, en consecuencia: $q + 0 = 8$

$$\therefore q = 8$$

16. Indicar la suma de los coeficientes del siguiente polinomio:

$$P(x) = n^2 x^{2n-6} + (n^2 - 1)x^{2n-5} + (n^2 - 2)x^{2n-4} + \dots$$

si es completo y ordenado.

Resolución:

Observar que los exponentes de las variables en cada término van aumentando, en consecuencia se puede deducir que $P(x)$ es un polinomio completo y ordenado en forma creciente, es decir, su primer término deberá ser el término independiente; razón por la cual se plantea $2n - 6 = 0 \Rightarrow n = 3$. Con la finalidad de encontrar al último término, analicemos al polinomio $P(x) = 9x^0 + 8x + 7x^2 + 6x^3 + \dots$

Notar que los coeficientes disminuyen de 1 en 1, luego el último término a fin que el polinomio sea completo deberá ser: $1x^8$. Finalmente tenemos:

$$\Sigma \text{coef.} = 9 + 8 + 7 + \dots + 2 + 1$$

$$\therefore \Sigma \text{coef.} = 45$$

17. Si los polinomios: $P(x; y) = a^a x^2 + cxy + b^{4a} y^3$;

$$Q(x; y) = (9 - 2c)xy + a^b y^3 + b^b x^2$$

son idénticos, calcular: $\frac{c}{ab}$

Resolución:

Por ser polinomios idénticos se cumple:

$$\bullet a^a = b^b \quad \dots (I)$$

$$\bullet c = 9 - 2c \Rightarrow c = 3 \quad \dots (II)$$

$$\bullet b^{4a} = a^b \quad \dots (III)$$

Elevando a ambos miembros de (III) al exponente b :

$$(b^b)^{4a} = a^{b^2} \quad \dots (IV)$$

Reemplazando (I) en (IV) conseguimos lo siguiente:

$$a^{4a^2} = a^{b^2} \Rightarrow b^2 = 4a^2 \Rightarrow b = 2a \quad \dots (V)$$

$$\text{Reemplazando (V) en (I): } a^a = (2a)^{(2a)} = (4a^2)^a$$

$$\text{Por comparación: } a = 4a^2 \Rightarrow a = \frac{1}{4};$$

$$\text{De (V): } b = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{c}{a \cdot b} = 24$$

18. En cuanto difieren los coeficientes n y k para que con cualquier valor de x se verifica que:

$$27 + 8x = n(x + 4) + k(2x + 3).$$

Resolución:

De acuerdo al enunciado la relación mostrada corresponde a un par de polinomios idénticos:

$27 + 8x = n(x + 4) + k(2x + 3)$, reacomodando la identidad: $8x + 27 = (n + 2k)x + (4n + 3k)$, luego se cumple:

$$\left. \begin{aligned} n + 2k &= 8 \\ 4n + 3k &= 27 \end{aligned} \right\} \text{Resolviendo se obtiene: } n = 6 \wedge k = 1.$$

$$\therefore n - k = 5$$

19. Dado el siguiente polinomio idénticamente nulo:

$$P(x) = b(x^2 + x) - 2ax^2 - 3cx + c - a + 1$$

Calcular el valor de: $ac - b$

Resolución:

Reacomodando el polinomio conseguimos:

$$P(x) = (b - 2a)x^2 + (b - 3c)x + (c - a + 1), \text{ como:}$$

$P(x) = 0$. Se debe cumplir lo siguiente:

$$b - 2a = 0 \Rightarrow a = \frac{b}{2} \quad \dots (I)$$

$$b - 3c = 0 \Rightarrow c = \frac{b}{3} \quad \dots (II)$$

$$c - a + 1 = 0 \quad \dots (III)$$

Reemplazando (I) $\wedge$ (II) en (III):

$$\frac{b}{3} - \frac{b}{2} + 1 = 0 \Rightarrow b = 6; \text{ de (I) } \wedge \text{ (II): } a = 3 \wedge c = 2$$

$$\therefore ac - b = 0$$

20. Proporcionar el valor: $n + t + a$, si se cumple:

$$50x^3 + 5x^2 - 8x + 1 = n(ax + 1)^n (tx - n)^n$$

Resolución:

De la identidad: $n + a = 3$

Haciendo $x = 0$ tenemos: $1 = n(-n)^n$

Como $a; n \in \mathbb{N} \Rightarrow a = 2 \wedge n = 1$

Por coeficiente principal:

$$50 = n(a)^n (t)^n \Rightarrow 50 = (2)t^2 \Rightarrow t = 5$$

$$\therefore n + t + a = 8$$

21. Calcular la suma de coeficientes del siguiente polinomio completo:

$$P(x) = c(x^a + x^b) + a(x^b + x^c) + b(x^a + x^c) + abc$$

Resolución:

Escribiendo así al polinomio:

$$P(x) = (b + c)x^a + (a + c)x^b + (a + b)x^c + abc$$

Se pide: $\Sigma \text{coef. } P(x) = P(1) = 2(a + b + c) + abc$

Nota

$\{a; b; c\} = \{1; 2; 3\}$ pues $P(x)$, es un polinomio completo de 4 términos, por lo tanto, es de 3.º grado.

Notar que:

$$a + b + c = 6 = 1 + 2 + 3 \wedge abc = 6 = (1)(2)(3)$$

$$\therefore P(1) = 18$$

22. En el polinomio:

$$P(x + 1) = (2x + 1)^n + (x + 2)^n - 128(2x + 3),$$

donde n es impar, la suma de coeficientes y el término independiente suman 1, hallar el valor de n .

Resolución:

Recordar que para un polinomio se cumple:

$$P(1) = \Sigma \text{ de coeficientes; } P(0) = TI$$

$$\text{Dato: } P(1) + P(0) = 1 \quad \dots (I)$$

$$\text{Como: } P(x + 1) = (2x + 1)^n + (x + 2)^n - 128(2x + 3).$$

$$\text{Hagamos } x = -1 \Rightarrow P(0) = -128$$

Haciendo $x = 0$ tenemos: $P(1) = 2^n - 383$. Reemplazando en (I) tenemos lo siguiente:

$$2^n - 383 - 128 = 1$$

$$\therefore n = 9$$

23. Si P es un polinomio completo y ordenado:

$$P(x) = x^{3a-b} + 2x^{2a} + 3x^{3b-c} + x^{a-b-c} + \dots + x + 1$$

Hallar $P(x)$

Nota

Si: $P(x)$ es un polinomio completo y ordenado, entonces, la diferencia de grados relativos de dos términos consecutivos vale 1.

En nuestro caso, $P(x)$ está ordenado descendente.

$$(3a - b) - 2a = 1 \Rightarrow a - b = 1 \quad \dots (\alpha)$$

$$2a - (3b - c) = 1 \Rightarrow 2a - 3b + c = 1 \quad \dots (\beta)$$

$$(3b - c) - (a + b - c) = 1 \Rightarrow 2b - a = 1 \quad \dots (\theta)$$

$$(\alpha) + (\theta): b - 2; \text{ en } (\alpha): a = 3, \text{ en } (\beta):$$

$$6 - 6 + c = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\therefore P(x) = x^7 + 2x^6 + 3x^5 + x^4 + \dots + x + 1$$

24. Si $P_0; P_1; P_2; \dots P_n$ son polinomios definidos por:

$$P_0(x) = x^3 + 213x^2 - 67x - 2000$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x - n), \text{ para } n = 1; 2; 3; \dots$$

Hallar el valor del coeficiente de x en el polinomio $P_6(x)$.

Resolución:

$$P_0(x) = x^3 + 213x^2 - 67x - 2000$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x - n)$$

$$\bullet P_1(x) = P_0(x - 1) \\ = (x - 1)^3 + 213(x - 1)^2 - 67(x - 1) - 2000$$

$$\bullet P_2(x) = P_1(x - 2) \\ = (x - 3)^3 + 213(x - 3)^2 - 67(x - 3) - 2000$$

$$\bullet P_3(x) = P_2(x - 3) \\ = (x - 6)^3 + 213(x - 6)^2 - 67(x - 6) - 2000$$

$$\bullet P_4(x) = P_3(x - 4) \\ = (x - 10)^3 + 213(x - 10)^2 - 67(x - 10) - 2000$$

$$\bullet P_5(x) = P_4(x - 5) \\ = (x - 15)^3 + 213(x - 15)^2 - 67(x - 15) - 2000$$

$$\bullet P_6(x) = P_5(x - 6) \\ = (x - 21)^3 + 213(x - 21)^2 - 67(x - 21) - 2000$$

De aquí:

$$\text{Término en } x: 3(x)(21)^2 + 213[-2(x)(21)] - 67(x)$$

$$\therefore \text{Coef. de } x = 3(21)^2 - 213(42) - 67 = -7690$$

25. Si P es un polinomio homogéneo definido por:

$$P(x; y) = 2^{-1}(a + b)x^{a^2+n} + 3^{-1}(a - b)x^{b^2+n}y^n + 12y^{b^2+12}$$

Hallar el producto de sus coeficientes.

Resolución:

Si P es polinomio homogéneo, el grado en cada uno de sus términos es el mismo.

$$\Rightarrow a^2 + n = b^2 + 2n = b^2 + 12$$

$$(I) \quad (II) \quad (III)$$

$$\bullet (II) = (III): n = 6$$

$$\bullet (I) = (III): a^2 + 6 = b^2 + 12 \Rightarrow a^2 - b^2 = 6$$

Nos piden:

$$\therefore \text{Producto de coeficientes} = \frac{1}{2}(a + b)\left(\frac{1}{3}\right)(a - b)(12) \\ = 2(a^2 - b^2) = 2(6) = 12$$

26. Si P es un polinomio completo y ordenado en forma descendente definido por:

$$P(x) = qx^3 + \sqrt{p+6}x^{2m-6} + \sqrt[3]{5n+8}x^{5m+n-19} + \left(\frac{m}{4} + 2\right)x^{p+n-3}$$

tal que la suma de sus coeficientes es $m + n + p$, hallar el valor de $\sqrt[3]{q}$.

Resolución:

Por ser completo y ordenado en forma descendente vemos que:

$$\bullet 2m - 6 = 2 \Rightarrow m = 4$$

$$\bullet 5m + n - 19 = 1 \Rightarrow n = 0$$

$$\bullet p + n - 3 = 0 \Rightarrow p = 3$$

Además: $\Sigma \text{coef.} = q + 3 + 2 + 3$

$$\text{Por dato: } q + 8 = \frac{m + n + p}{7}$$

$$\Rightarrow q = -1 \quad \therefore \sqrt[3]{q} = -1$$

27. Si: $P(x; y)$ es un polinomio homogéneo definido por:

$$P(x; y) = (a + 1)x^{2a-1}y^{a^2-1} + (a^2 + 1)x^{a^2-2}y^a$$

Hallar el número de términos que le faltan para ser completo.

Resolución:

Por ser homogéneo, entonces:

$$GA(\text{término 1}) = GA(\text{término 2})$$

$$a^2 + 2a - 2 = a^2 + a + 2$$

$$\text{De aquí: } a = 4 \Rightarrow P(x; y) = 5x^7y^{15} + 17x^{18}y^4$$

Luego, el polinomio P será homogéneo y completo respecto a x e y , de $GA = 22$, cuando sea de la forma:

$$P(x; y) = \underbrace{Ax^{22} + Bx^{21}y + \dots + 17x^{18}y^4}_{4 \text{ términos}}$$

$$+ \underbrace{Ex^{17}y^5 + \dots + 5x^7y^{15}}_{10 \text{ términos}} + \underbrace{\dots + My^{22}}_{7 \text{ términos}}$$

$\therefore$ n.º de términos faltantes: 21

28. Si: P y Q son dos polinomios definidos por:

$$P(x; y; z) = (x - y + z)^4 - (z - y - x)^4$$

$$Q(x; y; z) = (x + y - z)^4 - (y - x - z)^4$$

Hallar: $P(x; y; z) + Q(x; y; z)$

Resolución:

Como: $(k)^{2n} = (-k)^{2n}$; $2n$ es par.

Aplicando en P y Q (en los segundos paréntesis):

$$P(x; y; z) = (x - y + z)^4 - (x + y - z)^4 \quad \downarrow \quad (+)$$

$$Q(x; y; z) = (x + y - z)^4 - (x - y + z)^4 \quad \downarrow \quad (-)$$

$\therefore$ Sumando: $P(x; y; z) + Q(x; y; z) = 0$

29. Si: $P(x; y)$ es un polinomio completo y ordenado en forma creciente con respecto a cualquiera de las variables, tal que la suma de los grados del primer y último término de P es 100, hallar el grado del término 21, del polinomio.

Resolución:

De acuerdo a lo planteado, suponemos al polinomio $P(x; y)$, así:

$$P(x; y) = A + Bxy + cx^2y^2 + Dx^3y^3 + \dots + Mx^ny^n$$

De aquí:

$$\bullet \quad GA(t_1) = 2(0) = 0$$

$$\bullet \quad GA(t_2) = 2(1) = 2$$

$$\bullet \quad GA(t_3) = 2(2) = 4$$

$$\bullet \quad GA(t_4) = 2(3) = 6$$

$$\vdots$$

$$\therefore GA(t_{21}) = 2(20) = 40$$

30. Si P y Q son dos polinomios definidos por:

$$P(x) = ax^2 + px - r$$

$$Q(x) = bx^2 - qx - t$$

Tal que: $R(x) = 2P(x) + 3Q(x)$

$$S(x) = 3P(x) - 2Q(x)$$

R y S son polinomios equivalentes, hallar el valor

$$\text{de: } M = \frac{a-b}{a+b} + \frac{p+q}{p-q} + \frac{r-t}{r+t}$$

Resolución:

$$P(x) = ax^2 + px - r$$

$$Q(x) = bx^2 - qx - t$$

Por dato: $2P(x) + 3Q(x) <> 3P(x) - 2Q(x)$

o también: $5Q(x) <> P(x)$

Reemplazando: $5bx^2 - 5qx - 5t <> ax^2 + px - r$

De aquí: $5b = a$; $-5q = p$; $5t = r$

$$\text{En lo pedido: } M = \frac{4b}{6b} + \frac{-4q}{-6q} + \frac{4t}{6t}$$

$$\therefore M = 3\left(\frac{4}{6}\right) = 2$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



PROBLEMA 1 (UNI 2005 - II)

Indique la verdad o falsedad de los siguientes enunciados:

- I. Sea $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, $d \neq 0$. Si P tiene tres raíces reales, entonces $P(1/x)$ tendrá las mismas raíces.
- II. Todo polinomio complejo siempre tiene raíces complejas y sus respectivas conjugadas.
- III. Si la suma de las raíces de un polinomio es racional, entonces cada una de ellas también es racional.

A) FFF

B) FVV

C) VFV

D) VVF

E) VVV

Resolución:

De los enunciados:

- I. Sea: $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $a \neq 0$, $d \neq 0$. Si $P(x)$ tiene tres raíces reales, entonces $P(1/x)$ tendrá las mismas raíces.

$$\text{Analizando: } P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$\Rightarrow a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0 \quad \dots (x)$$

Donde: x_1 ; x_2 ; x_3 son las raíces de $P(x)$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a\left(\frac{1}{x}\right)^3 + b\left(\frac{1}{x}\right)^2 + c\left(\frac{1}{x}\right) + d$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{1}{x} - x_1\right)\left(\frac{1}{x} - x_2\right)\left(\frac{1}{x} - x_3\right) = 0 \quad \dots(\beta)$$

Donde: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}$ son las raíces de $P\left(\frac{1}{x}\right)$

De (α) y (β) : se concluye que las raíces de $P(x)$ son diferentes a las de $P\left(\frac{1}{x}\right)$ (F)

II. Todo polinomio complejo siempre tiene raíces complejas y sus respectivas conjugadas.

Sea el polinomio complejo: $p(x) = (x - i)(x + 1)$

- Donde: $x_1 = i; x_2 = -1$ son las raíces de $p(x)$
- Observamos que sus raíces no son conjugadas (F)

III. Si la suma de las raíces de un polinomio es racional, entonces cada una de ellas también es racional.

• Analizando: Sea el polinomio: $p(x) = 9x^2 + 6x - 1$

$$\text{Donde: } x_1 = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} \quad \wedge \quad x_2 = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}$$

son las raíces de $p(x)$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2}{3}$$

Observamos que la suma de las raíces es racional pero sus raíces son irracionales (F)

$\therefore$ FFF

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2009 - II)

Sea $P(x) = x^3 - 3ax^2 - a^2x + 3a^3$, donde $a > 0$ y $Q(x) = -P(x - a)$. Diga cuál de las siguientes afirmaciones es correcta:

- A) $Q(x) \geq P(x), \forall x < 0$
- B) $Q(x) \geq P(x), \forall x \in (0; a)$
- C) $P(x) \geq Q(x), \forall x \in (a; 2a)$
- D) $Q(x) \geq P(x), \forall x \in (2a; 3a)$
- E) $P(x) \geq Q(x), \forall x > 3a$

Resolución:

$$P(x) = x^3 - 3ax^2 - a^2x + 3a^3, a > 0$$

$$\text{y } Q(x) = -P(x - a)$$

Factorizando $P(x)$:

$$P(x) = x^2(x - 3a) - a^2(x - 3a)$$

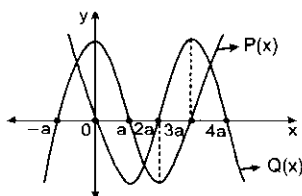
$$P(x) = (x - 3a)(x^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x - a)(x + a)(x - 3a), a > 0$$

$$\text{Cálculo de } Q(x): Q(x) = -P(x - a)$$

$$= -(x - 2a)(x)(x - 4a)$$

Graficando las funciones, tenemos:



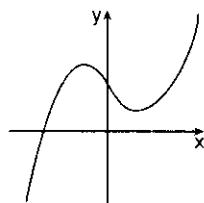
$\therefore$ Se observa del gráfico:

$$Q(x) \geq P(x), \forall x \in (2a; 3a)$$

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes reales cuya gráfica se muestra a continuación.



Indique la sucesión correcta después de verificar la veracidad o falsedad de las siguientes proposiciones:

- I. $P(x)$ tiene grado 3
- II. $P(x)$ tiene solo 2 raíces complejas
- III. Existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $P(x + c)$ no tiene raíces complejas.

A) VVV

B) VVF

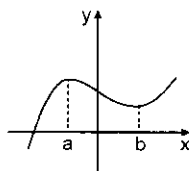
C) VFF

D) FFV

E) FFF

Resolución:

Tenemos:

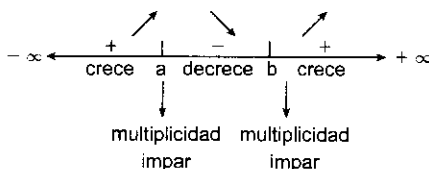


Del gráfico:

Si: $x \in (-\infty; a) \cup (b; +\infty) \Rightarrow P(x)$ es creciente

Si: $x \in (a; b) \Rightarrow P(x)$ es decreciente

Entonces:



De donde $P'(x) = K(x - a)^{2n-1}(x - b)^{2m+1}; n, m \in \mathbb{Z}_0^+$

Con lo cual se deduce que el grado de $P(x)$ es cualquier número impar.

- I. No necesariamente $P(x)$ tiene grado 3 (F)
- II. No necesariamente serán 2 raíces complejas, ya que del gráfico $P(x)$ tiene una raíz real y por ser de grado impar las demás raíces serán complejas (F)
- III. El desplazamiento horizontal no altera la cantidad de raíces de $P(x)$ (F)

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - I)

Si $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$ son raíces de:

$$x^4 - ax^2 + b = 0, \text{ halle: } a - b$$

- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

Resolución:

Como: $x_2 = -1$ es raíz de la ecuación.

$$\text{Reemplazamos: } (-1)^4 - a(-1)^2 + b = 0$$

$$\Rightarrow 1 - a + b = 0 \quad \therefore a - b = 1$$

Clave: C**PROBLEMA 5 (UNI 2012 - II)**

El gráfico del polinomio $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ es tangente en $(1; 1)$ a la recta $y = 1$. Además la recta

$y = 1$ interseca al gráfico cuando $x = 2$, $x = 4$, siendo $P(2) = P(4) \neq 0$, siendo $P(2) = P(4) \neq 0$. Calcule el polinomio $P(x) - 1$

- A) $x^2(x-2)(x-4)$
B) $(x-1)^2(x-3)(x-5)$
C) $(x+1)^2(x-1)(x-3)$
D) $(x-1)^2(x-2)(x-4)$
E) $(x+1)^2(x-2)(x-4)$

Resolución:

Definimos el polinomio:

$$H(x) = P(x) - 1 = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d - 1$$

$$H(1) = 0; H(2) = 0; H(4) = 0$$

$x = 1$ raíz de multiplicidad 2

$$\therefore H(x) = P(x) - 1 = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

Clave: D



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Se tienen los polinomios:

$$P(x; y) = x^{m^2+1}y^{m-n} + x^{m^2} + 2x^{m^2-1}y^{m+n-1} + y^{m-n+4}$$

$P(x; y) = x^{m+7}y^{n^3-6} - x^m y^{n^3-2} + 3x^{m-1}y^{n^3-3}$. Si el polinomio P es de grado 10 respecto a x , además en el polinomio Q el grado de x es igual que y aumentado en 4; calcular el grado de P .

- A) 13 B) 7 C) 14
D) 10 E) 12

2. Hallar la suma de coeficientes del siguiente polinomio en variables x, y, z :

$$P(x; y; z) = m^2x^{m-3}y^{7-p}z^{6-n} + n^2x^p y^6 m^2z^2 + p^2x^{n-m}y^{p-3}z^{m-1}$$

- A) 76 B) 64 C) 57
D) 67 E) 77

3. ¿Cuántos términos posee el polinomio homogéneo. $P(x; y) = x^m + x^{m-2}y^2 + x^{m-4}y^4 + \dots$. Si el grado relativo a y es 40?

- a) 19 b) 21 c) 23
d) 25 e) 7

4. Encontrar la suma de coeficientes del siguiente polinomio completo y ordenado.

$P(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n$; siendo:

$$a_n = \frac{(n+1)n}{2}; n \in \mathbb{N}$$

- A) $\frac{n}{2}(n-1)$ B) $\frac{n}{2}(n+1)$
C) $\frac{n}{6}(n+1)(n+2)$ D) $\frac{n^2-1}{6}$
E) $\frac{n+3}{5}$

5. Si el polinomio es completo y ordenado.

$P(x) = x^{2a-b+c} + x^{a-3b-2c} + x^{a+4b+8c} + x^{2a-b-4c} + \dots$ encontrar su número de términos.

- a) 24 b) 26 c) 27
d) 28 e) 29

6. Si el polinomio ordenado decrecientemente y completo.

$P(x) = x^{2n+1} + 2x^{n+3} - 3x^{m-2} + \dots$ posee $2m$ términos. Hallar α .

- A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

7. Siendo:

$P(x; y) = 2(mnx + y)x - (n+9)x^2 + (5m-4n)xy$. un polinomio idénticamente nulo, calcular el producto de los valores naturales de m y n .

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 2

8. Si: $P(x) = 3x^{2a-1}$ es una constante monómica. ¿Qué valor asume: a^2 ?

- A) 1/2 B) 4 C) 2
D) 1/4 E) FD

9. Si los términos: $\sqrt[n]{2x\sqrt{y}}$ $\wedge$ $\sqrt[n]{3y\sqrt{x}}$ son semejantes. ¿Cuál es su suma?

- A) $85x^2y^4$ B) $15xy^4$ C) $85xy^2$
D) $15x^2y^4$ E) $75xy$

10. Si la expresión: $M(x; y) = a^b x^{3a+b} y^{a-b} + dx^{2a-b} y^{b-4} + bcx^c y^d$. Puede reducirse a monomio, encontrar su coeficiente.

- A) $-3/2$ B) $-1/2$ C) -1
D) -2 E) $-2/3$

11. Si la expresión: $nx^{n-1}y^2$ es EARE clasifique al equivalente de la expresión: $\sqrt[n-1]{n^{-1}x^{n-4}y^{3n}}$

- A) EAI B) EARE C) EARF
D) EAR E) Expresión trascendente (ET)

12. Hallar a , si el equivalente de:

$M(x) = \sqrt[3]{3x^{65}} \sqrt[2]{21x^4} \sqrt[4]{x^a} \sqrt[2]{2x^a}$ es un monomio de grado: 8.

- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

13. Dado $P(x; y) = x^{n-6}y^{n-5} + \sqrt[3]{x^{2n-6}y^4} - 3x^{n-16}y^{n-10}$. Calcular su mínimo grado absoluto.

- A) 29 B) 30 C) 31
D) 32 E) 33

14. El grado de: $\left[\frac{\sqrt[3]{H(x)} P(x)}{Q^2(x)} \right]^n$ es $3n$. El grado de:

$\left[\frac{P(x) Q(x)}{\sqrt[3]{[H(x)]^2}} \right]^n$ es cero. Calcular el grado de: $\frac{\sqrt[3]{H(x)}}{Q(x)}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

15. Hallar el grado de homogeneidad del siguiente polinomio: $P(x; y) = xy^{n+1} - x^{(n+1)n} + y^{(n^2-1)n}$

- A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 11

16. Hallar el mínimo grado de homogeneidad diferente de la unidad para el polinomio:

$$P(x; y; z) = \sqrt[n]{x^m} y^a + \sqrt[n]{x^p} z^{3b} + \sqrt[n]{x^n} x^{5c}$$

- A) 13 B) 14 C) 15
D) 16 E) 17
17. Proporcionar el equivalente de: $\frac{n-c}{a-b}$, sabiendo que: $P(x) < Q(x)$.
 $P(x) = m(x+a)^2 + bx + c$; $Q(x) = ax^2 + mx + n$
A) a B) a/3 C) a/2
D) a/6 E) 1
18. La suma de los polinomios:
 $P(x) = (a+x)(b+cx) + ax + 4$; $Q(x) = (x+b)(x+2) + x$ origina un polinomio de grado cero. Calcular: $4cb^2$.
A) 9 B) -3 C) -9
D) 3 E) 6
19. Si: $P(x) \equiv Q(x)$, siendo $P(x) = x^3 - 4x^n$;
 $Q(x) = x^{n+2} + (m-2n)x$. Calcular: $\sqrt{n^2 - m^3}$
A) 9 B) 7 C) 5
D) 3 E) 1
20. A un polinomio completo y ordenado de una sola variable y de grado $4n$ se le suprimen todos los términos de grado impar, el polinomio resultante tiene $4n - 15$ términos. Hallar n .
A) 2 B) 9 C) 6
D) 7 E) 8
21. La suma de los siguientes polinomios:
 $P(x) = ax^3 + mnp$; $Q(x) = (b+c)x^3 - abcx$, origina un polinomio idénticamente nulo, según esto hallar el equivalente de:
$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 + 3mnp}{abc}$$

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7
22. Si: $P(x; y) = x^{a^2-b^2}y^4 + 5x^3y^{ab}$.
 $Q(x; y) = x^{a^3}y^{b^3} - 2x^{a^2-b^2}y^{-ab}$
son dos polinomios homogéneos, deducir un valor para: $E = \frac{1}{cb} - 1$
$$\frac{1}{a-b}$$

A) 9 B) 7 C) 5
D) 1 E) 3
23. Sabiendo que: $P(x) = 0$, calcular $b^2 - c^2$.
 $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 2) + ax^6 + bx^4 + cx^2 + d$
A) -147 B) 147 C) -174
D) 174 E) 171
24. Si: $a(x+5)^2 - b(x-5)^2 < 3(x+5)^2 + 4(2a+b)x$, calcular: $a+b$
A) 9 B) -9 C) 3
D) -3 E) 27
25. Si se cumple: $a(ax+y) - b(bx-y) < > 2(6x+y+4)$. Hallar $a^2 + b^2$.
A) 10 B) 20 C) 30 D) 40 E) 50
26. Dados:
 $P(x) = T(x^4 + 2)(x^4 + 3) + A(x^4 + 4)(x^4 + 3) + C(x^4 + 4)(x^4 + 2)$
 $Q(x) = 18x^8 + 7x^4 + 12$. Calcular: $3T + 6A + 4C$, a partir de: $P(x) \equiv Q(x)$.
A) -6 B) 9 C) 6
D) -9 E) 12
27. Si el polinomio:
 $P(x) = (a^2 + 2a^{-1}bc - bc)x^5 + (b^2 + 4ab^{-1}c - ac)x^4 + \sqrt{5}(c^2 + 6abc^{-1} - ab)x + (a+b+c-7)$, se anula para más de seis valores de x . Calcular:
 $T = \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}$; $\{a, b, c\} \neq 0$
A) 5 B) -3 C) -5
D) 3 E) 6
28. Sabiendo: $P(x) \equiv Q(x)$, calcular $a+b-c$.
 $P(x) = a(x-1)(x+2) + b(x-1)(x+3) + c(x+2)(x+3)$;
 $Q(x) = 6x^2 + 13x - 7$
A) 2 B) 6 C) 4
D) 8 E) 16
29. Calcular n , si el grado absoluto de la expresión:
$$M(x; y; z) = \frac{4\sqrt{x^{2n} \cdot 2} \cdot 3\sqrt{z^{2n+3}}}{4\sqrt{y^{2n}} \cdot 5\sqrt{y^{-16}}}$$
 es 6.
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6
30. Hallar el grado absoluto de:
 $M(x; y; z; w; \dots) = 5x^7y^{19}z^{37}w^{61}T^{91} \dots$
Considerar 19 letras.
A) 8000 B) 7999 C) 7899
D) 7539 E) 7989
31. Si el siguiente polinomio: $P(x; y) = (b-c)x^{b-n}y^{n+2} + (c-d)x^{c-n}y^{n+3} + (b-d)x^{d-n}y^{n+4}$ es homogéneo. Calcular el producto de sus coeficientes.
A) 4 B) 6 C) 2
D) 8 E) 10
32. Dado el polinomio: $P(x; y) = x^a + y^{b+c} + x^b y^c + x^c y^b + x^d y^a + x^a y^d$ homogéneo. Calcular el valor de: $E = a + b + c + d + e$, sabiendo que la suma de todos los exponentes del polinomio es 42.
A) 23 B) 25 C) 21
D) 27 E) 29
33. Si: $P(x; y) = (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})x^n + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})x^{n-1}y + \dots + (\sqrt{3} - \sqrt{2})xy^{n-1} + (\sqrt{2} - 1)y^{n-16}$

es un polinomio completo y ordenado con respecto a sus dos variables. Calcular el valor numérico de: $n\sqrt{(n+2)(m-n)}$, siendo además la suma de sus coeficientes igual a "n".

- A) 2 B) 12 C) 4 D) 8 E) 16

34. Si: $F(x+1) = 4x - 3$, hallar: $F(x-2)$.

- A) $x - 15$ B) $4x - 12$ C) $4x + 15$
D) x E) $4x - 15$

35. Si $f(x) = x^2(x-3) + 3(x+1) - 4$, determinar:

$$E = \frac{\left[f(x)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right) \right]^{\frac{27}{8}}}{[f(x-1)]^{1/3} + [f(x+1)]^{1/3}}; \text{ para: } x = 2 \times 10^{20}.$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{8}$

- D) $\frac{1}{32}$ E) $\frac{1}{16}$

36. Hallar el grado del producto

$$P(x) = ((x^2)^5)((x^2)^4)((x^2)^4)^5 \dots n \text{ términos}$$

A) $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$

B) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

C) $\frac{(n+1)^2(n-2)^2}{6}$

D) $\frac{(2n+1)(3n-1)(n^2-2n+3)}{4}$

E) $(n+1)^2(n^2-1)$

37. Sea el polinomio: $f(x) = x^2 + x + 41$ y $\{f(0); f(1); f(2); f(3); \dots; f(39)\}$ son números primos; encuentre a partir de estos datos otros 40 números enteros que al evaluar en $f(x)$ nos reproduzca números primos.

A) $\{f(-1); f(-2); f(-3); \dots; f(-40)\}$

B) $\{-1; -2; -3; \dots; -40\}$

C) $\{f(40); f(41); f(42); \dots; f(79)\}$

D) $\{1; 2; 3; \dots; 40\}$

E) $\{-41; -42; -43; \dots; -80\}$

38. Sabiendo que: $x^3 + y^3 + z^3 = (a+b+c)[a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc)] + 3abc$; además:

$$P(x; y; z) = \frac{(x^3 - a^3)^3 + (y^3 - b^3)^3 + (z^3 - c^3)^3}{(x-a)(y-b)(z-c)}$$

Determinar: $P(-a; -b; -c)$.

- A) 0 B) abc C) $3a^2b^2c^2$
D) $-abc$ E) $a^2b^2c^2$

39. Dado: $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 3$

Hallar el valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

- A) $\frac{12}{5}$ B) $\frac{5}{12}$ C) $-\frac{5}{12}$
D) $-\frac{12}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

40. Si $P(x^3 - x^2) = x^7 + x^6 + x^5 + x^3 + 2x^2 + 2x$, hallar $P(\cos^3 \pi)$.

- A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) 0

41. Si $P\left(\frac{2}{x} + 3\right) = x$, determinar:

$$P(4) + P(5) + P(7) + P(11) + \dots$$

- A) 2 B) 4 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{4}$ E) ∞

42. Sabiendo que el polinomio:

$$P(x) = (ab - ac + n^2)x^4 + (bc - ab + 6n)x^2 + (ac - bc + 9)$$

es idéntico al polinomio:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n, \text{ el cual se anula para cualquier valor asignado a } x, \text{ hallar}$$

$$\frac{b(a+c)}{ac}$$

- A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 4 E) $\frac{1}{4}$

43. Sea P un polinomio tal que:

$$P(xy) = P(x) + P(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ si además}$$

$$P(10) = 0, \text{ calcular } P(7) + P(99) + P(1001).$$

- A) 1 B) 3 C) 1107
D) 0 E) 6

44. Calcular $2 - b\sqrt{\frac{n}{a}} + 5$ sabiendo que el polinomio es completo y ordenado:

$$P(x) = 2x^{a^2a-13} + 4x^{a-b} + 6x^{a-b-1} + \dots + n \text{ tiene } (a^a) \text{ términos.}$$

- A) 2 B) $\frac{1}{2}$ C) 4
D) 3 E) $\frac{1}{4}$

45. Si: $F(x - 14\sqrt{x} + 44) = x$, hallar $F(9x - 42\sqrt{x} + 44)$ si: $\sqrt{x} > 7$

- A) $9x$ B) $2x$ C) $-9x$
D) $-2x$ E) N. A.

46. Sea el polinomio $f(x)$ definido por:

$$xf(x+1) - f(x^2) = 3x - 1, \text{ determinar el valor de: } f(1) + f(2) + f(3)$$

- A) 15 B) 7 C) 5
D) 23 E) 0

47. Sea
- $P(x) = 2x + 1$
- . Además:

$$\frac{P(P(\dots(P(x))\dots))}{9 \text{ paréntesis}} = a^3 + b^9x - 1$$

calcular: ab^4 .

- A) 32 B) 64 C) 128
D) 256 E) 1024

48. ¿Cuántos términos faltan en este polinomio:

$R(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n)(x^{n+4} + x^n)$ para ser completo, sabiendo que en este otro polinomio $P(x - 2) = n^2(3x - 8)^2 + (x - 2)[(x - 2)^{2n-1} + 12]$ la suma de coeficientes excede en la unidad a su término independiente?

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

49. Calcular el coeficiente del equivalente de la expresión:

$$M(x) = \left(\frac{x^n}{4096} \right)^4 \left[\frac{\sqrt[4]{2x^n} \sqrt[4]{2x^n} \sqrt[4]{2x^n} \sqrt[4]{2x^n}}{\sqrt[4]{2x^n} \sqrt[4]{2x^n} \sqrt[4]{2x^n} \sqrt[4]{2x^n}} \right]^{n^4}$$

Si se reduce a un monomio de grado 72.

- A) 8 B) 4 C) 32
D) 1024 E) 16

50. Sabiendo que se verifica la siguiente identidad:

$$x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 3x + 2 = a(x - 1)^5 + b(x - 1)^4 + c(x - 1)^3 + d(x - 1)^2 + e(x - 1) + f,$$

calcular el valor de $M = \frac{a+c+e}{f}$

- A) -1 B) 1 C) 2
D) $\frac{1}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

51. Sabiendo que:
- x^{a^2-bc}
- ,
- x^{b^2-ac}
- ,
- x^{c^2-ab}
- ;
- a
- ,
- b
- ,
- c
- son los términos 1.º, 7.º, 13.º, y último respectivamente de un polinomio
- $P(x)$
- completo y ordenado, calcular:

$$(a + b + c)^{-1} \left(\frac{1}{b-c} + \frac{2}{a-c} \right)$$

- A) 1/2 B) 2 C) 1/4
D) 6 E) 1/6

52. Si:
- $f(x + 2) = x + f(x) + f(x + 1)$
- ;
- $f(y) = 2f(y - 1)$
- ; hallar
- $f(-3) + f(4)$

- A) 0 B) -1 C) 1
D) 2 E) 3

53. Si:
- $f(x) = e^x + \pi^x$
- y
- $f(3) = 1$
- ;

$$\text{calcular: } \sqrt[3]{\frac{f(1)}{f(4) - f(7)}}$$

- A) $1/e\pi$ B) $e\pi$ C) $-e\pi$
D) $(e\pi)^{-3}$ E) -2

54. Si el polinomio de variable
- x
- :

$P(x) = (ab - bc - m^2)x^4 + (bc - ac - 2mn)x^2 + (ac - ab - n^2)$ se anula para más de 4 valores; según ello calcular: $\frac{b(b-a)}{c(a-c)}^{-1}$

- A) 1 B) -1 C) -1/2
D) 1/2 E) 2

55. Dados:
- $P(ax + b) = a - bx$

$Q(a + bx) = b - ax$; obtener: $P(Q(a))$

- A) 1 B) -1 C) a
D) $-a$ E) ab

56. De la identidad:
- $a(x + 1)^2 + b(x - 1)^2 \equiv 9x^2 + 10x + c$
- , calcular:
- abc
- .

- A) 42 B) 126 C) 48
D) 224 E) 36

57. Si
- $P\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x^{1999} - 2x^{1996} + 1997$
- , calcular:
- $P(3)$

- A) 1 B) -1 C) 1986
D) 1995 E) 1997

58. Si los polinomios:

$$P(x; y; z) = (a - b)^2 x^m + (b - c)^2 y^n + (c - a)^2 z^p$$

$$Q(x; y; z) = abx^m + 3bcy^n + 5acz^p$$

son idénticos, evaluar: $M = \frac{a-b}{c} - \frac{b-c}{a} - \frac{a-c}{b}$

- A) 8 B) 11 C) 13
D) 14 E) 15

CLAVES

1. E	9. A	17. C	25. B	33. C	41. B	49. E	57. E
2. E	10. A	18. C	26. C	34. C	42. A	50. E	58. E
3. B	11. B	19. D	27. C	35. A	43. D	51. A	
4. C	12. C	20. E	28. C	36. B	44. D	52. C	
5. A	13. C	21. D	29. B	37. B	45. A	53. A	
6. B	14. A	22. D	30. B	38. C	46. A	54. C	
7. B	15. D	23. A	31. C	39. D	47. C	55. C	
8. D	16. D	24. A	32. C	40. B	48. B	56. B	

Multiplicación algebraica

Productos notables

07

capítulo

Adrien-Marie Legendre nació el 18 de septiembre de 1752 y murió el 10 de enero de 1833, fue un destacado matemático francés. Hizo importantes contribuciones a la estadística, a la teoría de números, al álgebra abstracta y al análisis matemático. Intervino en geodesia y en la comisión que estableció el metro como unidad de medida internacional. Recibió su educación en el Collège Mazarin en París, y defendió su tesis en física y matemáticas en 1770.

Legendre hizo una impresionante cantidad de trabajos sobre funciones elípticas, incluyendo la clasificación de integrales elípticas, aunque debe a Niels Henrik Abel la idea de estudiar las inversas de las funciones de Jacobi y así resolver completamente el problema. También hizo un trabajo pionero sobre la distribución de números primos y sobre la aplicación del análisis matemático en la teoría de números.

También le deben su nombre los polinomios de Legendre, soluciones a la ecuación diferencial de Legendre, que se utilizan con frecuencia en aplicaciones de física e ingeniería. En mecánica, es conocido por la transformada de Legendre, utilizada para pasar de la formulación lagrangiana a la formulación hamiltoniana de la mecánica clásica. También se usa en termodinámica para obtener la entalpía de las energías libres de Helmholtz y de Gibbs partiendo de la energía interna.

Fuente: Wikipedia



Adrien-Marie Legendre

◀ MULTIPLICACIÓN ALGEBRAICA

Consiste en calcular una expresión denominada producto a partir de dos o más expresiones denominadas factores.

Casos que se presentan

Multiplicación de monomios. Para multiplicar monomios, se multiplica primero los coeficientes según la ley de signos luego las partes literales de acuerdo a las leyes de exponentes.

Ejemplo:

$$A(x; y) = 3x^4y^3; B(x; y) = -2x^2y^2z^5$$

$$\Rightarrow AB = (3x^4y^3)(-2x^2y^2z^5) = -6x^6y^5z^5$$

Multiplicación de un monomio por un polinomio. Se multiplica cada uno de los términos del polinomio con el monomio dado.

Ejemplo:

$$A(x; y) = 2x^2y^5$$

$$B(x; y) = 4x^3y^2 - 5x^4y + 2x^7y^6$$

$$\Rightarrow AB = (2x^2y^5)(4x^3y^2) - (2x^2y^5)(5x^4y) + (2x^2y^5)(2x^7y^6)$$

$$AB = 8x^5y^7 - 10x^6y^6 + 4x^9y^{11}$$

Multiplicación de polinomios. Se completan y ordenan los polinomios con respecto a una sola letra. Luego se multiplica cada uno de los términos del multiplicando por los del multiplicador.

Ejemplo:

Multiplicar $A(x)$ por $B(x)$, siendo:

$$A(x) = 2x^2 - x + 4 \quad \wedge \quad B(x) = 3x^3 - 5x^2 - x + 2$$

El procedimiento será el siguiente:

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 5x^2 - x + 2 \\ 2x^2 - x + 4 \\ \hline 6x^5 - 10x^4 - 2x^3 + 4x^2 \\ - 3x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x \\ \hline 12x^3 - 20x^2 - 4x + 8 \\ \hline 6x^5 - 13x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 6x + 8 \end{array}$$

✓ Propiedades

1. El grado del producto es igual a la suma de los grados de cada uno de sus factores.
2. El término independiente del producto es igual al resultado de multiplicar los términos independientes de cada uno de sus factores. El coeficiente principal del producto es igual al resultado de multiplicar los coeficientes principales de cada uno de sus factores.

Se denomina coeficiente principal de un polinomio al coeficiente del término de mayor grado.

Ejemplo:

Calcular el grado y el coeficiente principal del polinomio:
 $P(x) = (2x^4 - 3)^n(x^5 - 1)^n(2x^1 - x - n)^3$
 sabiendo que su término independiente es -72 .

Resolución:

$$\text{Por dato: TI} = P(0) = -72 = (-3)^n(-1)^n(-n)^3$$

$$\Rightarrow -3^2 \cdot 2^3 = -3^n n^3 \Rightarrow n = 2$$

Calculando el grado:

$$GA(P) = 4n + 5n + 3n = 12n = 24$$

$$\text{Coeficiente principal (P)} = 2^n n^n 2^3 = 2^2 2^2 2^3 = 128$$

◀ PRODUCTOS NOTABLES

Son casos especiales que se presentan dentro de la multiplicación algebraica en los cuales se puede obtener en forma directa el producto sin necesidad de efectuar la operación. Presentándose los siguientes casos:

Binomio al cuadrado (trinomio cuadrado perfecto)

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Deducción de un trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{array}{c} a^2 \quad \pm 2ab \quad + b^2 = (a \pm b)^2 \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \downarrow \quad \swarrow \\ 2 \quad a \quad \quad \quad b \end{array}$$

Nota

$$(a - b)^{2n} = (b - a)^{2n}; \text{ donde } n \in \mathbb{Z}$$

Corolario: Identidades de Legendre:

- $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

Suma por diferencia (diferencia de cuadrados)

- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
- $(a^m + b^m)(a^m - b^m) = (a^m)^2 - (b^m)^2 = a^{2m} - b^{2m}$

Binomio al cubo

- $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (forma desarrollada)
- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ (forma semidesarrollada)
- $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

Suma o diferencia de cubos (suma por diferencia)

- $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

Trinomio al cuadrado

- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
(forma desarrollada)
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$
(forma semidesarrollada)
- $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$

- $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$
- $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$

Trinomio al cubo

- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + 6abc$
- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(a + c)(b + c)$
(forma semidesarrollada)

Producto de binomios con un término común

- $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$

Identidades de Lagrange

- $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = (ax + by)^2 + (ay - bx)^2$
- $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) = (ax + by + cz)^2 + (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2$

Identidades de Argand

- $x^{4k} + x^{2k} + 1 = (x^{2k} + x^k + 1)(x^{2k} - x^k + 1)$
- $a^{4m} + a^{2m}b^{2n} + b^{4n} = (a^{2m} + a^mb^n + b^{2n}) \times (a^{2m} - a^mb^n + b^{2n})$

Otras identidades auxiliares

- $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$
 $= \frac{1}{2}(a + b + c)[(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2]$
- $(a + b + c)^3 + 2(a^3 + b^3 + c^3) = 3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) + 6abc$
- $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc$
- $(a + b)^4 - (a - b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$
- $(a + b)(b + c)(c + a) + abc = (a + b + c)(ab + ac + bc)$

A continuación se mostrarán más igualdades en las cuales intervienen directamente los productos notables.

Igualdades condicionales

Si: $a + b + c = 0$, se demuestra que:

- $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + ac + bc)$
- $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$
- $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + ac + bc)$
- $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$
- $(ab + ac + bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$
- $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}\right) = \frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}$
- $\left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5 + b^5 + c^5}{5}\right) = \frac{a^7 + b^7 + c^7}{7}$

Aplicaciones:

1. Si: $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{8}{2x + y}$

evaluar: $F = \frac{y^2 + x^2 + 3xy}{(y - x)^2 + (x + y)^2}$

Resolución:

Efectuando en el primer miembro:

$$\frac{2x + y}{xy} = \frac{8}{2x + y}$$

Efectuando en aspa:

$$(2x + y)^2 = 8xy \Rightarrow 4x^2 + 4xy + y^2 = 8xy$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 = 0 \Rightarrow (2x - y)^2 = 0$$

trinomio cuadrado perfecto

Extrayendo raíz cuadrada miembro a miembro:

$$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$

De donde:

$$F = \frac{(2x)^2 + x^2 + 3x(2x)}{(2x - x)^2 + (x + 2x)^2} = \frac{4x^2 + x^2 + 6x^2}{x^2 + 9x^2} = \frac{11x^2}{10x^2}$$

$$\therefore F = \frac{11}{10}$$

2. Si: $(a + b + c + d)^2 = 4(a + b)(c + d)$

encontrar el valor de: $L = \frac{3(a - b)}{(343)^{c + d}}$

Resolución:

Nótese que sería dificultoso elevar al cuadrado el polinomio de cuatro términos en el primer miembro; pero si analizamos la igualdad hay 2 expresiones que se repiten $(a + b)$ y $(c + d)$, es más, también se presentan en la expresión pedida. En consecuencia cuando se presenten expresiones repetidas dos o más veces en un mismo problema conviene hacer cambio de variable.

Haciendo:

$$a + b = m; \quad c + d = n$$

$$\text{Tenemos: } (m + n)^2 = 4mn \Rightarrow m^2 + 2mn + n^2 = 4mn$$

$$\text{Luego: } m^2 - 2mn + n^2 = 0 \Rightarrow (m - n)^2 = 0$$

Extrayendo raíz cuadrada miembro a miembro:

$$m - n = 0 \Rightarrow m = n$$

$$\text{Se pide: } L = \frac{3\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{343}^{c + d}} \therefore L = 7$$

3. Después de efectuar:

$$P(u) = (u + 2)(u - 2)(u^2 + 4)(u^4 + 16) \text{ se obtiene:}$$

Resolución:

Por diferencia de cuadrados se tiene que:

$$P(u) = (u + 2)(u - 2)(u^2 + 4)(u^2 + 16)$$

$$P(u) = (u^2 - 4)(u^2 + 4)(u^2 + 16)$$

$$P(u) = (u^2 - 16)(u^2 + 16) = u^4 - 16^2$$

$$\therefore P(u) = u^4 - 256$$

4. Efectuar:
- $F(a) = (a+1)^3 - (a-1)^3$

Resolución:

1.ª forma: Efectuando el binomio suma y diferencia al cubo:

$$F(a) = a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - (a^3 - 3a^2 + 3a - 1)$$

Reduciendo términos semejantes:

$$F(a) = 6a^2 + 2 \quad \therefore F(a) = 2(3a^2 + 1)$$

2.ª forma: La expresión se podrá escribir como una diferencia de cubos:

$$F(a) = [(a+1) - (a-1)] \times [(a+1)^2 + (a+1)(a-1) + (a-1)^2]$$

En el segundo corchete aplicamos la identidad de Legendre y la diferencia de cuadrados:

$$F(a) = [a+1 - a+1][2(a^2+1)(a^2-1)]$$

Reduciendo términos semejantes:

$$F(a) = 2(3a^2 + 1)$$

5. Efectuar:

$$y = (a+b+c-d)^2 + (a+b-c+d)^2 - 2(a-b+c+d)^2 - 4(a+c)(b-d)$$

Resolución:

Desdoblando:

$$-2(a-b+c+d)^2 = -(a-b+c+d)^2 - (a-b+c+d)^2$$

Agrupando en la forma indicada:

$$y = (a+b+c-d)^2 - (a-b+c+d)^2 + (a+b-c+d)^2 - (a-b+c+d)^2 - 4(a+c)(b-d)$$

$$y = (2a+2c)(2b-2d) + (2a+2d)(2b-2c) - 4(a+c)(b-d)$$

$$y = 4(a+c)(b-d) + 4(a+d)(b-c) - 4(a+c)(b-d)$$

$$\therefore y = 4(a+d)(b-c)$$

6. Efectuar:

$$F = [(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1) \times (x^3+\sqrt{x^3}+1)(x^3-\sqrt{x^3}+1)(x^6-x^3+1)+1]^{1/9}$$

Resolución:

$$F = [(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$\underbrace{(x^3+\sqrt{x^3}+1)(x^3-\sqrt{x^3}+1)}_{\text{Argand}}(x^6-x^3+1)+1]^{1/9}$$

$$F = \underbrace{[(x^2-1)(x^4+x^2+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)+1]^{1/9}}_{\text{diferencia de cubos}} \underbrace{(x^6-x^3+1)}_{\text{Argand}}$$

$$F = \underbrace{[(x^6-1)(x^{12}+x^6+1)+1]^{1/9}}_{\text{diferencia de cubos}} = [x^{18}-1+1]^{1/9}$$

$$\therefore F = x^2$$

7. Indicar la raíz cuadrada del resultado (
- $a > 0$
- ;
- $b > 0$
-)

$$L = (a+b)^2(a-b+c)(b+c-a) + [a(a+c) + b(b+c)][a(a-c) + b(b-c)]$$

Resolución:

Efectuando dentro de los corchetes:

$$L = (a+b)^2(a-b+c)(b+c-a) + [a^2+ac+b^2+bc][a^2-ac+b^2-bc]$$

Agrupando los trinomios y los términos contenidos en los corchetes:

$$L = (a+b)^2 \underbrace{[c+(a-b)][c-(a-b)]}_{\text{diferencia de cuadrados}} + \underbrace{[(a^2+b^2)+(ac+bc)][(a^2+b^2)-(ac+bc)]}_{\text{diferencia de cuadrados}}$$

$$L = (a+b)^2[c^2-(a-b)^2] + (a^2+b^2)^2 - (ac+bc)^2$$

$$L = (ac+bc)^2 - (a^2-b^2)^2 + (a^2+b^2)^2 - (ac+bc)^2$$

$$L = \underbrace{(a^2+b^2)^2 - (a^2-b^2)^2}_{\text{Legendre}} = 4a^2b^2 \quad \therefore \sqrt{L} = 2ab$$

8. Efectuar:

$$A = (x^2+x+1)(x^2+x+2) - (x^2-x+1)(x^2-x+2) - 2x(2x+1)(x+3)$$

Resolución:

Utilizando el criterio de producto de binomios con un término común:

$$A = (x^2+x)^2 + 3(x^2+x) + 2 - (x^2-x)^2 - 3(x^2-x) - 2 - 2x(2x^2+7x+3)$$

$$A = (x^2+x)^2 - (x^2-x)^2 + 6x - 4x^3 - 14x^2 - 6x$$

$$A = 4x^2(x) + 6x - 4x^3 - 14x^2 - 6x \quad \therefore A = -14x^2$$

9. Señalar la raíz cuadrada de:

$$L = 0,5(x+1)(x+2)(x-3)(x-4) + 0,5(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) + (x+4)(x-4) + 1$$

Resolución:

Factorizando $\frac{1}{2}$ y agrupando en la forma indicada:

$$L = \frac{1}{2} \left[\overbrace{(x+1)(x+2)(x-3)(x-4)} + \overbrace{(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)} + (x^2-15) \right]$$

$$L = \frac{1}{2} [(x^2-2x-3)(x^2-2x-8) + x^2-15]$$

Utilizando el criterio de producto de binomios con un término común:

$$L = \frac{1}{2} [(x^2-2x)^2 - 11(x^2-2x) + 24 + (x^2+2x)^2 - 11(x^2+2x) + 24] + x^2-15$$

$$L = \frac{1}{2} [x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 11x^2 + 22x + 24 + 2x^2 - 30]$$

$$L = x^4 - 6x^2 + 9 = (x^2-3)^2 \quad \therefore \sqrt{L} = x^2-3$$

10. Efectuar:

$$y = (a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 + (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2$$

Resolución:

Agrupando a los trinomios en forma adecuada:

$$y = \frac{[(a+b)+c]^2 + [(a+b)-c]^2}{\text{Legendre}} + \frac{[c+(b-a)]^2 + [c-(b-a)]^2}{\text{Legendre}}$$

$$y = 2[(a+b)^2 + c^2] + 2[c^2 + (b-a)^2]$$

$$y = 2[(a+b)^2 + 2c^2 + (b-a)^2]$$

$$\text{Pero: } (b-a)^2 = (a-b)^2$$

$$y = 2[(a+b)^2 + 2c^2 + (a-b)^2] \Rightarrow y = 2[2a^2 + 2b^2 + 2c^2]$$

$$\therefore y = 4(a^2 + b^2 + c^2)$$


PROBLEMAS
RESUELTOS


1. Si $x + y + z = 0$, reducir:

$$L = \frac{x^4y + y^4z + z^4x + x^4z + z^4y + y^4x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Resolución:

Agrupando en el numerador en forma adecuada y utilizando la condición:

$$L = \frac{x^4(y+z) + y^4(z+x) + z^4(x+y)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$L = \frac{x^4(-x) + y^4(-y) + z^4(-z)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{-(x^5 + y^5 + z^5)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Se sabe que:

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right)\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}\right) = \frac{x^5 + y^5 + z^5}{5}$$

(Ver igualdades condicionales)

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{5}{6}(x^3 + y^3 + z^3)$$

$$\text{Luego: } L = \frac{-5}{6}(x^3 + y^3 + z^3);$$

$$\text{Pero: } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow L = \frac{-5}{6}(3xyz) \therefore L = \frac{-5}{2}xyz$$

2. Si x y su inverso multiplicativo suman 3, calcular:

$$E = \left[x^x + \left(\frac{1}{x}\right)^x\right] \left[x^{\frac{1}{x}} + \left(\frac{1}{x}\right)^x\right]$$

Resolución:

$$\text{Por dato: } x + \frac{1}{x} = 3 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 27$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 27$$

$$\Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} + 3(3) = 27 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 18$$

Efectuando en la expresión pedida:

$$E = x^{x+\frac{1}{x}} + 1 + 1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{x}} = x^3 + 2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3$$

$$\Rightarrow E = 18 + 2 \therefore E = 20$$

3. Si: $a^2 + b^2 + c^2 = 17 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 43$

$$\text{y } (a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2 = 66$$

$$\text{calcular: } L = \frac{a+b+c}{a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}}$$

Resolución:

La expresión pedida puede escribirse:

$$L = \frac{(a+b+c)abc}{ab+ac+bc}$$

$$\text{Del tercer dato: } 2(\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{17} + ab + bc + ca) = 66$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = 16$$

También:

$$(a+b+c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{17} + 2(\underbrace{ab + bc + ca}_{16})$$

$$\Rightarrow a + b + c = 7$$

$$\text{Como: } \underbrace{(a+b+c)^3}_{343} = 3(\underbrace{a+b+c}_7)(\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{17}) - \underbrace{2(a^3 + b^3 + c^3)}_{43} + 6abc$$

$$\text{Luego, tenemos: } abc = 12$$

Reemplazando en la expresión pedida:

$$L = \frac{(7)(12)}{16} \therefore L = \frac{21}{4}$$

4. Dadas las condiciones:

$$a + b + c = 1; a^2 + b^2 + c^2 = 9 \text{ y } a^3 + b^3 + c^3 = 1$$

$$\text{calcular: } R = \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab}; (abc \neq 0)$$

Resolución:

$$\text{Transformando la expresión pedida: } R = \frac{a^4 + b^4 + c^4}{abc}$$

Por la identidad:

$$(a+b+c)^3 = 3(\underbrace{a+b+c}_1)(\underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_9) - \underbrace{2(a^3 + b^3 + c^3)}_1 + 6abc$$

$$\text{De aquí: } abc = -4$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a+b+c)^2}_1 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_9 + 2(ab + bc + ac)$$

$$\text{De donde: } ab + bc + ca = -4$$

$$(ab + bc + ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(\underbrace{a+b+c}_1)$$

$$\text{Luego: } a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 24$$

$$\text{Por último: } \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)^2}_{81} = a^4 + b^4 + c^4 + 2(\underbrace{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}_{24})$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 33 \therefore R = -\frac{33}{4}$$

5. Si $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 1$, calcular:
 $S = (a-2b+c)(b-2c+a) + (b-2c+a)(c-2a+b) + (c-2a+b)(a-2b+c)$

Resolución:

Escribiendo la expresión pedida en función de:

$(a-b)$, $(b-c)$ y $(c-a)$:

Tenemos:

$$S = [(a-b) - (b-c)][(b-c) - (c-a)] + [(b-c) - (c-a)][(c-a) - (a-b)] + [(c-a) - (a-b)][(a-b) - (b-c)]$$

Haciendo: $(a-b) = m$; $(b-c) = n$; $(c-a) = p$

De donde: $m + n + p = 0$

$$S = (m-n)(n-p) + (n-p)(p-m) + (p-m)(m-n)$$

$$S = mn - n^2 - mp + np + np - mn - p^2 + mp + mp - m^2 - pn + mn$$

$$S = mn + pm + np - (m^2 + n^2 + p^2)$$

Del dato: $m^2 + n^2 + p^2 = 1$

Además: $m + n + p = 0$

$$(m+n+p)^2 = m^2 + n^2 + p^2 + 2(mn + np + pm)$$

$$\Rightarrow mn + np + pm = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Reemplazando: } S = -\frac{1}{2} - 1 \quad \therefore S = -\frac{3}{2}$$

6. Si: $x + y = \sqrt{7xy}$, calcular: $E = \left(\frac{x}{y} + 1\right)^5 + \left(\frac{y}{x} + 1\right)^5$

Resolución:

Elevando el dato al cuadrado:

$$x^2 + y^2 = 5xy \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 5$$

$$\left(\frac{x}{y} + 1\right) + \left(\frac{y}{x} + 1\right) = 7$$

$$\text{Haciendo: } \frac{x}{y} + 1 = a; \quad \frac{y}{x} + 1 = b$$

$$\text{Luego: } a + b = 7 \quad \dots (I)$$

$$\text{También: } ab = \left(1 + \frac{x}{y}\right)\left(1 + \frac{y}{x}\right) = 7$$

Se pide: $E = a^5 + b^5$

Elevando al cuadrado la expresión (I):

$$a^2 + b^2 + 2ab = 49 \Rightarrow a^2 + b^2 = 35 \quad \dots (II)$$

Elevando al cubo la expresión (I):

$$a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = 343 \Rightarrow a^3 + b^3 = 196 \dots (III)$$

$$(II) \times (III): a^5 + a^2b^3 + a^3b^2 + b^5 = (35)(196)$$

$$\text{Agrupando: } a^5 + b^5 + (ab)^2(a+b) = (35)(196)$$

$$a^5 + b^5 = (35)(196) - (ab)^2(a+b)$$

$$a^5 + b^5 = (35)(196) - (7)^2(7)$$

$$\therefore E = 6517$$

7. Si: $a^4 + b^4 + c^4 = 83$; $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 19$
 $\wedge ab + bc + ca = 7$

$$\text{calcular: } E = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 11}{abc + 3}$$

Resolución:

Sabemos que:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = \underbrace{a^4 + b^4 + c^4}_{83} + 2(\underbrace{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}_{19})$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 11$$

$$\bullet (a+b+c)^2 = \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{11} + 2(\underbrace{ab + bc + ca}_{7})$$

$$\Rightarrow a + b + c = 5$$

$$\bullet a^3 + b^3 + c^3 - 3abc =$$

$$(a+b+c)^3 - 3(ab+bc+ca)(a+b+c) = 20$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc + 20$$

Reemplazando:

$$E = \frac{3abc + 20 - 11}{abc + 3} = \frac{3(abc + 3)}{(abc + 3)} \quad \therefore E = 3$$

Observación

Es importante aclarar que, en problemas donde la respuesta es un valor numérico, pueden darse valores adecuados a las variables, que cumplan con las condiciones, por ejemplo: para el problema antes mencionado:

Asignando valores de: $a = 3$; $b = 1$; $c = 1$

Se tendrá:

$$E = \frac{(3)^3 + (1)^3 + (1)^3 - 11}{(3)(1)(1) + 3} = \frac{29 - 11}{3 + 3} = \frac{18}{6} = 3$$

Como se observa se tiene la misma respuesta.

8. Si: $a + b + c = 0$; que valor asume:

$$\left(\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

Resolución:

Sea A el valor pedido:

$$A = \left(\frac{a+b}{c} + \frac{a+c}{b} + \frac{b+c}{a}\right) \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)$$

De la condición: $a + b + c = 0$; se obtiene:

$$a + b = -c; \quad a + c = -b; \quad b + c = -a$$

Luego en A:

$$A = (-1-1-1)(-1-1-1) = (-3)(-3)$$

$$\therefore A = 9$$

9. Si: $a + b + c = 3$; con $a \neq 0$; $b \neq 1$ $\wedge$ $c \neq 2$

$$\text{calcular el valor de: } \frac{a^3 + (b-1)^3 + (c-2)^3}{a(b-1)(c-2)}$$

Resolución:

De la condición: $a + b + c = 3 \Rightarrow a + b + c = 1 + 2$

$$\Rightarrow a + (b-1) + (c-2) = 0$$

Luego se cumple que:

$$a^3 + (b-1)^3 + (c-2)^3 = 3a(b-1)(c-2)$$

$$\text{Sea P el valor pedido: } P = \frac{a^3 + (b-1)^3 + (c-2)^3}{a(b-1)(c-2)}$$

$$\Rightarrow P = \frac{3a(b-1)(c-2)}{a(b-1)(c-2)} \quad \therefore P = 3$$

10. Si se cumple: $x^2 - 3x + 1 = 0$
calcular el valor de: $\frac{x^7 - x^5 + x^3}{x^5}$

Resolución:

Sea A el valor pedido, es decir:

$$A = \frac{x^7 - x^5 + x^3}{x^5} = \frac{x^7}{x^5} - \frac{x^5}{x^5} + \frac{x^3}{x^5}$$

$$A = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow A = x^2 + \frac{1}{x^2} - 1 \quad \dots (I)$$

De la condición: $x^2 - 3x + 1 = 0$;

$$\Rightarrow x^2 + 1 = 3x \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } x^2 + \frac{1}{x^2} = 7 \quad \dots (II)$$

Finalmente reemplazando (II) en (I) se tendrá:

$$\therefore A = 6$$

11. Hallar el equivalente de:
 $(x^2 + x - 4)^2 - (x - 2)(x - 1)(x + 2)(x + 3)$.

Resolución:

Sea B el equivalente:

$$B = (x^2 + x - 4)^2 - (x - 2)(x - 1)(x + 2)(x + 3)$$

Reacomodando la expresión para utilizar la 1.^a equivalencia de Steven:

$$B = (x^2 + x - 4)^2 - (x - 2)(x + 3)(x - 1)(x + 2)$$

$$B = (x^2 + x - 4)^2 - (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2)$$

$$\text{Hagamos: } x^2 + x = m \Rightarrow B = (m - 4)^2 - (m - 6)(m - 2)$$

$$B = m^2 - 8m + 16 - m^2 + 8m - 12 = 16 - 12$$

$$\therefore B = 4$$

12. Si: $5a + 5c + ac = 0$,

$$\text{calcular el valor de: } \frac{5ac}{(a + 5)(5 + c)(a + c)}$$

Resolución:

$$\text{Sea R el valor pedido: } R = \frac{5ac}{(5 + a)(5 + c)(a + c)}$$

Efectuando la multiplicación indicada:

$$R = \frac{5ac}{(25 + 5a + 5c + ac)(a + c)}$$

Como: $5a + 5c + ac = 0$:

$$R = \frac{5ac}{(25)(a + c)} = \frac{ac}{5(a + c)}$$

También del dato: $ac = -5(a + c)$

$$\Rightarrow R = \frac{-5(a + c)}{5(a + c)} \therefore R = -1$$

13. Si: $a = 2 + \sqrt{3}$; $b = 1 - 2\sqrt{3}$ $\wedge$ $c = \sqrt{3} - 3$,
hallar el valor de:
$$\frac{a(a + 1)(a - 1) + b(b + 1)(b - 1) + c(c + 1)(c - 1)}{a(bc + 1) + b(ac + 1) + c(ab + 1)}$$

Resolución:

Sea S el valor pedido:

$$S = \frac{a(a + 1)(a - 1) + b(b + 1)(b - 1) + c(c + 1)(c - 1)}{a(bc + 1) + b(ac + 1) + c(ab + 1)}$$

Efectuando en el numerador y denominador:

$$S = \frac{(a^3 + b^3 + c^3) - (a + b + c)}{(3abc) + (a + b + c)}$$

Del dato: $a + b + c = 0$; luego se cumple que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\Rightarrow S = \frac{(3abc) - (0)}{(3abc) + (0)} = \frac{3abc}{3abc}$$

$$\therefore S = 1$$

14. Si: $p - q - r = 2$ $\wedge$ $pq + pr = qr$, hallar el valor de
 $T = p^2 + q^2 + r^2$.

Resolución:

$$\text{Datos: } p - q - r = 2 \quad \dots (I)$$

$$pq + pr - qr = 0 \quad \dots (II)$$

Elevando (I) al cuadrado:

$$p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr + 2qr = 4$$

$$\Rightarrow p^2 + q^2 + r^2 - \underbrace{2(pq + pr - qr)}_0 = 4$$

$$\therefore T = p^2 + q^2 + r^2 = 4$$

15. Si: $x = \frac{\sqrt[4]{3} + 1}{\sqrt[4]{3} - 1}$, hallar el valor de:

$$R = \frac{(x^2 + 2x + 1)^4 + (x^2 - 2x + 1)^4}{(x^2 + 2x + 1)^4 - (x^2 - 2x + 1)^4}$$

Resolución:

R se puede escribir así:

$$R = \frac{[(x + 1)^2]^4 + [(x - 1)^2]^4}{[(x + 1)^2]^4 - [(x - 1)^2]^4} = \frac{(x + 1)^8 + (x - 1)^8}{(x + 1)^8 - (x - 1)^8}$$

$$\text{Del dato: } \frac{x}{1} = \frac{\sqrt[4]{3} + 1}{\sqrt[4]{3} - 1}$$

$$\text{Por propiedad de proporciones: } \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{2\sqrt[4]{3}}{2}$$

$$\text{Elevo a la 8: } \frac{(x + 1)^8}{(x - 1)^8} = \frac{3^2}{1}$$

Nuevamente, propiedad de proporciones:

$$\frac{(x + 1)^8 + (x - 1)^8}{(x + 1)^8 - (x - 1)^8} = \frac{9 + 1}{9 - 1} \therefore R = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

Estos R

16. Si: $x + y + z = 2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2$,

hallar el valor de:

$$E = x^2(x - 2) + y^2(y - 2) + z^2(z - 2) - 3xyz.$$

Resolución:

$$\text{Efectuando: } E = x^3 + y^3 + z^3 - 2(x^2 + y^2 + z^2) - 3xyz$$

$$\Rightarrow E = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) - 4$$

Sabemos que:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \dots (\alpha)$$

$$\text{De los datos: } x + y + z = 2 \quad \dots (I)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \dots (II)$$

Hallamos: $xy + xz + yz$

Elevando (I) al cuadrado:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz)}{2} = 4$$

$$\Rightarrow xy + xz + yz = 1$$

$$\text{En } (\alpha): x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (2)(2 - 1) = 2$$

$$E = 2 - 4 = -2$$

17. Si: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$, hallar el valor de:

$$P = \frac{(a+b+c)^6 - a^6 - b^6 - c^6}{a^3b^3 + b^3c^3 + a^3c^3}$$

Resolución:

$$\text{De: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow (bc + ac + ab)(a + b + c) = abc$$

$$\frac{(a+b+c)(ab+bc+ac) - abc}{\text{conocido}} = 0$$

Conocido: $(a+b)(b+c)(c+a) = 0$

Si asumimos: $a+b=0 \Rightarrow a=-b$

$$\Rightarrow P = \frac{c^6 - b^6 - b^6 - c^6}{-b^5 + b^3c^3 - b^3c^3} = \frac{-2b^6}{-b^5} = 2$$

Nota

Si se asume que: $b+c=0 \vee c+a=0$, se obtiene lo mismo (verificar).

18. Si: $x^2 - 3x + 1 = 0$, calcular: $E = x^6 + \frac{1}{x^6}$

Resolución:

Del dato: $x^2 - 3x + 1 = 0$

$$x^2 + 1 = 3x \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 3 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 3$$

Al cuadrado: $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 9$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 7$$

Al cubo: $x^6 + \frac{1}{x^6} + 3x^2\left(\frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 7^3$

$$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} + 3(7) = 7^3$$

$$\Rightarrow x^6 + \frac{1}{x^6} = 7^3 - 3(7) = 7(7^2 - 3)$$

$$\therefore E = x^6 + \frac{1}{x^6} = 322$$

19. Si $a \wedge b \in \mathbb{R} - \{0\}$: $a+b \neq 0 \wedge \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} = \frac{3}{a+b} - \frac{1}{b}$

$$\text{hallar el valor de: } T = \frac{a^3 + b^2a + 3a^2b}{ab^2 + 3a^2b + b^3}$$

Resolución:

$$a, b \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge a+b \neq 0 \wedge \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b} = \frac{3}{a+b} - \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b} \Rightarrow (a+b)^2 = 4ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 2ab \Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a=b$$

$$\text{En: } T = \frac{a^3 + b^2a + 3a^2b}{ab^2 + 3a^2b + b^3}, \quad T = \frac{a^3 + a^3 + 3a^3}{a^3 + 3a^3 + a^3}$$

$$\therefore T = 1$$

20. Si: $(x+y+z+w)^2 + (x+y-z-w)^2 = 4(x+y)(z+w)$, ha-

$$\text{llar el valor de: } S = \left[\left(\frac{x-z}{w-y} \right)^2 + \left(\frac{x-w}{z-y} \right)^2 \right]^{213}$$

Resolución:

Dato:

$$(x+y+z+w)^2 + (x+y-z-w)^2 = 4(x+y)(z+w)$$

Por la segunda identidad de Legendre, se tiene:

$$(x+y+z+w)^2 - (x+y-z-w)^2 = 4(x+y)(z+w)$$

De donde, sumando, resulta que:

$$(x+y-z-w)^2 = 0 \Rightarrow x+y-z-w=0$$

De aquí: $x-z = w-y \wedge x-w = z-y$

$$\Rightarrow S = \left[\left(\frac{x-z}{w-y} \right)^2 + \left(\frac{x-w}{z-y} \right)^2 \right]^{213} = (1^2 + 1^2)^3 \therefore S = 8$$

21. Si: $\frac{a+b+1}{a-1} + \frac{a+b+1}{b+2} = 4$; $a \neq 1$, $b \neq -2$;

hallar el valor de:

$$\frac{54}{a^3 - b^3 - 3ab(a-b)} + \frac{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4}{27}$$

Resolución:

$$\text{De: } \frac{a+b+1}{a-1} + \frac{a+b+1}{b+2} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{a-1+b+2}{a-1} + \frac{a-1+b+2}{b+2} = 4$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{b+2}{a-1} + \frac{a-1}{b+2} + 1 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{b+2}{a-1} + \frac{a-1}{b+2} = 2 \Rightarrow a-1 = b+2$$

$$\Rightarrow a-b=3$$

Tenga en cuenta que:

$$a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = (a-b)^3$$

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 = (a-b)^4$$

$$\Rightarrow T = \frac{54}{(a-b)^3} + \frac{(a-b)^4}{27} \therefore T = \frac{54}{3^3} + \frac{3^4}{27} = 2 + 3 = 5$$

22. Si: $\sqrt[4]{mn} + \sqrt[4]{pq} = 6 \Rightarrow \sqrt[4]{m^2n^2} - \sqrt[4]{p^2q^2} = 24$

calcular: $\sqrt[4]{mn} - \sqrt[4]{pq}$; donde: $\{p, q, m, n\} \subset \mathbb{N}^*$

Resolución:

$$\text{De los datos: } (\sqrt[4]{mn})^2 - (\sqrt[4]{pq})^2 = 24$$

Por diferencia de cuadrados:

$$(\sqrt[4]{mn} + \sqrt[4]{pq})(\sqrt[4]{mn} - \sqrt[4]{pq}) = 24$$

$$(6)(\sqrt[4]{mn} - \sqrt[4]{pq}) = 24 \therefore \sqrt[4]{mn} - \sqrt[4]{pq} = 4$$

23. Reducir: $(a+b)^3 + (a-b)^3 - 8a^3 + 6a(a-b)(a+b)$

Resolución:

Sea A la expresión dada, la cual se podrá escribir así:

$$A = (a+b)^3 + (a-b)^3 + 6a(a-b)(a+b) - 8a^3$$

Reacomodando el segundo miembro:

$$A = (a+b)^3 + (a-b)^3 + 3(2a)(a-b)(a+b) - 8a^3$$

$$A = (a+b)^3 + (a-b)^3 +$$

$$3(a-b)(a+b)[(a+b) + (a-b)] - 8a^3$$

Notar que la expresión de arriba fue obtenida por ser un binomio al cubo.

$$A = [(a+b) + (a-b)]^3 - 8a^3 \Rightarrow A = [2a]^3 - 8a^3$$

$$\Rightarrow A = 8a^3 - 8a^3 \therefore A = 0$$

24. Si: $x + y + z = 0$, hallar el valor de:

$$\frac{(x + y - 2z)^3 + (y + z - 2x)^3 + (x + z - 2y)^3}{xyz}$$

Resolución:

Sea R el valor pedido:

$$R = \frac{(x + y - 2z)^3 + (y + z - 2x)^3 + (x + z - 2y)^3}{xyz}$$

De la condición: $x + y + z = 0$; se obtiene:

$$x + y = -z; y + z = -x \wedge x + z = -y$$

Reemplazando:

$$R = \frac{(-3z)^3 + (-3x)^3 + (-3y)^3}{xyz} \Rightarrow R = \frac{-27(x^3 + y^3 + z^3)}{xyz}$$

$$\text{Como: } x + y + z = 0 \Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\Rightarrow R = \frac{-27(3xyz)}{xyz} = -(27)(3) \therefore R = -81$$

25. Si se cumple: $\sqrt[n]{(ab)^{n(n+1)}} = \frac{1}{4^n}$

calcular el valor de:

$$A = [(a + b)^2 - (a - b)^2] [(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2] \dots [(a^n + b^n)^2 - (a^n - b^n)^2]$$

Resolución:

Aplicando la equivalencia de Legendre en cada uno de los factores: $A = [4(ab)][4(a^2b^2)] \dots [4(a^n b^n)]$

Notar que existen n factores:

$$A = \underbrace{[4 \cdot 4 \dots 4]}_{n \text{ factores}} [(ab)(ab)^2 \dots (ab)^n]$$

$$A = 4^n (ab)^{1+2+\dots+n} \Rightarrow A = 4^n (ab)^{\frac{n(n+1)}{2}} = 4^n \sqrt[n]{(ab)^{n(n+1)}}$$

$$\text{Por dato: } \sqrt[n]{(ab)^{n(n+1)}} = \frac{1}{4^n}$$

$$\text{Luego: } A = 4^n \left(\frac{1}{4^n} \right) \therefore A = 1$$

26. Si: $M = N$, donde:

$$M = (y + z - 2x)^2 + (z + x - 2y)^2 + (x + y - 2z)^2$$

$$N = (y - z)^2 + (z - x)^2 + (x - y)^2$$

$$\text{hallar el valor de: } R = \frac{(x^2 + y)^2 - (y^2 + z)^2 + (z^2 + x)^2}{(x^2 + z)^2 + (y^2 + x)^2 - (x^2 + y)^2}$$

Resolución:

Reduciendo el segundo miembro de M con el auxilio del trinomio al cuadrado se consigue:

$$M = 6x^2 + 6y^2 + 6z^2 - 6xy - 6xz - 6yz$$

Reduciendo el segundo miembro de N con el auxilio del binomio al cuadrado se consigue:

$$N = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

Por condición: $M = N$; luego reduciendo:

$$4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4xy + 4xz + 4yz$$

$$\text{O sea: } x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$$

De acuerdo a propiedad se cumple:

$$x = y = z = \text{cte.}$$

Finalmente el valor pedido será:

$$R = \frac{(x^2 + x)^2 - (x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2}{(x^2 + x)^2 + (x^2 + x)^2 - (x^2 + x)^2} = \frac{(x^2 + x)^2}{(x^2 + x)^2}$$

$$\therefore R = 1$$

27. Si: $a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge a = -b - c$; hallar el valor de:

$$E = \frac{(a^2 - ab + b^2)(a + b) + c^3}{6abc}$$

Resolución:

$$a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\} \wedge a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ (propiedad)}$$

$$E = \frac{(a^2 - ab + b^2)(a + b) + c^3}{6abc} \Rightarrow E = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{6abc}$$

$$\text{Reemplazando: } E = \frac{3abc}{6abc} = \frac{1}{2}$$

28. Si se cumple que: $x + 4y + 9z = 0$, simplifique:

$$N = \frac{(x - 2y)^2}{xy} + \frac{(2y - 3z)^2}{yz} + \frac{(3z - x)^2}{xz}$$

Resolución:

$$N = \frac{(x - 2y)^2}{xy} + \frac{(2y - 3z)^2}{yz} + \frac{(3z - x)^2}{xz}$$

$$N = \frac{x^2 - 4xy + 4y^2}{xy} + \frac{4y^2 - 12yz + 9z^2}{yz} + \frac{9z^2 - 6xz + x^2}{xz}$$

$$\Rightarrow N = \frac{x}{y} - 4 + \frac{4y}{x} + \frac{4y}{z} - 12 + \frac{9z}{y} + \frac{9z}{x} - 6 + \frac{x}{z}$$

$$\Rightarrow N = \frac{x + 9z}{y} + \frac{4y + 9z}{x} + \frac{x + 4y}{z} - 22$$

$$\text{Como: } x + 4y + 9z = 0$$

$$\Rightarrow N = \frac{-4y}{y} + \left(\frac{-x}{x} \right) + \left(\frac{-9z}{z} \right) - 22 \therefore N = -36$$

29. Si: $x + y = \sqrt{10}$; $(x - z)^2 + (z + y)^2 = 6$,

hallar el valor de: $M = xz + xy - yz - z^2$

Resolución:

$$M = xz + xy - yz - z^2$$

$$M = x(z + y) - z(y + z) = (x - z)(z + y)$$

$$\text{Datos: } x + y = \sqrt{10} \wedge (x - z)^2 + (z + y)^2 = 6$$

$$(x - z) + (y + z) = \sqrt{10}, \text{ al cuadrado:}$$

$$\frac{(x - z)^2 + (y + z)^2}{6} + \frac{2(x - z)(y + z)}{2M} = 10$$

$$\therefore M = 2$$

30. Si: $a^2 + b^2 + c^2 = 2$; $a^3 + b^3 + c^3 = 3$,

$$\text{calcular: } A = \frac{(a + b + c)^{-1}(1 - abc)}{2 - ab - bc - ca}$$

Resolución:

$$\Rightarrow A = \frac{3 - 3abc}{3(a + b + c)(2 - ab - bc - ca)}$$

$$\text{Datos: } a^2 + b^2 + c^2 = 2 \wedge a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

$$\Rightarrow A = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{3(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}$$

Pero, por la identidad de Gauss:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$\therefore A = 1/3$$

31. Si tres números reales positivos a, b y c cumplen

$$\text{que: } \frac{1}{a}(b + c) + \frac{1}{b}(c + a) + \frac{1}{c}(a + b) = 6, \text{ hallar el}$$

$$\text{valor de la expresión: } M = \frac{(a + b + c)^3}{a^3 + b^3 + abc}$$

Resolución:

De la condición, escribimos:

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{a}{c} = 2 + 2 + 2$$

Transponiendo y agrupando:

$$\left(\frac{b}{a} - 2 + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} - 2 + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{c}{b} - 2 + \frac{b}{c}\right) = 0$$

Cada paréntesis se puede escribir:

$$\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{a}} - \sqrt{\frac{a}{c}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{c}{b}} - \sqrt{\frac{b}{c}}\right)^2 = 0$$

Para que la suma de cuadrados valga 0, la única posibilidad es que cada sumando tiene valor 0.

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}} = 0 \Rightarrow \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow a = b$$

En forma similar: $a = c \wedge b = c$ Conclusión: $a = b = c = k$

Reemplazando en lo pedido:

$$M = \frac{(3k)^3}{3k^3} = \frac{27k^3}{3k^3} \therefore M = 9$$

32. Si:
- $x, y, z \in \mathbb{R}$
- ; tal que satisface:

$$\frac{x^2 - yz}{x} + \frac{y^2 - xz}{y} + \frac{z^2 - xy}{z} = 0$$

$$\text{hallar el valor de: } T = \frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{x^3 + y^3 + z^3}$$

Resolución:

$$\text{De: } \frac{x^2 - yz}{x} + \frac{y^2 - xz}{y} + \frac{z^2 - xy}{z} = 0$$

$$x^2yz - (yz)^2 + y^2xz - (xz)^2 + z^2xy - (xy)^2 = 0$$

Hagamos los cambios: $xy = a$; $yz = b$; $xz = c$

$$\Rightarrow ac - b^2 + ab - c^2 + bc - a^2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac}{\text{conocido}} = 0$$

$$\frac{1}{2} [(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$$

Para que la suma de cuadrados valga 0, la única posibilidad es que cada sumando tiene valor 0.

$$\Rightarrow \frac{a-b}{a=b} = 0; \frac{b-c}{b=c} = 0; \frac{c-a}{c=a} = 0$$

Reponiendo:

$$xy = yz; yz = xz; xy = xz \Rightarrow y = z; z = x; y = x$$

Luego: $x = y = z = k$

$$\Rightarrow T = \frac{(2k)(2k)(2k)}{3k^3} = \frac{8k^3}{3k^3} \therefore T = 8/3$$

33. Si:
- $(a+b+c+d)^2 = 4(a+b)(c+d)$
- , hallar el

$$\text{valor de: } S = \frac{a-c}{d-b} + \frac{b-c}{d-a}$$

Resolución:En el dato, hagamos los cambios: $a+b = x$; $c+d = y$

$$\Rightarrow (x+y)^2 = 4xy$$

$$\Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 4xy \Rightarrow (x-y)^2 = 0$$

De aquí: $x = y$ Reponiendo: $a+b = c+d$ De aquí: $a-c = d-b$; también: $b-c = d-a$

$$\Rightarrow S = \frac{a-c}{a-c} + \frac{b-c}{b-c} \therefore S = 2$$

34. Si:
- $x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$
- , hallar el valor de:

$$R = (8x^3 - 6x)$$

Resolución:

$$\text{Dato: } x = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \Rightarrow 2x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$$

$$\text{Al cubo: } (2x)^3 = \left[\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right]^3$$

$$8x^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 3\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

$$8x^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 6x + \left(\frac{b}{a}\right)^3 \Rightarrow 8x^3 - 6x = \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

$$\therefore T = \left(\frac{a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

35. Si se cumple que:

$$(a-b-c)^2 - (a-b+c)^2 = 2\{(a-b)^2 + c^2\}$$

$$\text{halle el valor de: } \frac{b-c}{a}$$

Resolución:

Hacemos un cambio de variable.

Sea: $x = a - b$

$$\text{Reemplacemos: } (x-c)^2 - (x+c)^2 = 2(x^2 + c^2)$$

Usando la identidad de Legendre, tenemos:

$$-4xc = 2(x^2 + c^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + c^2 = -2xc \Rightarrow x^2 + c^2 + 2xc = 0$$

$$\Rightarrow (x+c)^2 = 0 \Rightarrow x = -c$$

Regresando a las variables iniciales, obtenemos:

$$x = a - b = -c \Rightarrow a = b - c$$

$$\therefore \frac{b-c}{a} = 1$$

36. Si tenemos que
- $2^{4x} + 2^{-4x} = 47$
- , halle el valor de:
- $2^x + 2^{-x}$

Resolución:

Completamos el trinomio cuadrado perfecto:

$$2^{4x} + 2^{-4x} + 2 = 49$$

$$(2^{2x} + 2^{-2x})^2 = 49 \Rightarrow (2^{2x} + 2^{-2x}) = 7$$

Razonando de igual forma obtenemos:

$$(2^{2x} + 2^{-2x} + 2) = 9$$

$$(2^x + 2^{-x})^2 = 9 \Rightarrow 2^x + 2^{-x} = 3$$

37. Si
- $x + \frac{1}{x} = 1$
- ; halle el valor de:
- $x^5 + \frac{1}{x^5}$

Resolución:

Para obtener la suma de potencias quintas, podemos multiplicar la suma de cubos por la suma de cuadrados.

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^2} + \frac{1}{x^5}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) = x^5 + \frac{1}{x} + x + \frac{1}{x^5} \quad \dots(1)$$

Del dato tenemos:

$$\bullet \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = -1$$

$$\bullet \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 1^3 \Rightarrow x^3 + 1 + 3x\left(\frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 1$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 = 1^3 \Rightarrow x^3 + \frac{1}{x^3} = 1 - 3 = -2$$

Reemplazamos en (1): $(-1)(-2) = x^5 + \frac{1}{x^5} + 1$

$$\therefore x^5 + \frac{1}{x^5} = 1$$

38. Si: $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, encontrar el equivalente de:

$$T = \sqrt[n-1]{\frac{x^n + y^n + z^n}{(x+y+z)^n}}, \text{ sabiendo que: } x+y+z \neq 0$$

Resolución:

Se sabe que:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] \quad \dots(1)$$

$$\text{Dato: } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0 \quad \dots(2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{1}{2}(x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = 0$$

Como:

$x+y+z \neq 0 \Rightarrow$ la única posibilidad es que:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0$$

Se debe cumplir que:

$$\left. \begin{aligned} (x-y)^2 = 0 &\Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y \\ (y-z)^2 = 0 &\Rightarrow y-z=0 \Rightarrow y=z \\ (z-x)^2 = 0 &\Rightarrow z-x=0 \Rightarrow z=x \end{aligned} \right\} x=y=z$$

Luego la expresión propuesta equivale a:

$$T = \sqrt[n-1]{\frac{x^n + y^n + z^n}{(x+x+x)^n}} = \sqrt[n-1]{\frac{3x^n}{(3x)^n}} = \sqrt[n-1]{\frac{3x^n}{3^n x^n}}$$

$$T = \sqrt[n-1]{\frac{3^{1-n}}{1}} \therefore T = \frac{1}{3}$$

39. Si: $x^2 + y^2 + z^2 = 5$; $x^3 + y^3 + z^3 = 7 \wedge xyz = -2$

$$\text{determinar el valor de: } P = \frac{x^3 + y^3 + (z-2)^3}{xy} - 3z$$

Resolución:

Recordemos la siguiente identidad:

$$(x+y+z)^3 \equiv 3(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) - 2(x^3+y^3+z^3) + 6xyz$$

En nuestro caso, reemplazando datos:

$$(x+y+z)^3 = 3\left(\frac{51}{9}\right)(x+y+z) - 2(7) + 6(-2)$$

$$\Rightarrow 3(x+y+z)^3 = 51(x+y+z) - 78$$

Vemos que: $x+y+z = 2$

$$\Rightarrow x+y+(z-2) = 0 \quad \dots(1)$$

Como: $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$

De (1): $x^3+y^3+(z-2)^3=3xy(z-2)$

$$\Rightarrow \frac{x^3+y^3+(z-2)^3}{xy} = 3z-6$$

$$P = \frac{x^3+y^3+(z-2)^3}{xy} - 3z \therefore P = -6$$

40. Reducir:

$$M = (m-n+p-q)^3 - (m-n+p)^3 + 3q(m-n+p-q)(m-n+p)$$

Resolución:

Hacemos un cambio de variable: $m-n+p = x$

Reemplazando:

$$M = (x-q)^3 - (x)^3 + 3q(x-q)(x)$$

$$M = x^3 - 3x^2q + 3xq^2 - q^3 - x^3 + (3qx^2 - 3q^2x)$$

$$\therefore M = -q^3$$

41. Calcular: $P = \left[\frac{b-a}{b-c}\right]\left[\frac{b+c}{b+a}\right] + \left[\frac{a-b}{a-c}\right]\left[\frac{a+c}{a+b}\right]$

$$\text{si: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$$

Resolución:

Efectuando:

$$P = \frac{b-a}{b+a}\left[\frac{b+c}{b-c} - \frac{a+c}{a-c}\right] \quad \dots(1)$$

$$\text{Pero: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{c} \Rightarrow c = \frac{2ab}{a+b}$$

Reemplazando el valor de c en la expresión (1):

$$P = \frac{b-a}{b+a}\left[\frac{b+\frac{2ab}{a+b}}{b-\frac{2ab}{a+b}} - \frac{a+\frac{2ab}{a+b}}{a-\frac{2ab}{a+b}}\right]$$

$$\Rightarrow P = \frac{b-a}{b+a}\left[\frac{b+3a}{b-a} - \frac{a+3b}{a-b}\right]$$

$$\Rightarrow P = \frac{(b-a)}{(b+a)} \times \frac{4(b-a)}{(b-a)} \therefore P = 4$$

42. Determinar la expresión algebraica p para que la siguiente igualdad:

$$p^2 = (x^2 + y^2 + z^2 + p)^2 - (x+y+z)^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

se convierta en identidad.

Resolución:

Sea: $x^2 + y^2 + z^2 = a$

$$(x+y+z)^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{a} + 2(xy+yz+xz)$$

$$(x+y+z)^2 = \frac{a}{a} + 2(xy+yz+xz)$$

$$\Rightarrow p^2 = (a+p)^2 - [a + 2(xy+yz+xz)]a$$

Efectuando operaciones y reduciendo quedará:

$$2ap = 2a(xy+yz+xz)$$

$$\therefore p = xy + yz + zx$$

43. Si $a+b+c = a^2 + b^2 + c^2 = 1$,

$$\text{calcular: } \frac{a^3+b^3+c^3-3abc}{a^4+b^4+c^4-4abc}$$

Resolución:Dato: $a + b + c = 1$

Elevando al cuadrado:

$$\underbrace{a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)}_1 = 1$$

$$\Rightarrow ab + bc + ac = 0$$

Sabemos que:

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2) \dots (I)$$

Además:

$$\underbrace{(ab + bc + ac)^2}_{0} = a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 + 2abc \underbrace{(a + b + c)}_1$$

Usando los datos: $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 = -2abc$

$$\text{En (I): } (1)^2 = a^4 + b^4 + c^4 + 2(-2abc)$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 - 4abc = 1$$

También sabemos que:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ac) + 3abc$$

$$\text{Con los datos: } a^3 + b^3 + c^3 = (1)^3 - 3(1)(0) + 3abc$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$$

Reemplazando en lo pedido:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^4 + b^4 + c^4 - 4abc} = 1$$

44. Simplificar:

$$\frac{(a-b)^2}{(b-c)(c-a)} + \frac{(b-c)^2}{(c-a)(a-b)} + \frac{(c-a)^2}{(a-b)(b-c)}$$

Resolución:

Hagamos los cambios:

$$a - b = x, \quad b - c = y, \quad c - a = z$$

$$\text{Nos piden: } \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy}$$

$$\text{Operando se tiene: } \frac{x^3 + y^3 + z^3}{xyz} \dots (\alpha)$$

Pero de los cambios vemos que: $x + y + z = 0$, entonces se cumple que:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

$$\text{Reemplazando en } (\alpha): \frac{3xyz}{xyz} = 3$$

45. Si $\{a; b; c; x; y; z\} \subset \mathbb{R}$, que verifica:

$$(a + b + c)^2 = 3(ab + bc + ca - x^2 - y^2 - z^2)$$

hallar el valor de:

$$(x^3 + y^3 + z^3 + 3^3) \left[\frac{a^7 + b^7 + c^7}{(a^2 + b^2 + c^2)(a^5 + b^5 + c^5)} \right]$$

Resolución:

De la condición:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 3(ab + bc + ac) - 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac + 3(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Multiplicamos por 2 y desdoblamos:

$$a^2 + a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac + 6(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Agrupando como se indica:

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 6(x^2 + y^2 + z^2) = 0$$

Observación

La suma de cuadrados de números reales igual a 0, implica que cada sumando (base) vale 0.

$$\Rightarrow a - b = 0, b - c = 0, c - a = 0, x = 0, y = 0, z = 0$$

De aquí: $a = b = c \wedge x = y = z = 0$

Luego, en lo que nos piden:

$$3^3 \left[\frac{3a^7}{(3a^2)(3a^5)} \right] = 27 \left[\frac{3a^7}{9a^7} \right] = 9$$

46. Si:

$$2(x + y)^2 + 2(z + w)^2 = (x + y + z + w)^2 - (x + y - z - w)^2$$

$$\text{hallar: } M = \left(\frac{x + y}{z + w} \right)^{10}$$

Resolución:

Dato:

$$2(x + y)^2 + 2(z + w)^2 = [(x + y) + (z + w)]^2 - [(x + y) - (z + w)]^2$$

$$\text{Hacemos: } x + y = a; \quad z + w = b$$

$$\text{En el dato: } 2a^2 + 2b^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$2a^2 + 2b^2 = 4ab \Rightarrow 2a^2 - 4ab + 2b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = 0 \Rightarrow (a - b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$$

$$\text{De donde: } x + y = z + w$$

$$\text{En M: } M = \left(\frac{x + y}{z + w} \right)^{10} \Rightarrow M = 1^{10}$$

$$\therefore M = 1$$

47. Si que se cumple:

$$\frac{a^2c + b^2a + c^2b}{12} = abc \wedge \frac{b^2c + c^2a + a^2b}{18} = abc$$

$$\text{calcular: } \frac{(a + b)^2}{ab} + \frac{(b + c)^2}{bc} + \frac{(c + a)^2}{ca}$$

Resolución:

De las dos condiciones, se obtiene:

$$(a^2c + b^2a + c^2b) + (b^2c + c^2a + a^2b) = 12abc + 18abc$$

$$\Rightarrow a^2c + b^2a + c^2b + b^2c + c^2a + a^2b = 30abc \dots (\alpha)$$

Transformemos lo que nos piden:

$$\frac{c(a + b)^2 + a(b + c)^2 + b(c + a)^2}{abc}$$

$$\frac{ca^2 + 2abc + cb^2 + ab^2 + 2abc + ac^2 + bc^2 + 2abc + ba^2}{abc}$$

Agrupando en el numerador:

$$\frac{(ca^2 + cb^2 + ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2) + 6abc}{abc}$$

Usando (α) , se obtiene:

$$\frac{30abc + 6abc}{abc} = \frac{36abc}{abc} = 36$$

48. Si: $(x + b)^2 + (x + c)^2 = 0$

$$\dots (1)$$

$$\frac{(x + a)(x + b)}{x + c} + \frac{(x + a)(x + c)}{x + b} + \frac{(x + b)(x + c)}{x + a} = 1 \dots (2)$$

$$\text{hallar: } \frac{x + a}{(x + b)(x + c)}$$

Resolución:

Efectuando operaciones en la expresión (2):

$$\frac{(x+a)^2(x+b)^2 + (x+a)^2(x+c)^2 + (x+b)^2(x+c)^2}{(x+a)(x+b)(x+c)} = 1$$

Agrupando términos en el numerador:

$$\frac{(x+a)^2 \overbrace{[(x+b)^2 + (x+c)^2]}^0 + (x+b)^2(x+c)^2}{(x+a)(x+b)(x+c)} = 1$$

$$\text{De donde: } \frac{(x+b)^2(x+c)^2}{(x+a)(x+b)(x+c)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x+b)(x+c)}{(x+a)} = 1 \quad \therefore \frac{x+a}{(x+b)(x+c)} = 1$$

49. Si: $(1+a^{-1}x)(a+y)(1+a^{-1}z) = a + x + y + z$,
calcular: $P = x^{-1} + y^{-1} + z^{-1}$

Resolución:

$$\text{Con el dato: } \left(1 + \frac{x}{a}\right)(a+y) \left(1 + \frac{z}{a}\right) = a + (x+y+z)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+x}{a}\right)(a+y) \left(\frac{a+z}{a}\right) = a + (x+y+z)$$

$$\Rightarrow (a+x)(a+y)(a+z) = a^3 + a^2(x+y+z)$$

$$a^3 + a^2(x+y+z) + a(xy+yz+zx) + xyz = a^3 + a^2(x+y+z)$$

$$\Rightarrow a(xy+yz+zx) = -xyz$$

$$\Rightarrow \frac{xy+yz+zx}{xyz} = -\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{xy}{xyz} + \frac{yz}{xyz} + \frac{zx}{xyz} = -\frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{1}{a}$$

$$\text{En P: } P = z^{-1} + x^{-1} + y^{-1} \quad \therefore P = -\frac{1}{a}$$

50. Si se cumple que: $a+b+c=0$, hallar el valor de:

$$\frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^4 - 3(a^4+b^4+c^4)^2}}{a^4+b^4+c^4}$$

Resolución:

Recordando la identidad condicional:

$$a+b+c=0 \Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4)$$

$$\text{Además, si: } a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$$

$$\text{Elevamos al cuadrado: } a^2+b^2+2ab=c^2$$

$$\Rightarrow a^2+b^2-c^2=-2ab$$

Volvemos a elevar al cuadrado:

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2=4a^2b^2$$

$$\Rightarrow a^4+b^4+c^4=2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) \quad \dots(\alpha)$$

$$\text{También: } a+b+c=0$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ac)$$

Elevando al cuadrado nuevamente:

$$(a^2+b^2+c^2)^2 = 4[(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)+2abc(a+b+c)]$$

De aquí, decimos:

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2} = 2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)$$

 Reemplazamos en (α) :

$$a^4+b^4+c^4 = \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2}$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 = 2(a^4+b^4+c^4)$$

$$\text{Al cuadrado: } (a^2+b^2+c^2)^4 = 4(a^4+b^4+c^4)^2$$

Reemplazando en lo que nos piden:

$$\frac{\sqrt{4(a^4+b^4+c^4)^2 - 3(a^4+b^4+c^4)^2}}{a^4+b^4+c^4}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{a^4+b^4+c^4}}{a^4+b^4+c^4} = 1$$

51. Si $x^3 + \frac{1}{y^3} = y^3 + \frac{1}{z^3} = 1$, hallar el valor de $(xyz)^{102} - 1$

Resolución:

$$\text{De la condición: } x^3 + \frac{1}{y^3} = 1$$

$$\Rightarrow x^3y^3 + 1 = y^3 \Rightarrow x^3y^3 = y^3 - 1 \quad \dots(\alpha)$$

$$\text{Además: } y^3 + \frac{1}{z^3} = 1 \Rightarrow \frac{1}{z^3} = 1 - y^3$$

$$\text{Invertiendo: } z^3 = \frac{1}{1-y^3} \quad \dots(\beta)$$

$$(\alpha) \times (\beta): x^3y^3z^3 = (y^3 - 1) \left[\frac{1}{-(y^3 - 1)} \right] = -1$$

$$\text{Elevando a la 34: } (xyz)^{102} = 1 \quad \therefore (xyz)^{102} - 1 = 0$$

52. Reducir:

$$\frac{(x^2+x+1)^2 - 2(x^4+x^3+1) + (x^2-x+1)^2}{(x^2+\sqrt{3})^2 + 2(x^4-3) + (x^2-\sqrt{3})^2}$$

Resolución:


Nota

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Observamos que el numerador (N) y denominador (D) son trinomios cuadrados perfectos.

$$N = (x^2 + x + 1)^2 - 2(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)^2$$

$$\Rightarrow N = [(x^2 + x + 1) - (x^2 - x + 1)]^2 \Rightarrow N = (2x)^2$$

$$\text{Como: } x^4 - 3 = (x^2 + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3})$$

$$D = (x^2 + \sqrt{3})^2 + 2(x^2 + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}) + (x^2 - \sqrt{3})^2$$

$$\Rightarrow D = [(x^2 + \sqrt{3}) + (x^2 - \sqrt{3})]^2 \Rightarrow D = (2x^2)^2$$

$$\text{Luego: } \frac{N}{D} = \frac{4x^2}{4x^4} \quad \therefore \frac{N}{D} = x^{-2}$$

53. Si: $\frac{x-z}{z-y} + \frac{z^2}{(x+y)(z-y)} = 1$,

$$\text{hallar: } \left(\frac{z-x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x+y}{z}\right)^2 + \left(\frac{z-y}{x}\right)^2$$

Resolución:

$$\text{Del dato: } (x-z)(x+y) + z^2 = (x+y)(z-y)$$

$$\Rightarrow (x-z)(x+y) - (x+y)(z-y) + z^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+y)(x-z-z+y) + z^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+y)(x+y-2z) + z^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x+y)^2 - 2(x+y)z + z^2}_{\text{TCP}} = 0 \Rightarrow (x+y-z)^2 = 0$$

$$\text{De aquí: } x + y = z \begin{cases} z - x = y \\ z - y = x \end{cases}$$

Reemplazando en lo pedido:

$$\left(\frac{y}{y}\right)^2 + \left(\frac{z}{z}\right)^2 + \left(\frac{x}{x}\right)^2 = 1 + 1 + 1 = 3$$

54. Si $a^2 + bc + bd + cd = 0$, calcular:

$$\frac{(a+b)(a+c)(a+d)}{(b+c)(b+d)(c+d)}$$

Resolución:

Sabemos que:

$$(a+b+c)(ab+bc+ac) - abc = (a+b)(b+c)(c+a)$$

$$\text{Nos piden: } \frac{(a+b)(a+c)(a+d)}{(b+c)(b+d)(c+d)} = \frac{N}{D}$$

Trabajamos con el numerador (N):

$$N = a^3 + (b+c+d)a^2 + (bc+bd+cd)a + bcd$$

$$\text{Del dato: } bc + bd + cd = -a^2$$

$$\Rightarrow N = (a^3 + (b+c+d)a^2 + (-a^2)a + bcd$$

$$\Rightarrow N = (b+c+d)[-(bc+bd+cd)] + bcd$$

$$\Rightarrow N = -[(b+c+d)(bc+bd+cd) - bcd]$$

conocido por identidad

$$\text{Reemplazando: } N = -(b+c)(b+d)(c+d)$$

$$\text{Luego: } \frac{N}{D} = \frac{-(b+c)(b+d)(c+d)}{(b+c)(b+d)(c+d)} \therefore \frac{N}{D} = -1$$

55. Si $a + b = \sqrt{3}$ y $a - b = \sqrt{2}$, determinar el valor de: $4ab(a^2 + 3b^2)(b^2 + 3a^2)$

Resolución:

Los datos los elevaremos al cubo:

$$(a+b)^3 = \sqrt{3}^3 \Rightarrow a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = 3 \dots(I)$$

$$(a-b)^3 = \sqrt{2}^3 \Rightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 2 \dots(II)$$

$$\text{Sumando (I) y (II): } 2a^3 + 6ab^2 = 5$$

$$\Rightarrow 2a(a^2 + 3b^2) = 5 \dots(III)$$

$$\text{Restando (I) y (II): } 2b^3 + 6a^2b = 1$$

$$\Rightarrow 2b(b^2 + 3a^2) = 1 \dots(IV)$$

$$(III) \times (IV): 4ab(a^2 + 3b^2)(b^2 + 3a^2) = 5$$

56. Encontrar el valor numérico de la expresión:

$$P = \frac{a^4 + b^4 + (a+b)^4}{[a^2 + b^2 + (a+b)^2]^2} \text{ para: } a = \sqrt{3} - 1;$$

$$b = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$$

Resolución:

Efectuando operaciones en el numerador (N) de P se tiene:

$$N = a^4 + b^4 + a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$N = 2a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4$$

$$N = 2[a^4 + 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 + b^4]$$

$$\text{Desdobleamos: } 3a^2b^2 \text{ en } 2a^2b^2 \text{ y } a^2b^2$$

$$N = 2[(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + (2a^3b + 2ab^3) + a^2b^2]$$

$$N = 2[(a^2 + b^2)^2 + 2ab(a^2 + b^2) + a^2b^2]$$

$$N = 2[(a^2 + b^2) + ab]^2 \Rightarrow N = 2[a^2 + ab + b^2]^2$$

El denominador (D) de P se puede escribir:

$$D = [a^2 + b^2 + a^2 + 2ab + b^2]^2$$

$$D = [2a^2 + 2b^2 + 2ab]^2 \Rightarrow D = 4(a^2 + b^2 + ab)^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{N}{D} = \frac{2(a^2 + ab + b^2)^2}{4(a^2 + ab + b^2)^2} \therefore P = \frac{1}{2}$$

57. Si: $a + b + c = 1$, hallar el valor de:

$$\frac{1 - 6abc}{2(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Resolución:

Sabemos que:

$$(a+b+c)^3 = 3(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

Reemplazando el dato: $a + b + c = 1$

$$\Rightarrow 1^3 = 3(a^2 + b^2 + c^2)(1) - 2(a^3 + b^3 + c^3) + 6abc$$

$$\Rightarrow 1 - 6abc = -[2(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2 + b^2 + c^2)]$$

$$\therefore \frac{1 - 6abc}{2(a^3 + b^3 + c^3) - 3(a^2 + b^2 + c^2)} = -1$$

58. Reducir:

$$T = (m - n + p - q)^3 - (m - n + p)^3 + 3q(m - n + p)(m - n + p - q) + q^3$$

Resolución:

Sea: $m - n + p = x$, reemplazando en T:

$$T = (x - q)^3 - x^3 + 3qx(x - q) + q^3$$

$$T = x^3 - q^3 - 3qx(x - q) - x^3 + 3qx(x - q) + q^3$$

$$\therefore T = 0$$

59. Si: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{1}{y}$, calcular:

$$\frac{(1+y^2)(1+x^2)}{(x+y)^2} + \frac{(x+y)^2}{(1+y^2)(1+x^2)}$$

Resolución:

$$\text{Del dato: } xy + y = -x + 1 \Rightarrow xy + x + y = 1$$

Elevando al cuadrado:

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2x^2y + 2xy^2 + 2xy = 1$$

$$2xy(x+y+1)$$

$$\text{Pero: } x + y = 1 - xy \dots(\alpha)$$

$$\Rightarrow x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2xy(2 - xy) = 1$$

Sumando 1 y transponiendo términos:

$$1 + x^2y^2 + x^2 + y^2 = 2 - 2xy(2 - xy)$$

$$(1 + x^2) + y^2(1 + x^2) = 2(1 - 2xy + x^2y^2)$$

$$(1 + x^2)(1 + y^2) = 2(1 - xy)^2$$

$$\text{Reemplazando } (\alpha): (1 + x^2)(1 + y^2) = 2(x + y)^2$$

$$\Rightarrow \frac{2(x+y)^2}{(x+y)^2} = \frac{2(x+y)^2}{2(x+y)^2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

60. En base a las condiciones:

$$m^2 + n^2 + p^2 = 16; mn + np + pm = -6; mnp = 4$$

calcular el valor de:

$$m^4n + n^4p + p^4m + m^4p + n^4m + p^4n$$

$$\text{además: } (m + n + p)^{-1} < 0$$

Resolución:

Transformemos lo que nos piden (agrupamos):

$$(m^4n + n^4m) + (n^4p + p^4n) + (p^4m + m^4p) = mn(m^3 + n^3) + np(n^3 + p^3) + pm(p^3 + m^3) \dots(I)$$

Del dato:

$$\frac{m^2 + n^2 + p^2 + 2(mn + np + pm)}{(m + n + p)^2} = 16 - 2(6)$$

De aquí: $m + n + p = 2$ o $m + n + p = -2$

Tomamos: $m + n + p = -2$ (por dato)

Sabemos que:

$$m^3 + n^3 + p^3 = (m + n + p)^3 - 3(m + n + p)(mn + mp + np) + 3mnp$$

Usando los datos tenemos:

$$m^3 + n^3 + p^3 = (-2)^3 - 3(-2)(-6) + 3(4)$$

$$\Rightarrow m^3 + n^3 + p^3 = -32$$

Usando en (I):

$$= mn(-32 - p^3) + np(-32 - m^3) + mp(-32 - n^3)$$

Agrupando adecuadamente:

$$= -32(mn + np + mp) - mnp^3 - nmp^3 - mpn^3$$

$$= -32 \frac{(mn + np + mp)}{(-6)} - \frac{mnp(p^2 + m^2 + n^2)}{(4)} \frac{(16)}{(16)}$$

∴ Efectuando resulta: 128

61. Reducir la expresión:

$$\sqrt{4(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b - c)^2 - (a - b + c)^2 - (b + c - a)^2}$$

siendo: $a + b + c = 2p$

Resolución:

La expresión pedida se puede escribir:

$$\sqrt{(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2 - (a + b - c)^2 - (a - b + c)^2 - (b + c - a)^2}$$

Sea: $a + b - c = x$, $a - b + c = y$, $b + c - a = z$

De aquí podemos decir que:

$$x + y = 2a, x + z = 2b, y + z = 2c$$

Además, sumando se deduce que:

$$x + y + z = a + b + c$$

Reemplazando en lo pedido se tiene:

$$\sqrt{(x + y)^2 + (x + z)^2 + (y + z)^2 - x^2 - y^2 - z^2}$$

Desarrollando y reduciendo, queda:

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz}$$

$$= \sqrt{(x + y + z)^2} = x + y + z$$

∴ Reponiendo se tiene: $a + b + c = 2p$

62. Si $a + \sqrt{ac} = b + \sqrt{bc}$,

además: $a \neq b \wedge abc \neq 0$

Calcular el valor de: $\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{a}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}$

Resolución:

$$\text{De: } a + \sqrt{ac} = b + \sqrt{bc} \Rightarrow a - b = \sqrt{bc} - \sqrt{ac}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = \sqrt{c}(\sqrt{b} - \sqrt{a})$$

$$\Rightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = -\sqrt{c}(\sqrt{a} - \sqrt{b})$$

$$\Rightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0 \quad \dots(I)$$

Nos piden: $\frac{a}{\sqrt{bc}} + \frac{b}{\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ab}}$

$$= \frac{\sqrt{a}\sqrt{a} + \sqrt{b}\sqrt{b} + \sqrt{c}\sqrt{c}}{\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}^3 + \sqrt{b}^3 + \sqrt{c}^3}{\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}}$$

Pero si: $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{a}^3 + \sqrt{b}^3 + \sqrt{c}^3 = 3\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$$

Reemplazando arriba, se tiene:

$$\frac{3\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}}{\sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c}} = 3$$

63. Si $\frac{a-b}{b} = \frac{b+c}{c} \wedge c + a > 1$, determinar:

$$P = \left(\frac{c-a-2b-c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a-b-2c}{c}\right)^2 + \left(\frac{b+c-2a}{a}\right)^2$$

Resolución:

Del dato: $a^2 - ab = bc + c^2 \Rightarrow a^2 - c^2 = ab + bc$

$$\Rightarrow (a + c)(a - c) = b(a + c)$$

De aquí: $a - c = b \begin{cases} a - b = c \\ b + c = a \end{cases}$

Reemplazando en lo que nos piden:

$$P = \left(\frac{b-2b}{b}\right)^2 + \left(\frac{c-2c}{c}\right)^2 + \left(\frac{a-2a}{a}\right)^2$$

$$\therefore P = \left(\frac{-b}{b}\right)^2 + \left(\frac{-c}{c}\right)^2 + \left(\frac{-a}{a}\right)^2 = 3$$

64. Si se verifica que: $\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{x}-1} = 1$, calcular el valor numérico de la expresión:

$$T(x) = 64x^3 - 129x^2 + 876x$$

Resolución:

Elevando al cubo el dato: $[\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}]^3 = [1]^3$

Desarrollando:

$$\sqrt{x} + 1 + 3\sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}(\sqrt[3]{\sqrt{x}+1} + \sqrt[3]{\sqrt{x}-1}) + \sqrt{x} - 1 = 1$$

1. Dato:

$$2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{\sqrt{x}-1} = 1 \Rightarrow 3\sqrt[3]{\sqrt{x}-1} = 1 - 2\sqrt{x} \quad \dots(I)$$

Elevando al cubo ambos miembros de (I):

$$[3\sqrt[3]{\sqrt{x}-1}]^3 = [1 - 2\sqrt{x}]^3$$

$$\Rightarrow 27(\sqrt{x}-1) = 1 - 3(2\sqrt{x}) + 3(4x) - (4x)(2\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{x} + 8x\sqrt{x} = 28 - 15x \quad \dots(II)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros de (II):

$$36x + 96x^2 + 64x^3 = 784 - 840x + 225x^2$$

$$\Rightarrow 64x^3 - 129x^2 + 876x = 784$$

$$T(x)$$

$$\therefore T(x) = 784$$

65. Si: $x^3 + 1 = 0 \wedge x \neq -1$, calcular

$$A = \frac{(x-1)^3}{x^2} - \frac{(x-1)^3}{x}$$

Resolución:

Transformando el dato por suma de cubos:

$$\Rightarrow (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$$

De aquí: $\underbrace{x = -1}_F \vee \underbrace{x^2 - x + 1 = 0}_V$

Consideramos: $x^2 - x + 1 = 0 \quad \dots(I)$

Nos piden: $A = \frac{(x-1)^3}{x^2} - \frac{(x-1)^3}{x}$

De (I): $x - 1 = x^2 \Rightarrow A = \frac{(x^2)^3}{x^2} - \frac{(x^2)^3}{x}$

$$\Rightarrow A = x^4 - x^5 \Rightarrow A = x^3(x - x^2)$$

Pero del dato: $x^3 = -1$ y de (I): $x - x^2 = 1$

Luego: $A = (-1)(1) \therefore A = -1$

66. Efectuar y simplificar:

$$A = (x + y - z)(x + y) + (x - y + z)(x + z) + (y + z - x)(y + z) - 2(x^2 + y^2)$$

Resolución:

$$A = \underbrace{(x + y - z)(x + y)}_{(y + z - x)(y + z)} + \underbrace{(x - y + z)(x + z)}_{(y + z - x)(y + z)} - 2(x^2 + y^2)$$

Multiplicando convenientemente:

$$A = \underbrace{(x + y)^2}_{x(y + z) - 2x^2 - 2y^2} - z(x + y) + \underbrace{(x + z)^2}_{x(y + z) - 2x^2 - 2y^2} - y(x + z) + \underbrace{(y + z)^2}_{x(y + z) - 2x^2 - 2y^2} - x(y + z) - 2x^2 - 2y^2$$

Desarrollando dichas equivalencias:

$$A = x^2 + 2xy + y^2 - zx - zy + x^2 + 2xz + z^2 - yx - yz + y^2 + 2yz + z^2 - xy - xz - 2x^2 - 2y^2$$

$$\therefore A = 2x^2$$

67. Si:

$$a + b + c = \frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}$$

$$\text{hallar: } T = \frac{(a+b-c)^2}{ab} + \frac{(b+c-a)^2}{bc} + \frac{(c+a-b)^2}{ac}$$

Resolución:

Del dato:

$$a + b + c = \frac{c-a+a-b+b-c}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$a + b + c = \frac{0}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$a + b + c = 0 \quad \dots (I)$$

$$\text{De (I): } a + b = -c; \quad b + c = -a; \quad a + c = -b$$

Reemplazando en T:

$$T = \frac{(-c-c)^2}{ab} + \frac{(-a-a)^2}{bc} + \frac{(-b-b)^2}{ac}$$

$$T = \frac{4c^2}{ab} + \frac{4a^2}{bc} + \frac{4b^2}{ac} = 4 \left[\frac{c^3 + a^3 + b^3}{abc} \right]$$

$$\Rightarrow T = \frac{4 \times 3abc}{abc} \quad \therefore T = 12$$

68. Si la diferencia de las cuartas potencias de dos números es 369 y el cuadrado de la suma de los cuadrados es: 1681. ¿Cuál es la suma de los números?

Resolución:

$$a^4 - b^4 = 369 \quad \dots (1)$$

$$(a^2 + b^2)^2 = 1681 \quad \dots (2)$$

$$\text{De (1): } (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = 369 \quad \dots (3)$$

$$\text{De (2): } (a^2 + b^2)^2 = 41^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 41 \quad \dots (4)$$

Reemplazando (4) en (3):

$$41(a^2 - b^2) = 369 \Rightarrow a^2 - b^2 = 9 \quad \dots (5)$$

$$\text{Sumando (4) + (5): } 2a^2 = 50 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{Reemplazando en (4): } 5^2 - b^2 = 41 \Rightarrow b = 4$$

$$\therefore \text{ Piden: } a + b = 9$$

69. Siendo: $ab = \sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1$, $a + b - 1 = \sqrt[3]{10}$, hallar: $3ab(a + b)$ **Resolución:**

$$\text{Primera igualdad: } ab = \sqrt[3]{100} - \sqrt[3]{10} + 1$$

$$\text{Segunda igualdad: } a + b = \sqrt[3]{10} + 1$$

Multiplicando miembro a miembro (da suma de cubos):

$$\Rightarrow ab(a + b) = \sqrt[3]{100}^3 + 1^3 = 11 \quad \therefore 3ab(a + b) = 33$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



PROBLEMA 1 (UNI 1978)

Si se tiene la suma S y el producto P de dos cantidades

x, y , entonces: $\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2$ es igual a:

- A) $(S + P)^2 - (s - P)^2$ B) $0,25S^4 - PS^2 + P^2$
 C) $S^4 + 2PS^2 - 3P^2S + P^4$ D) $S^4 - PS(1 - S) + \frac{3}{2}P^2$
 E) $S^4 - PS + \frac{3}{2}P^2$

Resolución:

Sumando y restando $2xy$ en el numerador de la base:

$$\left(\frac{x^2 + y^2 + 2xy - 2xy}{2}\right)^2 = \left(\frac{(x + y)^2 - 2xy}{2}\right)^2$$

Reemplazando datos:

$$\therefore \left[\frac{S^2 - 2P}{2}\right]^2 = \frac{S^4 - 4S^2P + 4P^2}{4} = 0,25S^4 - S^2P + P^2$$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 1978)

Determinar los dos números consecutivos: $x > y$, que cumplen la siguiente relación:

$$\left(\frac{x - y}{x + y} + \frac{x + y}{x - y}\right) \left(\frac{x^2 + y^2}{2xy} + 1\right) \frac{xy}{x^2 + y^2} = 5$$

- A) $x = 3, y = 2$ B) $x = 9, y = 8$ C) $x = 7, y = 6$
 D) $x = 2, y = 1$ E) N. A.

Resolución:

Efectuando operaciones en cada uno de los paréntesis:

$$\left[\frac{(x + y)^2 + (x - y)^2}{(x + y)(x - y)}\right] \left[\frac{(x + y)^2}{2xy}\right] \left[\frac{xy}{x^2 + y^2}\right] = 5$$

$$\left[\frac{2(x^2 + y^2)}{(x + y)(x - y)}\right] \left[\frac{(x + y)^2}{2xy}\right] \left[\frac{xy}{x^2 + y^2}\right] = 5 \Rightarrow \left[\frac{x + y}{x - y}\right] = 5$$

De donde: $x + y = 5x - 5y \Rightarrow 6y = 4x \Rightarrow 2x = 3y$

$\therefore$ Por condición y de la igualdad: $x = 3; y = 2$

Clave: A

PROBLEMA 3 (UNI 1981)

Sabiendo que: $\frac{a}{x^3} + \frac{x^3}{a} = 7$

El valor de la expresión: $4\sqrt{\frac{a}{x^9}} + 4\sqrt{\frac{x^9}{a}}$ es:

- A) $\sqrt{3}$ B) 4 C) $\sqrt{5}$ D) 5 E) $\sqrt{2}$

Resolución:

Sumando 2 miembro a miembro en la condición:

$$\frac{a}{x^9} + 2 + \frac{x^9}{a} = 7 + 2 + \left(\sqrt{\frac{a}{x^9}} + \sqrt{\frac{x^9}{a}}\right)^2 = 9$$

De donde: $\sqrt{\frac{a}{x^9}} + \sqrt{\frac{x^9}{a}} = 3$

Nuevamente sumando 2 miembro a miembro:

$$\sqrt{\frac{a}{x^9}} + 2 + \sqrt{\frac{x^9}{a}} = 3 + 2 \Rightarrow \left[4\sqrt{\frac{a}{x^9}} + 4\sqrt{\frac{x^9}{a}}\right]^2 = 5$$

TCP

$$\therefore 4\sqrt{\frac{a}{x^9}} + 4\sqrt{\frac{x^9}{a}} = \sqrt{5}$$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 1982 - II)

Cuál es el valor que asume la expresión:

$$U = \frac{x^2 + y^2}{xy} + \frac{x + 2y}{2x} + \frac{2y}{x + 3y}$$

$$\text{si: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x + y}$$

- A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) N. A.

Resolución:

$$\text{Efectuando la condición: } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{4}{x + y}$$

$$\Rightarrow (x + y)^2 = 4xy = x^2 + 2xy + y^2 = 4xy \Rightarrow (x - y)^2 = 0$$

Sacando $\sqrt{\quad}$ miembro a miembro: $x - y = 0$

De donde $x = y$

Reemplazando en U :

$$U = \frac{x^2 + x^2}{x^2} + \frac{x + 2x}{2x} + \frac{2x}{x + 3x} \Rightarrow U = 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore U = 4$$

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

Sabiendo que se cumple: $a \times b \times c = 0$

$$a + b + c = 1$$

$$\text{halle el valor de: } K = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

- A) 0 B) 1/6 C) 1/3 D) 1/2 E) 1

Resolución:

Si: $a \times b \times c = 0$

$$a + b + c = 1$$

$$K = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - \frac{a^3 + b^3 + c^3}{3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 - 2(ab + bc + ac) \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 1 - 3(ab + bc + ac) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 - 2(ab + bc + ac) \\ a^3 + b^3 + c^3 &= 1 - 3(ab + bc + ac) \end{aligned} \right.$$

Reemplazando en K :

$$K = \frac{1 - 2(ab + bc + ac)}{2} - \frac{1 - 3(ab + bc + ac)}{3}$$

$$K = \frac{1}{2} - (ab + bc + ac) - \frac{1}{3} + (ab + bc + ac)$$

$$\therefore K = \frac{1}{6}$$

Clave: B



PROBLEMAS

- Calcular el valor de: $S = \frac{(a+b)^3 - (a-b)^3}{3b^{-2} + a^{-2}}$,
si: $b = \sqrt[3]{2}$; $a = \sqrt{3}$
A) 6 B) 12 C) 1
D) 9 E) $\sqrt{5}$
- Si a, b y c son números que satisfacen las condiciones: $a + b + c = 3$; $a^3 + b^3 + c^3 = 30$; $abc = 4$;
calcular: $T = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{6}$
- Si $x, y \in \mathbb{R}$; tal que se verifica:
 $\frac{36}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{y}} = 42 - 9\sqrt{x} - \sqrt{y}$
calcular: $x + y$
A) 7 B) 25 C) 10
D) 13 E) 20
- Si $x, y \in \mathbb{R}^+$, calcular el menor valor de:
 $V = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$
A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4
- Sea $x > 0$ que verifica: $x^2 - 3x + 1 = 0$,
calcular el valor numérico de:
 $S = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$
A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28
- Si: $\frac{x^4 + 1}{x^2} = 5$; $x \neq 0$; calcular: $T = x^8 + \frac{1}{x^8}$
A) 525 B) 527 C) 526
D) 528 E) 529
- Dada la expresión:
 $2(x+y)^2 + 2(z+w)^2 = (x+y+z+w)^2 - (x+y-z-w)^2$;
calcular: $v = \left(\frac{x+y}{z+w}\right)^{10}$
A) 3 B) 4 C) 2
D) 1 E) 0
- Reducir: $S = (x+1)(x-1)(x^4 + x^2 + 1)$,
si: $x = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}$
A) 99 B) 100 C) 1000
D) 999 E) 1
- Efectuar: $T = \frac{(x+5)^2 - (x+11)(x-1)}{(x+3)^2 - (x+5)(x+1)}$
A) 7 B) 6 C) 8
D) 9 E) -5

PROPUESTOS



- Simplificar:
 $V = \sqrt{\frac{(a^2 + 2ab - b^2)^2 + (a^2 - 2ab - b^2)^2}{2}}$
A) $a^2 - b^2$ B) $2a^2$ C) $2b^2$
D) $a^2 + b^2$ E) ab
- Sean: $S = (x+1)(x+2)(x+3)$
 $T = (x+2)(x+3) + (x+2)(x+4)$
Indicar: $\frac{S - x^3}{T - 5x^2 - 8}$
A) 2 B) 3 C) 1
D) 0 E) x
- Encontrar el valor de: $x^4 - 4x - 4$,
si: $x = \sqrt{\sqrt{2}+1} + \sqrt{\sqrt{2}-1}$
A) 4 B) 3 C) 1
D) 0 E) -2
- Si: $a + b + c = 2p$; calcular:
 $T = (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 + p^2$
A) $a + b + c$ B) abc C) $1 + abc$
D) $a^2 + b^2 + c^2$ E) 1
- Efectuar:
 $S = (x^2 + 1 - x)(x^2 + 1 + x)(x^5 + 1)(x^2 - 1)$
Dar el valor de: $S + 1$
A) 1 B) 0 C) x^6
D) x^2 E) x^{12}
- Dados los números: a, b, c ; tal que $a \neq b \neq c$; además: $(a+b+c)^2 = 3(ab+ac+bc)$
Calcular: $V = \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2}$
A) 2 B) 4 C) 8
D) 5 E) 1
- Calcular el valor de: $T = \frac{(x+a)(x+b)}{a+2x+b} - \frac{x^3}{ab}$
si: $(a+2x+b)(a-2x+b) = (a-b)^2$
A) 11 B) 0 C) 4
D) 2 E) 3
- Si: $a - \frac{1}{a} = 2$, calcular: $S = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left(a^3 - \frac{1}{a^3}\right)$
A) 78 B) 80 C) 82
D) 84 E) 86
- Sea la expresión: $\frac{(a+b)^4 - (a-b)^4}{(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2} = 4$
calcular: $N = \frac{4a + 2b}{4a - b}$
A) 1 B) 2 C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{3}$ E) 4

19. Si: $a^3 + b^3 + c^3 = ab + ac + bc$,

$$\text{simplificar: } S = \frac{(1-a)bc + (1-b)ac + (1-c)ab}{a(a-b) + b(b-c) + c(c-a)}$$

- A) $a + b + c$ B) $a + b - c$ C) $a - b - c$
D) 0 E) 1

20. Si: $a + \frac{1}{a} = 5$, calcular: $T = \sqrt{\frac{(a^5 + a^3)(a^3 + a)}{4a^6}}$

- A) 5/2 B) 2/5 C) 1
D) 2 E) 5

21. Suponiendo que:

$$\left(\frac{x^2}{2y}\right)^3 + \left(\frac{y^2}{2x}\right)^3 = 3(x^3 + y^3); \quad x^6 - y^6 = 6x^4y^4\sqrt{x^3 + y^3}$$

$$\text{calcular: } \frac{x^{-3} - y^{-3}}{3}$$

- A) 1 B) -2/3 C) -3
D) 2/3 E) -1/3

22. A partir de: $\frac{a^2+1}{a^2} + \frac{b^2+1}{b^2} + \frac{c^2+1}{c^2} = 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

donde $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$

$$\text{calcular: } \frac{(a^3 + b^3 + c^3)^3 [a^6 + b^6 + c^6]^6}{(a^9 + b^9 + c^9)}$$

- A) 1 B) 1/3 C) 3
D) 27 E) 1/27

23. Si: $x + y + z = 1$; $x^3 + y^3 + z^3 = 4$,

$$\text{calcular: } \frac{1}{x+yz} + \frac{1}{y+xz} + \frac{1}{z+xy}$$

- A) 3/2 B) 1 C) 3
D) -1 E) -2

24. Sabiendo que: $abc = 1$, hallar el valor de:

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1}$$

- A) 3 B) -1 C) 2
D) 1 E) 0

25. Si se cumple que: $2x^{-1} = 2 - x$, calcular el valor de $[x^9 - (x^4 + x^2 + 1)(x^6 + x^3 + 1)]^3$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) x^3 E) $1/x$

26. Si: $a + b + c + d = 0$; calcular:

$$\frac{abc + abd + acd + bcd}{a^3 + b^3 + c^3 + d^3}$$

- A) 1 B) 1/2 C) 2
D) 1/3 E) 1/9

27. Si se cumple:

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} = 1$$

hallar el valor de:

$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{a+c+d} + \frac{c^2}{a+b+d} + \frac{d^2}{a+b+c}$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 1/4

28. Calcular el valor de Z, si:

$$Z^{\frac{p+q}{p-q}} = \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right] \left[x^{\frac{1}{p}} + x^{\frac{1}{q}} \right]$$

$$\text{cuando: } x = \left[\frac{p-q}{p+q} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right]^{2pq}$$

- A) 1 B) 0 C) 1/2
D) $\frac{(a-b)}{(a+b)}$ E) $\frac{(a+b)}{(a-b)}$

29. Sabiendo que:

$$(a-b)(a-c) + (b-c)(b-a) + (c-a)(c-b) = 2(a+b+c)^2$$

donde $abc \neq 0$, hallar el valor de:

$$\frac{\frac{a+3b+c}{ac} + \frac{b+3c+a}{ab} + \frac{c+3a+b}{bc}}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}$$

- A) -1 B) -4 C) -9
D) -13 E) -15

30. Si: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$, calcular el valor de:

$$\left(2\left(\frac{a}{b}\right) + \left(\frac{b}{a}\right)^3\right) + \left(2\left(\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^3\right)$$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2 E) -2

31. Siendo x, y, z tres números reales diferentes de cero que verifican:

$$(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = (x+y-2z)^2 + (y+z-2x)^2 + (z+x-2y)^2$$

$$\text{simplificar: } \frac{x^{11} + y^{11} + z^{11} + 11x^3y^3z^3(xy + yz + zx)}{xyz(x^4 + y^4 + z^4)}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

32. Si: $x + y + z = 1$, hallar el valor de:

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3 + 3(xy + yz + zx) - 1}{xyz}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

33. Si: $\frac{a^2-bc}{bc} + \frac{b^2-ac}{ac} + \frac{c^2-ab}{ab} = 0$; $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}$

$$\text{hallar: } \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$$

- A) 2 B) 3 C) 6
D) 4 E) $A \vee C$

34. Dadas las relaciones:

$$a = (a-b)^2 + b(a+1); \quad b = (b-c)^2 + c(b+1)$$

$$c = (c-a)^2 + a(c+1)$$

$$\text{simplificar: } \frac{(a^6 - b^6)^2}{c^6 - 4a^3b^3}$$

- A) a^3b^3 B) b^3c^3 C) $a^3 + b^6$
D) a^3c^3 E) c^6

35. Si: $y^{-1} - x^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$,

hallar el valor de: $\frac{16x^4y^4 + (x^2 - y^2)^2}{x^4y^2 + x^2y^4}$

- A) 3 B) 2 C) 8 D) 4 e) 1

36. Sabiendo que: $x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0 \wedge xyz \neq 0$; se ñalar el equivalente de:

$$\sqrt[3]{\frac{x^9 + y^9 + z^9 - 3xyz(x^6 + y^6 + z^6) + 6x^3y^3z^3}{x^6 + y^6 + z^6 - 3x^2y^2z^2}}$$

- A) xyz B) $x^2 + y^2 + z^2$
C) $x + y + z$ D) $x^3 + y^3 + z^3$
E) $(x + y + z)^3$

37. Sabiendo que:

$$A = (x + y - 1)^3 + 3(x + y)(x + y - 1)$$

$$B = (x + y + 1)^3 - 3(x + y)(x + y + 1)$$

$$C = [(x + y)^3 + 1]^2 + [(x + y)^3 - 1]^2$$

¿a qué es igual: $2AB - C$?

- A) 4 B) 2 C) -4
D) -2 E) 0

38. Tres números reales diferentes a, b y c verifican la siguiente condición:

$$a = \sqrt[3]{p + qa}; b = \sqrt[3]{p + qb}; c = \sqrt[3]{p + qc}$$

Determinar: $\frac{a^5 + b^5 + c^5}{pq}$

- A) 5 B) 9 C) 2/3
D) 6 E) -6

39. Si: $x + y + z = 1 \wedge xy + yz + xz = xyz$;

calcular: $(x^9 + y^9 + z^9) \left(\frac{1}{x^{11} + y^{11} + z^{11} + 1} \right)$

- A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 1/3 E) 3

40. Si: $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x} = \frac{0,5}{x+y+z}$

hallar el valor de:

$$\frac{64(x+y+z)^6 - (x+y)^6 - (y+z)^6 - (z+x)^6}{(x+y)^3(y+z)^3 + (y+z)^3(z+x)^3 + (z+x)^3(x+y)^3}$$

- A) 2 B) -3 C) -2 D) 3 E) 6

41. Calcular el valor de:

$$\frac{(x+y-2z)^3 + (y+z-2x)^3 + (x+z-2y)^3}{(1-x)(1-y)(1-z)},$$

cuando: $x + y + z = 3$

- A) 3 B) 9 C) 27
D) 81 E) 1

42. Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, tal que: $x^2 - 2x + y^2 - 6y + 10 = 0$, calcular xy

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 1 E) 0

43. Si: $a + b + c = 20$; $a^2 + b^2 + c^2 = 300$, hallar el valor de: $(a+b)^2 + (a+c)^2 + (b+c)^2$

- A) 900 B) 700 C) 600
D) 300 E) 500

44. Sea: $x = \sqrt[3]{2} + 1$; $y = \sqrt[3]{5} - 1$; calcular:

$$\frac{x^3 + 3x - 3x^2 - 1}{y^3 + 3y^2 + 3y}$$

- A) 5/2 B) 3/2 C) 1/2
D) 2/3 E) 3/5

45. Simplificar:

$$E = (x^2 + x + 1)(x^4 + x^2 + 1)(x^8 + x^4 + 1) - x^{16} - x^6,$$

si se cumple que $x^2 = x$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) x E) x^2

46. Si se cumple que: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$; $a + b + c \neq 0$, determinar el valor de:

$$x = \sqrt[6]{\frac{a^7 + b^7 + c^7}{(a+b+c)^7}} + \sqrt[9]{\frac{a^{10} + b^{10} + c^{10}}{(a+b+c)^{10}}}$$

$\{a, b, c\} \in \mathbb{R}$

- A) 2/3 B) 9 C) 1
D) 1/3 E) 0

47. Si: $m + n = 1 - p \wedge mn + np + mp = mnp$,

hallar valor de: $\frac{mn(m+n) + mp(m+p) + np(n+p)}{mnp}$

- A) -2 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

48. Simplificar: $\frac{x^2 - 1}{(1+ax)^2 - (x+a)^2}$

- A) $\frac{1}{a+1}$ B) $\frac{1}{a-1}$ C) $\frac{1}{a^2-1}$
D) $\frac{a}{a^2-1}$ E) $\frac{1}{1-a^2}$

49. Calcular: $25a^2 + 9b^2$, si: $5a + 3b = 11 \Rightarrow ab + 9$

- A) 31 B) 61 C) 91
D) 7 E) 71

50. Calcular: $\sqrt[3]{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + \left(\frac{x}{y}\right)^{-2}} + 4$, si se cumple que:

$$x^2 + y^2 = 5xy; \{x, y\} \subset \mathbb{R}^+$$

- A) -2 B) 3 C) 5
D) -4 E) 1

51. La diferencia de dos números es "a" y la diferencia de sus cuadrados es "b", hallar el producto de dichos números.

- A) $\frac{a^2 - b^2}{4a^2}$ B) $\frac{b^2 - a^4}{4a^2}$ C) $\frac{a^4 - b^4}{4a^2}$
D) $\frac{a^4 - b^2}{4a^2}$ E) $\frac{a^4 - b^2}{a^2}$

52. Sabiendo que $a, b \in \mathbb{R}^+$ / $ab = 1$, calcular:

$$\sqrt{2 + \sqrt{(a^2 - b^2)^2 + 4}}$$

- A) $a^2 - b^2$ B) $a - b$ C) $a + b$
D) $2(a + b)$ E) $\frac{a+b}{2}$

53. Reduzca la expresión:

$$\sqrt[3]{[(m+1)^2(m^2+2m-1) - (m-1)^2(m^2-2m-1)]^2}$$

- A) $3m^2$ B) m^2 C) $(3m)^2$
D) $9m$ E) $(2m)^2$

54. Calcular: $H = (x-2)(y^2-1)$,

$$\text{si: } x = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}; \quad y = \frac{a+b}{a-b}$$

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 11

55. Reducir la expresión:

$$\frac{3(a^2 + b^2)^2}{\frac{(a+b)^4 + (a-b)^4}{4} + \frac{(a+b)^2(a-b)^2}{2}}$$

- A) 5 B) 3 C) $a - b$
D) 4 E) $a + b$

56. Si: $a^3 + b^3 + c^3 = 3$, $a^2 + b^2 + c^2 = 2$;

$$\text{calcular: } Q = \frac{(a+b+c)(2-ab-bc-ca)}{1-abc}$$

- A) $1/3$ B) 3 C) 2
D) $1/2$ E) 1

57. Sabiendo que $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$ y además:

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ca} + \frac{c}{ab} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

$$\text{hallar: } J = \frac{a^8}{b^2c^6} + \frac{b^8}{c^2a^6} + \frac{c^8}{a^2b^6}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $a + b + c$ E) $a^2b^2c^2$

58. Dado: $a^2 = b^2 + c^2$; reducir la expresión:

$$J = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - a\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - b\right)\left(\frac{a+b+c}{2} - c\right)}$$

- A) bc B) $bc/2$ C) ac
D) a^b E) $ab/2$

59. Si: $\frac{1}{(a-b)^2} + \frac{1}{(b-c)^2} + \frac{1}{(c-a)^2} = 2007^2$

$$\text{calcular el valor de: } E = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}$$

- A) 500 B) 1000 C) 2007
D) 0 E) 4000

60. Si: $a + b + c = 0$; $m + n + p = 0 \wedge$

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} - 1 = 0, \text{ calcular: } E = ma^2 + nb^2 + pc^2$$

- A) a B) b C) c
D) abc E) 1

61. Si: $x + 2x^{-1} = 2$, hallar:

$$M = x^3 - (x^4 + x^2 + 1)(x^6 + x^3 + 1)$$

- A) 1 B) -1 C) x
D) $-x$ E) $1/x$

62. Si:

$$S = (a+b)(a+c)(b-c) + (c-a)(a+b)(b+c)$$

$$T = (a-b)(b+c)(a+c) + (b-c)(c-a)(a-b)$$

$$\text{Calcular: } S + T.$$

- A) abc B) $a + b + c$ C) 0
D) $a^2 + b^2 + c^2$ E) $a^3 + b^3 + c^3$

63. Si el polinomio:

$$P(x) = (ab - a^2b^2 - c)x^3 + (abc^2 - bc - a)x^2 + (a^2bc - a^2c^2 - b)x + (abc - 5)$$

es idénticamente nulo.

$$\text{Calcular el valor de: } S = \frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}$$

- A) 0 B) 1 C) $1/5$
D) -5 E) $2/5$

64. Calcular el valor de:

$$(x^6 + x^3 + 1)(x^6 - x^3 + 1)(x^{12} - x^6 + 1)(x^{24} - x^{12} + 1)$$

$$\text{para: } x = \sqrt[24]{3}$$

- A) 1 B) 5 C) 7
D) 9 E) 13

65. Hallar el VN de: $T = (m^{-3} + n^{-3})^{-1}$

$$\text{si: } mn = 2 \text{ y } m + n = 2\sqrt{2}$$

- A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) 3 E) 4

66. Dado:

$$M^3 = 2(a+b)[(a+b)^2 - 2ab + (a-b)^2] + (a-b)[(a+b)^2 + 4(a^2 + b^2) - (a-b)^2]$$

hallar el valor de M.

- A) $2a$ B) $2b$ C) $-2ab$
D) $8a^3$ E) $8b^3$

67. Si: $\frac{mn+n^2}{3n-m} = \sqrt{\sqrt{n^n} + \sqrt{n^n - m^n}} \sqrt{\sqrt{n^n} - \sqrt{n^n - m^n}}$,

$$\text{calcular el valor de: } S = \frac{mn+m^2}{mn+n^2} + \frac{m^5-n^5}{m^2+m^3}$$

- A) 1 B) 0 C) $m + n$
D) n^2 E) $n - 1$

68. Dado: $a + b + c \neq 0$, evaluar:

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right) \left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right)$$

- A) 3 B) 6 C) 9
D) -6 E) -3

69. Si: $a + b + c = a^{-1}bc + b^{-1}ca + c^{-1}ab$,

$$\text{calcular: } S = \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a + b + c}$$

- A) 0 B) 1/3 C) 2/3
D) 1 E) -1

70. Sabiendo que: $x = \frac{2}{n}(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$

$$n = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$$

$$\text{calcular: } (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + (x - a_3)^2 + \dots + (x - a_n)^2$$

- A) 0 B) n C) n^2
D) $n - 1$ E) $(n - 1)^2$

71. Si:

$$(m^2 + n^2 + p^2)^2 = 2mnp(m + n + p) + m^2n^2 + m^2p^2 + n^2p^2$$

$$\text{calcular el valor de: } T = \frac{m^3 + 2n^3 + 3p^3}{mnp}$$

- A) 1 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

72. Calcular el valor numérico de:

$$(a^2 - ac - bc)^2 + (b^2 - ba - ca)^2 + (c^2 - cb - ba)^2 + 2(a^3c + b^3a + c^3b)$$

$$\text{para: } a = \sqrt{5 - \sqrt{3}}; b = \sqrt{\sqrt{3} - 1}; c = \sqrt{3}$$

- A) $\sqrt{3}$ B) 8 C) 16
D) 49 E) 7

73. Si: $a + b = x$, reducir:

$$\sqrt[3]{x(x+1)[x^4 - x^3 + x^2 - 3ab(x-1)^2] - (bx+a)^3} - ax$$

- A) a B) b C) $a(a+b)$
D) $b(a+b)$ E) 0

74. Si: $mnp = m + n + p = 1$, calcular:

$$(m + m^{-1})^2 + (n + n^{-1})^2 + (p + p^{-1})^2 - (m + m^{-1})(n + n^{-1})(p + p^{-1})$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

75. Si: $x = \frac{a^2 + b^2}{ab}$; $y = \frac{a^2 + c^2}{ac}$; $z = \frac{b^2 + c^2}{bc}$

calcular el valor de:

$$T = \sqrt{x(x-yz)} + y(y-2xz) + z(z+2xy)$$

$$\text{A) } a + b + c \quad \text{B) } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad \text{C) } 1$$

$$\text{D) } 2 \quad \text{E) } 0$$

76. Si: $x + 2 = 23\sqrt{2x}$, calcular: $T = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt[8]{2x}}$

- A) 3 B) 4 C) $\sqrt{8}$
D) $\sqrt{5}$ E) 5

77. Siendo: $a + b + c = m$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3m^2$$

$$a^3 + b^3 + c^3 = 7m^3$$

$$\text{calcular: } S = (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$$

- A) $-13m^3$ B) $6m^3$ C) $2m^3$
D) $-m^3$ E) $7m^3$

78. Sabiendo que: $a^3 + b^3 + c^3 = 3$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2$$

$$\text{calcular: } S = \frac{(a + b + c)(2 - ab - ac - bc)}{1 - abc}$$

- A) 1/3 B) 3 C) 2
D) 1/2 E) 1

79. Si: $a + b + c = 0$, hallar el valor de x.

$$a^2\left(\frac{x}{bc} - 1\right) + b^2\left(\frac{x}{ac} - 1\right) + c^2\left(\frac{x}{ab} - 1\right) = 5abc(a^{-1} + b^{-1} + c^{-1})$$

- A) $a + b + c$ B) $ab + bc + ca$
C) $a^2 + b^2 + c^2$ D) $3abc$
E) $a^2 - c^2$

80. Si: $x = \sqrt{2[3(mn + mp + np) - (m + n + p)^2]}$

calcular el valor de:

$$M = \frac{(x + m - n)^3 + (x + n - p)^3 + (x + p - m)^3}{(m - n)(m - p)(n - p)}$$

- A) 1 B) -1 C) 2
D) -2 E) -3

CLAVES

1. B	11. C	21. B	31. D	41. D	51. B	61. A	71. C
2. A	12. B	22. A	32. C	42. B	52. C	62. C	72. D
3. D	13. D	23. E	33. E	43. B	53. E	63. A	73. B
4. C	14. E	24. D	34. E	44. C	54. B	64. E	74. D
5. B	15. B	25. B	35. C	45. A	55. B	65. C	75. D
6. B	16. B	26. D	36. C	46. A	56. B	66. A	76. D
7. D	17. D	27. A	37. C	47. A	57. C	67. A	77. A
8. D	18. B	28. E	38. A	48. C	58. B	68. C	78. B
9. D	19. A	29. D	39. C	49. B	59. C	69. A	79. B
10. D	20. A	30. A	40. A	50. B	60. D	70. B	80. E

División algebraica

Cocientes notables

08

capítulo

Paolo Ruffini nació en Valentano (22 de septiembre de 1765) y murió en Módena (10 de mayo de 1822). Fue un matemático, profesor y médico italiano. Paolo entró en la Universidad de Módena en 1783 para estudiar Matemáticas, Medicina, Filosofía y Literatura. Finalmente, el 9 de junio de 1788, Ruffini se graduó en Filosofía, Medicina y Cirugía. Poco después consiguió su grado en Matemáticas.

El 15 de octubre de 1788 fue nombrado profesor de Fundamentos de Análisis. Ruffini fue elegido catedrático de Elementos de Matemáticas en 1791. Sin embargo, no era solo matemático, pues en 1791 obtuvo la licencia para ejercer la Medicina en Módena.

Paolo Ruffini es conocido como el descubridor del llamado método de Ruffini que permite hallar los coeficientes del polinomio que resulta de la división de un polinomio cualquiera por el binomio $x - a$. Sin embargo, no fue esta su mayor contribución al desarrollo de la matemática. Hacia 1805 elaboró una demostración de la imposibilidad de la solución general de las ecuaciones algebraicas de grados quinto y superiores, aunque cometió ciertas inexactitudes que serían corregidas por el matemático noruego Niels Henrik Abel. En 1806 acepta una cátedra de Matemática Aplicada en la escuela militar de Módena.



Paolo Ruffini

Italia, 1765 - Italia, 1822

Fuente: Wikipedia

◀ DIVISIÓN ALGEBRAICA

Es la operación que consiste en hallar una expresión llamada cociente dadas otras denominadas dividendo y divisor, de modo tal que se cumpla:

$$D(x) = d(x)q(x) + r(x) \quad \vee \quad \frac{D(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

De donde:

$D(x)$: dividendo; $q(x)$: cociente entero

$d(x)$: divisor; $r(x)$: resto o residuo

$q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$: cociente completo

◀ DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Para efectuar la división entre dos polinomios se conocen varios métodos. Presentamos a continuación algunos de ellos:

Método clásico

Para dividir polinomios se debe tener en cuenta los siguientes pasos:

- Se completan y ordenan los polinomios con respecto a una sola letra o variable (en caso falte un término este se completará con cero).
- En caso existan dos o más variables se asumirá solo a una de ellas como tal y las demás harán el papel de números o constantes.
- Se divide el primer término del D, por el primero del d, obteniéndose el primer término del q. Luego este se multiplica por cada uno de los términos del divisor y el resultado se resta del dividendo.
- Se baja el término siguiente del D, y se repite el paso anterior tantas veces hasta que el resto sea a lo más un grado menos que el grado del D (resto de grado máximo). O en todo caso, si la división es exacta, el resto será un polinomio idénticamente nulo.

Ejemplos:

1. Dividir: $\frac{6x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 2}{3x^2 + 5x + 2}$

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 + x^3 + x^2 + 11x + 2 & 3x^2 + 5x + 2 \\ -6x^4 - 10x^3 - 4x^2 & \\ \hline -9x^3 - 3x^2 + 11x & \\ 9x^3 + 15x^2 + 6x & \\ \hline 12x^2 + 17x + 2 & \\ -12x^2 - 20x - 8 & \\ \hline -3x - 6 & \\ \hline r(x) & \end{array} \quad \begin{array}{l} q(x) \end{array}$$

2. Dividir:
 $(6a^5 - 26a^3b^2 + 5a^4b + 33a^2b^3 - 24ab^4 + 6b^5) \div (2a^2 - 3ab + b^2)$

Ordenando al D:

$$\begin{array}{r|l} 6a^5 + 5a^4b - 26a^3b^2 + 33a^2b^3 - 24ab^4 + 6b^5 & 2a^2 - 3ab + b^2 \\ -6a^5 + 9a^4b - 3a^3b^2 & \\ \hline 14a^4b - 29a^3b^2 + 33a^2b^3 & \\ -14a^4b + 21a^3b^2 - 7a^2b^3 & \\ \hline -8a^3b^2 + 26a^2b^3 - 24ab^4 & \\ 8a^3b^2 - 12a^2b^3 + 4ab^4 & \\ \hline 14a^2b^3 - 20ab^4 + 6b^5 & \\ -14a^2b^3 + 21ab^4 - 7b^5 & \\ \hline ab^4 - b^5 & \\ \hline r(a; b) & \end{array} \quad \begin{array}{l} q(a; b) \end{array}$$

✓ Propiedades

1. $G(q) = G(D) \sim G(d)$
2. $Tl(D) \approx Tl(d)Tl(q) + Tl(r)$
3. El cociente de dos polinomios homogéneos dará como resultado otro polinomio homogéneo.
4. Solo en una división exacta tanto el dividendo como el divisor pueden efectuarse, ambos completos y ordenados en forma descendente o ascendente con respecto a una variable, y el cociente no se altera (sigue siendo exacta).

Método de Horner

Se emplea para dividir por lo general polinomios entre divisores que sean de grado dos o más.

Reglas o pasos a seguir:

- Se completan y ordenan los polinomios. En caso falte un término este se completará con cero.
- En caso existan dos o más variables se asumen a una de ellas como tal y las demás harán el papel de números o constantes.
- Se distribuyen en forma horizontal los coeficientes del dividendo, y en forma vertical los coeficientes de divisor, todos cambiados de signo a excepción del primero.
- Se divide el primer coeficiente del dividendo por el primero del divisor, obteniendo el primero del cociente. Luego este se multiplica por cada uno de los coeficientes del divisor que han cambiado de signo, y los resultados se colocan dejando una columna de lado.
- Se reduce la siguiente columna y se repite el paso anterior, tantas veces hasta que la última operación efectuada caiga debajo del último coeficiente del dividendo. Llegado este momento se reduce las columnas que faltan; separando los coeficientes del cociente y el resto respectivamente.

Esquema gráfico:

	d	DIVIDENDO	DO
	i		
	v		
	i		
	s		
	o		
	r		
Cambian de signo			
		COCIENTE	RESTO

Reemplazando en la expresión pedida:

$$E = \frac{3a^2 + 9a^2}{a^2} = \frac{12a^2}{a^2} \therefore E = 12$$

7. Sabiendo que la división:

$$\frac{Ax^5 + 55x^4 + Bx^3 - 3x + 15}{5x^3 + 5x^2 - 2x - 2}$$

deja como residuo: $37x^2 - x + 9$. Hallar: $A + B$.

Resolución:

Como las incógnitas se presentan en los primeros términos del dividendo convendría que estas estén al final; para eso se requiere que la división sea exacta, entonces recurrimos a lo siguiente.

Observación

Cuando en una división al dividendo se le resta el residuo esta se convierte en exacta; lo que implica que el residuo es un polinomio idénticamente nulo.

Luego: $D(x) - r(x) = Ax^5 + 55x^4 + Bx^3 - 37x^2 - 2x + 6$

Entonces:

$$\frac{Ax^5 + 55x^4 + Bx^3 - 37x^2 - 2x + 6}{5x^3 + 5x^2 - 2x - 2} \text{ será exacta:}$$

Aplicamos Horner, pero el polinomio lo ordenamos en forma ascendente:

-2	6	-2	-37	B	55	A
2		-6	15	15		
-5			8	-20	-20	
-5				14	-35	-35
	-3	4	7	$(B+9)x^2 + 0x + (A-35)$		
				$r(x)$		

Teniendo en cuenta que: $r(x) \equiv 0$

$$\bullet B + 9 = 0 \Rightarrow B = -9$$

$$\bullet A - 35 = 0 \Rightarrow A = 35$$

$$\therefore A + B = 26$$

◀ REGLA DE RUFFINI

Se emplea para dividir polinomios por divisores de la forma: $ax \pm b$, o cualquier otra expresión transformable a esta.

Reglas o pasos a seguir:

- Se completan y ordenan los polinomios con respecto a una sola letra o variable. En caso falte un término este se completa con cero.
- En caso hubiesen dos o más variables se considera solo a una de ellas como tal y las demás harán el papel de números o constantes. Se distribuyen en forma horizontal los coeficientes del dividendo; en forma paralela a este paso se iguala el divisor a (0), se despeja la variable y ésta se coloca en el ángulo inferior izquierdo del gráfico.
- Se baja el primer coeficiente del D siendo este el primero del q. Luego se multiplica por el valor des-

pejado de la variable y el resultado se coloca debajo de la siguiente columna.

- Se reduce la columna siguiente y se repite el paso anterior tantas veces hasta que la última operación efectuada caiga debajo del último coeficiente del D. Llegado este momento, se reduce la columna que falta, y siempre se cumplirá que la última columna le va a pertenecer al resto, y este siempre será un valor numérico.

Esquema gráfico:

	DIVIDENDO	0
$x = N$	COCIENTE	resto

1.º caso: cuando el primer coeficiente del divisor es la unidad ($x \pm b$)

Ejemplos:

1. Dividir: $\frac{2x^3 - 7x + 3x^4 - 5x^3 + 11}{x + 2}$

Resolución:

Ordenando al dividendo: $3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 11$

Aplicando el método de Ruffini:

$x + 2 = 0$	3	-5	2	-7	11
$x = -2$					
	-2		-6	22	-48
			3x ³ - 11x ² + 24x - 55		121
			q(x)		r(x)

$$\therefore q(x) = 3x^3 - 11x^2 + 24x - 55$$

$$r(x) = 121$$

2. Dividir: $\frac{2x^4 + 3\sqrt{2}x^3 - 12x^2 + 3\sqrt{2}x - 2}{x - \sqrt{2}}$

Resolución:

Utilizando el criterio de Ruffini:

	2	3√2	-12	3√2	-2
$x = \sqrt{2}$					
	√2		2√2	10	-2√2
			2	5√2	-2
			q(x)		r(x)

$$\therefore q(x) = 2x^3 + 5\sqrt{2}x^2 - 2x + \sqrt{2}$$

$$r(x) = 0$$

2.º caso: cuando el primer coeficiente del divisor es diferente de la unidad ($ax \pm b$, $a \neq 1$)

- En este caso se procede en forma similar a la anterior pero se debe tener presente que para obtener el cociente verdadero se divide cada uno de los coeficientes del aparente cociente por el primer coeficiente del divisor.

Ejemplos:

1. Dividir:
- $(6x^3 - 19x^2 + 19x - 16) \div (3x - 2)$

Resolución:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3x - 2 = 0 & 6 & -19 & 19 & -16 \\
 x = \frac{2}{3} & & & & \\
 \downarrow & & & & \\
 \frac{2}{3} & & & & \\
 \hline
 : 3 & 6 & -19 & 19 & -16 \\
 & 6 & -15 & 9 & -10 \\
 \hline
 & & -4 & -10 & 6 \\
 & & & & \text{r(x)} \\
 & & & & \text{q(x)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore q(x) &= 2x^2 - 5x + 3 \\
 r(x) &= -10
 \end{aligned}$$

2. Dividir:
- $\frac{(10x^4 + 39x^3 + 29x^2 + 51x + 28)}{5x + 2}$

Resolución:

Utilizando el criterio de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 5x + 2 = 0 & 10 & 39 & 29 & 51 & 28 \\
 x = -\frac{2}{5} & & & & & \\
 \downarrow & & & & & \\
 -\frac{2}{5} & & & & & \\
 \hline
 : 5 & 10 & 39 & 29 & 51 & 28 \\
 & 10 & 35 & 15 & 45 & 10 \\
 \hline
 & & 4 & -14 & -6 & -18 \\
 & & & & & \text{r(x)} \\
 & & & & & \text{q(x)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore q(x) &= 2x^3 + 7x^2 + 3x + 9 \\
 r(x) &= 10
 \end{aligned}$$

3. Dividir:
- $(3x^4 + 2\sqrt{2}x^3 + 4x^2 + \sqrt{2}x + 6) \div (3x - \sqrt{2})$

Resolución:

Usando el método de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 3x - \sqrt{2} = 0 & 3 & 2\sqrt{2} & 4 & \sqrt{2} & 6 \\
 x = \frac{\sqrt{2}}{3} & & & & & \\
 \downarrow & & & & & \\
 \frac{\sqrt{2}}{3} & & & & & \\
 \hline
 : 3 & 3 & 2\sqrt{2} & 4 & \sqrt{2} & 6 \\
 & 3 & 3\sqrt{2} & 6 & 3\sqrt{2} & 8 \\
 \hline
 & & \sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{2} & 2 \\
 & & & & & \text{r(x)} \\
 & & & & & \text{q(x)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore q(x) &= x^3 + \sqrt{2}x^2 + 2x + \sqrt{2} \\
 r(x) &= 8
 \end{aligned}$$

4. Para la división:
-
- $$\frac{4x^6 + 2x^5 + (1 + \sqrt{3})x^4 - 2\sqrt{3}x^3 + (1 + 3\sqrt{3})x^2 + 1 - 3\sqrt{3}}{2x - \sqrt{3} + 1}$$

Suponga que R es el residuo de la división y S es la suma de coeficientes del cociente. Calcular: R + S

Resolución:

Por el método de Ruffini, se tendrá:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 x = \frac{\sqrt{3}-1}{2} & 4 & 2 & (1+\sqrt{3}) & -2\sqrt{3} & (1+3\sqrt{3}) & 0 & -3\sqrt{3} \\
 \frac{\sqrt{3}-1}{2} & & & & & & & \\
 \hline
 : 2 & 4 & 2\sqrt{3} & 4 & -2 & 2+2\sqrt{3} & 2 & -2\sqrt{3}-1 \\
 & & & & & & & \text{r(x)} \\
 & & & & & & & \text{q(x)}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Por condición: } R &= -2\sqrt{3} - 1 \quad y \quad S = 2\sqrt{3} + 5 \\
 \therefore R + S &= 4
 \end{aligned}$$

◀ TEOREMA DEL RESIDUO

 Se emplea para calcular el resto en forma directa sin necesidad de efectuar la operación de la división. Por lo general se emplea para divisores de la forma: $ax \pm b$, o cualquier otra expresión transformable a esta.

Lema o enunciado de descartes

 Dado un $P(x)$ como D y un divisor de la forma $ax \pm b$, para calcular el resto en forma directa se iguala el divisor a cero; se despeja la variable y esta se reemplaza en el dividendo.

Demostración:

$$\begin{aligned}
 \text{Datos } \begin{cases} D = P(x) \\ d = ax - b \\ q = Q(x) \\ r = R \end{cases} &\Rightarrow D \equiv dq + r
 \end{aligned}$$

 Sabemos: $P(x) \equiv (ax - b)Q(x) + R \dots (I)$

 Según Descartes: $ax - b = 0 \Rightarrow x = \frac{b}{a}$

 Reemplazando en (I): $P\left(\frac{b}{a}\right) = \left[a\left(\frac{b}{a}\right) - b\right]Q\left(\frac{b}{a}\right) + R$

$$\therefore P\left(\frac{b}{a}\right) = R$$

Casos que se presentan:

D	d	r
P(x)	$ax - b$	$P(b/a)$
P(x)	$ax + b$	$P\left(-\frac{b}{a}\right)$
P(x)	$x - b$	$P(b)$
P(x)	$x + b$	$P(-b)$

Ejemplos:

1. Hallar el residuo en
- $(2x^5 + 9x^4 + 3x - 4) \div (2x - 1)$

Resolución:

Por el teorema del residuo:

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Reemplazando en el dividendo:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 9\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3\left(\frac{1}{2}\right) - 4 = \frac{1}{16} - \frac{9}{16} + \frac{3}{2} - 4 = -3$$

2. Hallar el residuo en $(3x^{22} - 5x^{17} + 3x - 5) \div (x^3 + 1)$

Resolución:

Ei dividiendo se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{3(x^3)^{24} - 5(x^3)^5 x^2 + 3x - 5}{x^3 + 1}$$

Por el teorema del resto: $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

Reemplazando se tendrá:

$$r(x) = 3(-1)^{24} - 5(-1)^5 x^2 + 3x - 5$$

$$\therefore r(x) = 5x^2 + 3x - 2$$

3. Hallar el residuo de:

$$(x-1)^7 + 2(x-1)^4 + 5x - 7 \div x(x-2)$$

Resolución:

La expresión se puede escribir:

$$\frac{[(x-1)^2]^3(x-1) + 2[(x-1)^2]^2 + 5x - 7}{x^2 - 2}$$

Efectuando los paréntesis:

$$\frac{[x^2 - 2x + 1]^3(x-1) + 2[x^2 - 2x + 1]^2 + 5x - 7}{x^2 - 2x}$$

Por el teorema del resto: $x^2 - 2x = 0$

Reemplazando:

$$r(x) = (0 + 1)^3(x-1) + 2(0 + 1)^2 + 5x - 7$$

$$\Rightarrow r(x) = (x-1) + 2 + 5x - 7 \therefore r(x) = 6(x-1)$$

4. Calcular el residuo en la división:

$$[(x+2)^7 + 3(x+2)^5 + x + 1] \div (x+1)(x+3)$$

Resolución:

$$\text{Sea: } d(x) = x^2 + 4x + 3 + 1 - 1 = (x+2)^2 - 1$$

$$D(x) = [(x+2)^2]^3(x+2) + 3[(x+2)^2]^2(x+2) + x + 1$$

Por el teorema del resto:

$$(x+2)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 1$$

Luego, hallando $r(x)$:

$$r(x) = (1)(x+2) + 3(1)(x+2) + x + 1$$

$$\Rightarrow r(x) = x + 2 + 3x + 6 + x + 1 \therefore r(x) = 5x + 9$$

◀ DIVISIBILIDAD POLINÓMICA

Se dice que un polinomio $P(x)$ es divisible por el polinomio $d(x)$ si y solo si la división $\frac{P(x)}{d(x)}$ es exacta; además se dice que $d(x)$ es un factor del polinomio $P(x)$.

$$P(x) \text{ es divisible por } d(x) \Leftrightarrow p(x) \equiv d(x)q(x)$$

✓ Propiedades

1. Si un polinomio es divisible por separado entre varias expresiones, será divisible por el producto de ellas.

$$\text{Sea } P(x) \equiv (x-a)q_1(x) \Rightarrow r \equiv 0$$

$$P(x) \equiv (x-b)q_2(x) \Rightarrow r \equiv 0$$

$$P(x) \equiv (x-c)q_3(x) \Rightarrow r \equiv 0$$

$$\therefore P(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)q(x) \Rightarrow r \equiv 0$$

Lo contrario también se cumple, es decir si un polinomio es divisible por un producto de varias expresiones, será divisible por cada una de ellas separadamente.

$$\text{Si: } P(x) \equiv (x-a)(x-b)(x-c)q(x) \Rightarrow r \equiv 0$$

$$P(x) \equiv (x-a)q_1(x) \Rightarrow r \equiv 0$$

$$P(x) \equiv (x-b)q_2(x) \Rightarrow r \equiv 0$$

$$P(x) \equiv (x-c)q_3(x) \Rightarrow r \equiv 0$$

2. Si al dividir un polinomio por varias expresiones da un mismo resto, entonces al dividir dicho polinomio por el producto de ellas, también nos dará el mismo resto común.

$$\text{Si: } P(x) \equiv d_1(x)q_1(x) + r(x)$$

$$P(x) \equiv d_2(x)q_2(x) + r(x)$$

$$\therefore P(x) \equiv d_1(x)d_2(x)q(x) + r(x)$$

3. Sea: $P(x)$

$$\text{Si para: } x = a; P(a) = 0$$

$$\therefore P(x) \equiv (x-a)q(x)$$

Además $x = a$, es un cero o raíz de $P(x)$.

Ejemplos:

1. Al dividir $P(x)$ por $(x-1)(x-2)$ se halla por resto $2x+1$. ¿Qué resto se encontrará si se divide $P(x)$ por $x-2$?

Resolución:

$$\text{Por dato: } P(x) = (x-1)(x-2)q_1(x) + (2x+1) \dots (I)$$

Además se sabe que:

$$P(x) = (x-2)q_2(x) + R \dots (II)$$

$$\text{En (II): para } x = 2 \Rightarrow P(2) = R \dots (III)$$

$$\text{En (I): para } x = 2 \Rightarrow P(2) = 5$$

$$\text{En (III): resto } = R = 5$$

2. Los restos de las divisiones de $P(x)$ por los binomios $(x-1)$ y $(x+2)$ son, respectivamente, 8 y -7. Hallar el resto al dividir $P(x)$ por $x^2 + x - 2$.

Resolución:

$$\text{Por datos: } P(x) = (x-1)q_1(x) + 8 \Rightarrow P(1) = 8$$

$$P(x) = (x+2)q_2(x) - 7 \Rightarrow P(-2) = -7$$

Además:

$$P(x) = (x^2 + x - 2)q_3(x) + \overset{\text{resto}}{mx + n} \begin{cases} \rightarrow P(1) = m + n \\ \rightarrow P(-2) = -2m + n \end{cases}$$

$$\text{Luego: } m + n = 8 \dots (I)$$

$$-2m + n = -7 \dots (II)$$

$$\text{Restando (I) y (II): } 3m = 15 \Rightarrow m = 5$$

$$5 + n = 8 \Rightarrow n = 3$$

$$\therefore R(x) = 5x + 3$$

3. Calcular "m" para que el polinomio:
 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 + m(x^4 + y^4 + z^4)$
 sea divisible por $x + y + z$.

Resolución:

Sabemos que:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 + m(x^4 + y^4 + z^4) \equiv (x + y + z)q(x, y, z)$$

Por el teorema del resto: $x + y + z = 0$

En consecuencia pueden darse valores adecuados a (x, y, z) de modo tal que su suma dé cero:

Así, para $x = 0; y = 1 \wedge z = -1$; se tiene:

$$(0 + 1 + 1)^2 + m(0 + 1 + 1) = (0 + 1 - 1)q$$

$$\Rightarrow 4 + 2m = 0 \quad \therefore m = -2$$

4. Hallar el resto al efectuar:

$$(x - 1)^{10}(x + 2) : (x - 1)(x - 2)$$

Resolución:

Sabemos que:

$$(x - 1)^{10}(x + 2) = (x - 1)(x - 2)q(x) + R(x)$$

Dividiendo por $(x - 1)$:

$$(x - 1)^9(x + 2) = (x - 2)q(x) + \frac{R(x)}{x - 1}$$

$$(x - 1)^9(x + 2) = (x - 2)q(x) + R'$$

$$\text{Para } x = 2: (1)^9(4) = R' \Rightarrow R' = 4$$

$$\text{Pero: } R' = \frac{R(x)}{x - 1} \Rightarrow R(x) = R'(x - 1)$$

$$\therefore R(x) = 4(x - 1) = 4x - 4$$

5. Hallar el resto al efectuar:

$$(x + 2)^{62} - 4(x + 2)^{63} + 5(x + 2)^{24} + 3(x + 2)^3 - 7 + x^2 + 4x + 5$$

Resolución:

$$\text{Como: } d(x) = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1$$

$$\text{Haciendo: } (x + 2)^2 = y$$

$$\text{Luego: } D(y) = y^{41} - 4y^{31}(x + 2) + 5y^{12} + 3y(x + 2) - 7$$

$$d(y) = y + 1$$

$$R(x) = D(-1) = (-1)^{41} - 4(-1)^{31}(x + 2) + 5(-1)^{12} + 3(-1)(x + 2) - 7$$

$$R(x) = -1 + 4x + 8 + 5 - 3x - 6 - 7$$

$$R(x) = x - 1$$

◀ RESIDUOS ESPECIALES

Son residuos que requieren de ciertas transformaciones y o adecuaciones de modo tal que se pueda emplear el teorema del resto en forma coherente.

Sea: $D(x) \equiv d(x)q(x) + r(x)$ y $M(x) \neq 0$

$$1. \quad D(x)M(x) = [d(x)M(x)]q(x) + \frac{r(x)M(x)}{r_{\text{falso}}(x)}$$

$$r(x) < \frac{r_{\text{falso}}(x)}{M(x)}$$

$$2. \quad \frac{D(x)}{M(x)} < \frac{d(x)}{M(x)}q(x) + \frac{r(x)}{r_{\text{falso}}(x)}$$

$$r(x) < r_{\text{falso}}(x)M(x)$$

Ejemplo:

$$\text{Hallar el residuo en: } \frac{2x^{31} - 5x^{16} + 4x - 1}{x^2 - x + 1}$$

Resolución:

Multiplicando y dividiendo convenientemente por $(x + 1)$:

$$\frac{(2x^{31} - 5x^{16} + 4x - 1)(x + 1)}{(x + 1)(x^2 - x + 1)} = \frac{(2x^{31} - 5x^{16} + 4x - 1)(x + 1)}{x^3 + 1}$$

Transformando el dividendo:

$$\frac{[2(x^3)^{10}x - 5(x^3)^5x + 4x - 1](x + 1)}{x^3 + 1}$$

Por el teorema del resto: $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

Luego se tendrá:

$$r_{\text{falso}}(x) = (2x + 5x + 4x - 1)(x + 1)$$

$$r_{\text{verdadero}}(x) = \frac{(11x - 1)(x + 1)}{(x + 1)} \quad (\text{resto verdadero})$$

$$r_{\text{verdadero}}(x) = 11x - 1$$

◀ COCIENTES NOTABLES

Son casos especiales de división exacta entre divisores binómicos de la forma:

$$\frac{x^n \pm a^n}{x \pm a} \quad \text{Donde: } x, a : \text{bases} \wedge n \in \mathbb{N}$$

Estudio del caso: $\frac{x^n - a^n}{x - a}$

Cálculo del resto

Por el teorema del resto: $x - a = 0 \Rightarrow x = a$

$R = a^n - a^n = 0 \quad \therefore$ Es un cociente notable (CN).

Cálculo del cociente

Por Ruffini:

$x - a = 0$	1	0	0	...	0	0	$-a^n$
$x = a$							
a		a	a^2	...	$a^{n-2}x$	a^{n-1}	a^n
	$1x^{n-1}$	ax^{n-2}	a^2x^{n-3}	...	$a^{n-2}x$	a^{n-1}	0

$$\text{Luego: } \frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^1a^{n-2} + a^{n-1}$$

Ejemplo:

$$\frac{x^5 - a^5}{x - a} = x^4 + x^3a + x^2a^2 + xa^3 + a^4$$

Cálculo del término general

Del cociente encontrado se observa:

$$t_1 = x^{n-1}a^0$$

$$t_2 = x^{n-2}a$$

$$t_3 = x^{n-3}a^2$$

$$t_4 = x^{n-4}a^3$$

$$\vdots$$

$$t_k = x^{n-k}a^{k-1} \quad \text{fórmula del término general}$$

Ejemplos:

1. Hallar el desarrollo en cada uno de los casos:

$$\bullet \quad \frac{x^7 - a^7}{x - a} = x^6 + x^5a + x^4a^2 + x^3a^3 + \dots + xa^5 + a^6$$

$$\bullet \quad \frac{32x^5 - a^5}{2x - a} = \frac{(2x)^5 - a^5}{2x - a} = (2x)^4 + (2x)^3a + \dots + a^4$$

- $\frac{x^{21} - a^{14}}{x^3 - a^2} = \frac{(x^3)^7 - (a^2)^7}{x^3 - a^2} = (x^3)^6 + (x^3)^5 a^2 + \dots + (a^2)^6$
- $\frac{x^{-8} - a^{-8}}{x - a} =$ No es cociente notable
- $\frac{x^{\frac{1}{7}} - a^{\frac{1}{7}}}{x - a} =$ No es cociente notable
- $\frac{x^5 - 1}{x - 1} = \frac{x^5 - 1^5}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
- $\frac{x^{15} - 1}{x^3 - 1} = \frac{(x^3)^5 - 1^5}{x^3 - 1} = (x^3)^4 + (x^3)^3 + (x^3)^2 + (x^3) + 1$
- $\frac{(x+a)^5 - a^5}{x} = \frac{(x+a)^5 - a^5}{(x+a) - a} = (x+a)^4 + (x+a)^3 a + \dots + a^4$
- $\frac{(x+a)^7 - (x-a)^7}{2a} = \frac{(x+a)^7 - (x-a)^7}{(x+a) - (x-a)} = (x+a)^6 + (x+a)^5(x-a) + \dots + (x-a)^6$

2. Dados los desarrollos, hallar el cociente al que pertenece:

- $x^3 + x^2 a + x a^2 + a^3 = \frac{x^4 - a^4}{x - a}$
- $x^5 + x^4 a + x^3 a^2 + x^2 a^3 + x a^4 + a^5 = \frac{x^6 - a^6}{x - a}$
- $x^9 + x^6 + x^3 + 1 = \frac{(x^3)^4 - (1)^4}{x^3 - 1} = \frac{x^{12} - 1}{x^3 - 1}$
- $x^6 + x^4 a^2 + x^2 a^4 + a^6 = \frac{x^8 - a^8}{x^2 - a^2}$
- $x^{10} + x^6 a^2 + x^6 a^4 + x^4 a^6 + x^2 a^8 + a^{10} = \frac{x^{12} - a^{12}}{x^2 - a^2}$

Estudio de los cuatro casos

Caso	Condición ($r=0$)	Cociente (n términos) Término general
1. $\frac{x^n - a^n}{x - a}$	es un CN	$++ \dots + \quad t_k = x^{n-k} a^{k-1}$
2. $\frac{x^n + a^n}{x - a}$	no es un CN	
3. $\frac{x^n + a^n}{x + a}$	es un CN (n es impar)	$+ - + - \dots + \quad t_k = x^{n-k} a^{k-1}$
4. $\frac{x^n - a^n}{x + a}$	es un CN (n par)	$+ - + - \dots - \quad \left. \begin{array}{l} (+) \text{ lugar impar} \\ (-) \text{ lugar par} \end{array} \right\} t_k = x^{n-k} a^{k-1}$

Leyes de un cociente notable

- El número de términos del desarrollo de un cociente estará expresado por el exponente común de las bases en el numerador.
- El polinomio desarrollado se caracteriza por ser completo y ordenado respecto a sus bases (en forma descendente respecto a la 1.^a) y ascendente respecto a la 2.^a además de ser homogéneo.
- Si el divisor es el binomio diferencia, los términos del cociente serán todos positivos, pero si es el bi-

nomio suma, los términos de cociente serán alternados (positivos los de lugar impar y negativos de lugar par).

- Solo si el número de términos es par, existirá un único término central cuyos exponentes de sus bases serán respectivamente iguales.
- Para calcular un término contado a partir del extremo final (o del lado derecho), basta con intercambiar simultáneamente las bases y aplicar la fórmula conocida del término general.

Ejemplo:

Si: $\frac{x^m - a^n}{x^p - a^q}$ es un cociente notable.

Demostrar que:

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{constante} = \text{número de términos}$$

Demostración:

Dándole la forma adecuada: $\frac{(x^p)^{\frac{m}{p}} - (a^q)^{\frac{n}{q}}}{x^p - a^q}$

Para que sea CN necesariamente los exponentes de las bases deben ser iguales, luego:

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{q} = \text{constante} = \text{número de términos}$$

Ejemplos:

- Calcular "m" para que la expresión: $\frac{x^{2m+3} - y^{3m-3}}{x^{2m+1} - y^{3m-5}}$

genere un cociente notable entero.

Resolución:

Por propiedad:

$$\frac{2m+3}{2m+1} = \frac{3m-3}{3m-5} \Rightarrow 6m^2 - m - 15 = 6m^2 - 3m - 3$$

$$\Rightarrow 2m = 12 \Rightarrow m = 6$$

$$\text{Reemplazando: } \frac{x^{15} - y^{15}}{x^{13} - y^{13}} = \frac{(x^{13})^{\frac{15}{13}} - (y^{13})^{\frac{15}{13}}}{x^{13} - y^{13}}$$

Obsérvese que 15/13 no es entero.

$\therefore$ Nunca genera un cociente notable exacto.

- Indicar el equivalente de: $\frac{a^5 - b^5}{a - b} + \frac{a^5 + b^5}{a + b}$

Resolución:

Efectuando la primera y segunda división:

$$a^4 + a^3 b + a^2 b^2 + ab^3 + b^4 + a^4 - a^3 b + a^2 b^2 - ab^3 + b^4$$

$$\Rightarrow 2(a^4 + a^2 b^2 + b^4) \Rightarrow 2(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

- Hallar el coeficiente de x^{24} en el cociente de: $(x^{45} - 243) : (x^3 - \sqrt[3]{3})$

Resolución:

Dándole una forma adecuada tenemos:

$$(x^3)^{15} - (\sqrt[3]{3})^{15} : (x^3 - \sqrt[3]{3})$$

Luego, por la fórmula del término general se tiene:

$$t_k = (x^3)^{15-k} (\sqrt[3]{3})^{k-1} \dots (l)$$

Si el exponente de x es 24: $3(15 - k) = 24$

$$\Rightarrow 15 - k = 8 \Rightarrow k = 7$$

En (I) el coeficiente será: $(\sqrt[3]{3})^{-1} = 9$

4. Determinar $(m + n)$, si el t_{17} del cociente notable:

$$\frac{x^m - y^n}{x^5 - y^7} \text{ es } x^{115} y^{112}$$

Resolución:

Dándole una forma adecuada: $\frac{(x^5)^{\frac{m}{5}} - (y^7)^{\frac{n}{7}}}{x^5 - y^7}$

Por propiedad: $\frac{m}{5} = \frac{n}{7} \dots (I)$

$$\Rightarrow t_{17} = (x^5)^{\frac{m}{5} - 17} (y^7)^{16} = x^{m-85} y^{112}$$

Por dato: $x^{m-85} y^{112} = x^{115} y^{112}$

$$\Rightarrow m - 85 = 115 \Rightarrow m = 200$$

En (I): $n = 280 \Rightarrow m + n = 200 + 280 = 480$

5. Si en el cociente notable: $\frac{x^{3n-3} - y^{3n-3}}{x^{2p^2-1} - y^{2p^2-1}}$
el segundo término es $x^{210} y^{15}$, calcular: $E = \sqrt{\frac{4p^2 n}{5}}$

Resolución:

Transformando el cociente se tendrá:

$$\frac{(x^{2p^2})^{\frac{3n-3}{2}} - (y^{2p^2})^{\frac{3n-3}{2}}}{x^{2p^2-1} - y^{2p^2-1}}$$

Por fórmula:

$$t_2 = (x^{2p^2})^{\frac{3n-3}{2} - 1} (y^{2p^2-1}) = x^{3n-3-2p^2+1} y^{2p^2-1}$$

Por dato: $(x^{3n-2p^2+1})(y^{2p^2-1}) = x^{210} y^{15}$

De donde: $2p^2 - 1 = 15 \Rightarrow p = 2$

También: $3^n - 2^5 - 1 = 210 \Rightarrow 3^n = 243 \Rightarrow n = 5$

$$\therefore E = \sqrt{\frac{4(2)^2(5)}{5}} = 4$$

6. Qué lugar ocupa en el desarrollo del cociente notable: $\frac{x^{40} - y^{20}}{x^2 - y}$ el término que tiene grado absoluto 34.

Resolución:

Cualquier término estará expresado por:

$$t_k = (x^2)^{20-k} y^{k-1} = x^{40-2k} y^{k-1}$$

Por dato: $40 - 2k + k - 1 = 34 \Rightarrow k = 5$

7. Calcular el t_{21} en el cociente notable: $\frac{2a - a^2}{1 - \sqrt[20]{a-1}}$

Resolución:

Dándole la forma adecuada:

$$\frac{1-1+2a-a^2}{1-\sqrt[20]{a-1}} = \frac{1-(1-2a+a^2)}{1-\sqrt[20]{a-1}} = \frac{1-(a-1)^2}{1-(a-1)^{1/20}}$$

$$= \frac{1^{40} - [(a-1)^{1/20}]^{40}}{1 - (a-1)^{1/20}} \Rightarrow t_{21} = (1)^{40-21} [(a-1)^{1/20}]^{20}$$

$$\therefore t_{21} = a - 1$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Si al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x^3 + 1)$, el resto resultante es $(x^2 + x - 1)$. Hallar el resto de dividir $P(x)$ entre $(x^2 - x + 1)$.

Resolución:

$$P(x) = (x^3 + 1)q(x) + x^2 + x - 1$$

$$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 1)q(x) + x^2 + x - 1$$

Se pide el resto de: $\frac{P(x)}{x^2 - x + 1}$

Por el teorema del resto:

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x - 1$$

$$\therefore R(x) = 0 + (x-1) + x - 1 = 2x - 2$$

2. Determinar $a + b$, si el polinomio:

$$ax^5 + bx^4 - 26x^3 + 30x^2 - 13x + 2$$

es divisible por: $2x^2 - 3x + 1$

Resolución:

Como es divisible, la división es exacta.

Por Horner:

1	2	-13	30	-26	b	a
3	↓	6	-4			
-2		↓	-21	14		
			↓	15	-10	
				↓	9	-6
	2	-7	5	3	0	0

Se habrá dado cuenta que la división se ha efectuado con los polinomios ordenados en forma creciente. Luego: $a = 6 \wedge b = 1$

$$\therefore a + b = 7$$

3. Determinar el polinomio $P(x)$ de 4.º grado, tal que sea divisible entre $(3x^3 - 2)$ y que al dividirlo separadamente entre $(x - 1)$ y $(x + 3)$, los restos obtenidos sean, respectivamente: -5 y -249

Resolución:

$P(x)$ de 4.º grado y divisible entre $(3x^3 - 2)$.

$$\Rightarrow P(x) \equiv (3x^3 - 2)(ax + b)$$

$$\bullet P(x) \equiv (x - 1)q_1(x) - 5 \Rightarrow P(1) = -5$$

$$\bullet P(x) \equiv (x + 3)q_2(x) - 249 \Rightarrow P(-3) = -249$$

$$P(1) = (1)(a + b) = -5 \Rightarrow a + b = -5$$

$$P(-3) = (-81 - 2)(-3a + b) = -249 \Rightarrow -3a + b = 3$$

$$\text{Resolviendo: } a = -2 \wedge b = -3$$

$$\Rightarrow P(x) = (3x^3 - 2)(-2x - 3)$$

$$\therefore P(x) = 6x^4 - 9x^3 + 4x + 6$$

4. Si $P(x)$ es un polinomio de quinto grado divisible entre $(2x^4 - 3)$, al dividir $P(x)$ separadamente entre $(x + 1)$ y $(x - 2)$, los restos obtenidos son, respectivamente, 7 y 232. Determinar la suma de los coeficientes del polinomio $P(x)$.

Resolución:

$P(x)$ es de 5.º grado y divisible entre $(2x^4 - 3)$.

$$\Rightarrow P(x) = (2x^4 - 3)(ax + b)$$

$$\bullet P(x) = (x + 1)q_1(x) + 7 \Rightarrow P(-1) = 7$$

$$\bullet P(x) = (x - 2)q_2(x) + 232 \Rightarrow P(2) = 232$$

$$P(-1) = (2 - 3)(-a + b) = 7 \Rightarrow a - b = 7$$

$$P(2) = (32 - 3)(2a + b) = 232 \Rightarrow 2a + b = 8$$

$$\text{Resolviendo: } a = 5 \wedge b = -2$$

$$\Rightarrow P(x) = (2x^4 - 3)(5x - 2)$$

$$\therefore \sum \text{coef}(P) = P(1) = (-1)(3) = -3$$

5. Determinar el conjunto:

$$R = \left\{ n \in \mathbb{N} / \frac{x^{2n-4} - y^{n-1}}{x^{n-2} - y^{n-3}} \text{ es un cociente notable} \right\}$$

Resolución:

$$\frac{x^{2n-4} - y^{n-1}}{x^{n-2} - y^{n-3}} \Rightarrow \frac{2n-4}{n-2} = \frac{n-1}{n-3} = p, p \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 2(n-3) = n-1 \wedge n \neq 2; 3 \Rightarrow n = 5$$

$$\text{Reemplazando: } p = \frac{4}{2} = 2 \in \mathbb{N} \therefore R = \{5\}$$

6. Si la siguiente división:

$$(3mx^5 + 3nx^4 + (5m^2 + 3p)x^3 + 9mnx^2 + mnp x + n^2) \div (mx^2 + nx + p)$$

es exacta, hallar el valor de: $T = \frac{p}{m}(m - 16)$

Resolución:

Dividimos por Horner:

m	3m	3n	(5m ² + 3p)	9mn	mnp	n ²
-n	↙	-3n	-3p			
-p		↙	0	0		
			↙	-5mn	-5mp	
				↙	-4n ²	-4pn
	3	0	5m	4n	0	0

DN. exac.

Observamos que:

- $n^2 = 4np = 0 \Rightarrow n^2 = 4np \Rightarrow n = 4p$
- $mnp - 5mp - 4n^2 = 0$

Reemplazamos "n" por 4p:

$$m(4p)p - 5mp - 4(16p^2) = 0$$

$$4mp - 64p = 5m$$

$$\Rightarrow 4p(m - 16) = 5m$$

$$\text{De aquí: } \frac{p}{m}(m - 16) = \frac{5}{4}$$

7. Si la siguiente división: $\frac{3x^5 + mx^3 + nx^2 - x + 2}{x^2 + 3}$

da como residuo $5x - 10$, hallar el valor de:

$$T = m + n$$

Resolución:

$$\frac{3x^5 + mx^3 + nx^2 - x + 2}{x^2 + 3}; R(x) = 5x - 10$$

Dividimos por Horner:

1	3	0	m	n	-1	2
0		0	-9			
-3			0	0		
				0	(27 - 3m)	
					0	-3n
	3	0	(m - 9)	n	(26 - 3m)	(2 - 3n)

R(x)

$$R(x) = (26 - 3m)x + (2 - 3n) \equiv 5x - 10$$

Observamos que:

$$\bullet 26 - 3m = 5 \Rightarrow m = 7$$

$$\bullet 2 - 3n = -10 \Rightarrow n = 4$$

$$\therefore T = m + n = 11$$

8. Si la división: $\frac{Ax^4 + Dx^3 + Cx + D}{Dx^3 + E}$ es exacta, hallar una relación entre los coeficientes de la división.

Resolución:

Por Horner (completar el dividendo)

D	A	D	0	C	D
0	↙	0	0	$\frac{AE}{D}$	
0		↙	0	0	-E
-E					
	$\frac{A}{D}$	1	0	0	0

División exacta

Observamos que:

$$\left. \begin{aligned} \bullet D - E = 0 &\Rightarrow D = E \\ \bullet C - \frac{AE}{D} = 0 &\Rightarrow A = C \end{aligned} \right\} \textcircled{x}$$

$$\therefore AD = EC$$

9. Si la siguiente división:

$$(x^5 + x^3 + ax^2 + b) \div (x^3 + x^2 + cx + 1) \text{ es exacta, hallar el valor de: } T = abc$$

Resolución:

Dividimos por Homer (completar el dividendo):

1	1	0	1	a	0	b
-1		-1	-c	-1		
-c			1	c	1	
-1				c-2	(c ² -2c)	c-2
	1	-1	(2-c)	0	0	0

División exacta

- $a - 2c - 3 = 0 \Rightarrow \dots (I)$
- $c^2 - 2c + 1 = 0 \Rightarrow (c - 1)^2 = 0 \Rightarrow c = 1$

 En (I): $a + 2 - 3 = 0 \Rightarrow a = 1$

- $b + c - 2 = 0 \Rightarrow b = 1$

$$\therefore T = (1)(1)(1) = 1$$

10. Calcular el residuo de: $\frac{(x-5)^{10} + (x-6)^7 + 6}{(x-5)(x-6)}$

Resolución:

 Sea $R(x) = ax + b$ el residuo (de 1.º grado, pues el divisor es de 2.º grado). Por el algoritmo de la división:

$$(x-5)^{10} + (x-6)^7 + 6 \equiv (x-5)(x-6)q(x) + ax + b$$

$$\text{Si } x = 5: -1 + 6 = 0 + 5a + b \Rightarrow 5a + b = 5$$

$$\text{Si } x = 6: 1 + 6 = 0 + 6a + b \Rightarrow 6a + b = 7$$

$$\text{Resolviendo: } a = 2 \wedge b = -5 \quad \therefore R(x) = 2x - 5$$

11. Si "n" es un número natural impar y múltiplo de 3, determinar el resto en la siguiente división:
 $(x^{2n} + x^n + 2) \div (x^2 - x + 1)$

Resolución:

 Multiplicando por $(x+1)$ al dividendo y al divisor (tenga en cuenta que el resto también queda multiplicado por $x+1$), se tiene:

$$\frac{(x^{2n} + x^n + 2)(x+1)}{(x^2 - x + 1)(x+1)} = \frac{x^{2n+1} + x^{2n} + x^{n+1} + x^n + 2x + 2}{x^3 + 1}$$

$$\text{Por el teorema del resto: } x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

 Acomodando el dividendo ($n = 3$):

$$P(x) = (x^3)^{\frac{2n}{3}}x + (x^3)^{\frac{2n}{3}} + (x^3)^{\frac{n}{3}}x + (x^3)^{\frac{n}{3}} + 2x + 2$$

$$\text{Reemplazando: } \left(\frac{2n}{3} \text{ es par} \wedge \frac{n}{3} \text{ impar}\right)$$

$$R_F(x) = (-1)^{\frac{2n}{3}}x + (-1)^{\frac{2n}{3}} + (-1)^{\frac{n}{3}}x + (-1)^{\frac{n}{3}} + 2x + 2$$

$$\Rightarrow R_F(x) = x + 1 - x - 1 + 2x + 2$$

$$\Rightarrow R_F(x) = 2(x + 1)$$

$$\text{Luego: } R_F(x) = \frac{R_F(x)}{x+1} = 2$$

12. Hallar el resto de la siguiente división:

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)}{x^2 - 7x + 11}$$

Resolución:

Ordenamos el dividendo:

$$\frac{(x-1)(x-6)(x-3)(x-4)(x-5)(x-2)}{x^2 - 7x + 11}$$

$$\Rightarrow \frac{(x^2 - 7x + 6)(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12)}{x^2 - 7x + 11}$$

Por el teorema del resto:

$$x^2 - 7x + 11 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x = -11$$

$$\Rightarrow R(x) = (-11 + 6)(-11 + 10)(-11 + 12)$$

$$\therefore R(x) = (-5)(-1)(1) = 5$$

13. Determinar el residuo de dividir:

$$(x^{320} + x^5 - 2) \text{ entre } (x^4 - x^2 + 1)$$

Resolución:

$$\frac{(x^{320} + x^5 - 2)(x^2 + 1)}{(x^4 - x^2 + 1)(x^2 + 1)} \Rightarrow \frac{(x^{320} + x^5 - 2)(x^2 + 1)}{x^6 + 1}$$

Por el teorema del resto:

$$x^6 + 1 = 0 \Rightarrow x^6 = -1$$

$$\bullet P(x) = [(x^6)^{53}x^2 + x^5 - 2](x^2 + 1)$$

$$\bullet R_F(x) = [(-1)^{53}x^2 + x^5 - 2](x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow R_F(x) = (x^5 - x^2 - 2)(x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow R(x) = \frac{R_F(x)}{x^2 + 1} = x^5 - x^2 - 2$$

 Como este no tiene grado menor que el divisor, entonces: $x^4 - x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^4 = x^2 - 1$

$$R(x) = (x^4)x - x^2 - 2 = (x^2 - 1)x - x^2 - 2$$

$$\therefore R(x) = x^3 - x^2 - x - 2$$

14. Un polinomio $P(x)$ de sexto grado al ser dividido por $(x+1)^5$, arroja un cociente entero $g(x)$ y un residuo: $3x+2$. Si $g(x)$ tiene como coeficiente principal al número 7, y la suma de los coeficientes de $P(x)$ es 325. Determinar el término independiente de $g(x)$.

Resolución:

$$\frac{P(x)}{6} \equiv (x+1)^5 \frac{g(x)}{1} + 3x + 2$$

$$\Rightarrow P(x) \equiv (x+1)^5(ax + b) + 3x + 2$$

 Coeficiente principal de $g(x) = 7 \Rightarrow a = 7$

$$P(1) = 325 = (2)^5(7+b) + 5 \Rightarrow b = 3 \quad \therefore Tl(g) = b = 3$$

15. Si P es un polinomio definido por:

 $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8$, tal que el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x+3)$ es 6. Hallar el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x-3)$.

Resolución:

$$P(x) = ax^5 + bx^3 + cx - 8 \quad \dots (I)$$

$$P(x) \div (x+3) \Rightarrow R = P(-3) = 6$$

$$\text{En (I): } R = P(-3) = -243a - 27b - 3c - 8 = 6$$

$$\Rightarrow 243a + 27b + 3c = -14 \quad \dots (II)$$

 Nos piden: $R = P(3)$

$$\text{En (I): } R = P(3) = 243a + 27b + 3c - 8$$

$$\text{Con (II): } R = -14 - 8 = -22$$

16. Si al dividir $P(x)$ por $x^4 - 1$ da como resto $R(x) = 2x^2 - 1$, hallar el resto de dividir $[P(x)]^2$ por $x^2 - 1$.

Resolución:

$$P(x) \div (x^4 - 1) \Rightarrow R(x) = 2x^2 - 1$$

$$\Rightarrow P(x) \equiv (x^4 - 1)q(x) + (2x^2 - 1)$$

Elevando al cuadrado:

$$[P(x)]^2 \equiv [(x^4 - 1)q(x) + (2x^2 - 1)]^2 \dots (I)$$

Nos piden el resto de $[P(x)]^2 \div (x^2 - 1)$

Por el teorema del resto:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\text{En (I): } R = [(1)^2 - 1]q(x) + [2(1) - 1]^2 \quad \therefore R = 1$$

17. Después de efectuar la siguiente división: $(6x^4 - 4x^3 + x^2 + 10x - 2) \div (3x + 1)$, indicar cual de los siguientes enunciados son correctos:

- I. El polinomio cociente es $6x^2 + 3x + 9$.
 II. El resto es -5 .
 III. El término independiente del cociente es 3.

Resolución:

Por el método de Ruffini:

$3x + 1 = 0$	6	-4	1	10	-2
$x = -\frac{1}{3}$	↓	-2	2	-1	-3
$\div 3$	6	-6	3	9	-5
	2	-2	1	3	

- I. El polinomio cociente es: $q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x + 3$ (F)
 II. El resto es: $R(x) = -5$ (V)
 III. El término independiente del cociente es $q(0) = 3$ (V)
 $\therefore$ Son correctos: II y III

18. El siguiente esquema representa una división por el método de Ruffini.

a	h	i	j	k	F	20
	12	N	L	e	-28	
	b	c	2	p	d	g

Determinar el valor: $ab + j + N + ad - g$ **Resolución:**

Del esquema:

$$ab = 12; j + N = 2; ad = -28 \wedge g = -8$$

$$\therefore ab + j + N + ad - g = 12 + 2 - 28 - (-8) = -6$$

19. Sea $Q(x)$ el cociente de efectuar la división: $(x^n + nx^{n-1} - n - 1) \div (x - 1)$, calcular $Q(1)$.

Resolución:

Por Ruffini:

$x - 1 = 0$	n coeficientes								
$x = 1$	1	n	0	0	0	...	0	0	-n-1
	↓	1	n+1	n+1	n+1	...	n+1	n+1	n+1
		1	n+1	n+1	n+1	...	n+1	n+1	0
	(n-1) coeficientes								

 $Q(1)$ es la suma de coeficientes del cociente $Q(x)$:

$$Q(1) = 1 + \frac{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}{(n-1) \text{ coeficientes}}$$

$$\therefore Q(1) = 1 + (n-1)(n+1) = n^2$$

20. Si $R(x) = Bx^2 + Cx$ es el resto de la división

$$\frac{Ax^5 + 3x^4 + Bx + 2}{3x^3 - x + 1}, \text{ determinar el valor de:}$$

$$T = A - 3B + C$$

Resolución:

Reconstruyendo la división por el método de Horner:

3	A	3	0	0	B	2
0	↙	0	6	-6		
1		3	0	1	-1	
-1	↙	6	6	0	2	-2
	↙					
		6	1	2	B	C
						0

$$\text{De donde: } \frac{A}{3} = 6 \Rightarrow A = 18$$

$$B = -5 \wedge (B + 1 = C \Rightarrow C = -4)$$

$$\text{Luego: } T = A - 3B + C = 18 - 3(-5) - 4$$

$$\therefore T = 29$$

21. Si el residuo de dividir: $(ax^3 + ax^2 - 4x + 2a)$ entre $(x^2 - bx + 2)$ es $2x$. Determinar la suma de coeficiente del cociente.

Resolución:

Usando el algoritmo de la división:

$$ax^3 + ax^2 - 4x + 2a \equiv (x^2 - bx + 2)q(x) + 2x$$

Donde $q(x)$ es de primer grado.

$$ax^3 + ax^2 - 4x + 2a \equiv (x^2 - bx + 2)(mx + n) + 2x$$

Notar que: $m = a \wedge n = a$

$$ax^3 + ax^2 - 4x + 2a \equiv (x^2 - bx + 2)(ax + a) + 2x$$

$$\equiv ax^3 + (a - ab)x^2 + (2a - ab + 2)x + 2a$$

$$\Rightarrow a = a - ab \wedge 2a - ab + 2 = -4$$

$$\Rightarrow ab = 0 \wedge 2a = -6 \Rightarrow b = 0 \wedge a = -3$$

$$\therefore q(1) = 2a = -6$$

22. Sea el polinomio definido por: $P(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$, tal que $P(x)$ es divisible separadamente entre $(x - a)$, $(x - b)$ y $(x - c)$, hallar el valor de $T = a + b + c$, con $b \neq 0$.

Resolución:

$$P(x) = x^3 - ax^2 + bx + c$$

Si $P(x)$ es divisible separadamente entre $(x - a)$, $(x - b)$ y $(x - c)$, entonces lo será por su producto.

$$\Rightarrow P(x) \equiv (x - a)(x - b)(x - c)Q(x)$$

Luego, efectuando:

$$x^3 - ax^2 + bx + c \equiv x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + bc + ac)x - abc$$

Identificando coeficientes:

$$\bullet -a = -(a + b + c) \Rightarrow b + c = 0 \dots (\alpha)$$

$$\bullet b = ab + bc + ac$$

$$b = a \frac{(b+c)}{0} + bc \Rightarrow b = bc \Rightarrow c = 1$$

En (α): $b = -1$

$$\bullet c = -abc \Rightarrow ab = -1 \Rightarrow a(-1) = -1 \Rightarrow a = 1$$

$$\therefore a + b + c = 1$$

23. Sea P un polinomio (definido en x), tal que $P(x)$ es divisible separadamente por $(x^2 + x - 6)$ y $(x^2 + x - 2)$. Hallar el resto que se obtiene de dividir $P(x) \div (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4)$

Resolución:

$P(x)$ es divisible por $(x^2 + x - 6)$

$P(x)$ es divisible por $(x^2 + x - 2)$

$\Rightarrow P(x)$ es divisible por el producto de:

$$(x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2)$$

Observamos que: $(x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2)$

$$\begin{array}{ccccc} x & & 3 & x & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & x & -2 & x & -1 \\ & \nearrow & & \nearrow & \\ & x & & x & 2 \end{array}$$

$$\equiv (x+3)(x-2)(x-1)(x+2)$$

$$\equiv (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4)$$

Como $P(x)$ es divisible por el producto de:

$$(x^2 + 2x - 3)(x^2 - 4)$$

$\therefore$ El residuo de dicha división es 0.

24. Si el desarrollo del siguiente cociente notable:

$$\frac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{x}$$
 tiene un término de la forma

$$a(x^2 - 1)^b, \text{ hallar el valor de: } T = a + b$$

Resolución:

Escribamos en la forma de cociente notable:

$$\frac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{x} = 2 \left[\frac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{2x} \right]$$

$$= 2 \left[\frac{(x+1)^{11} + (x-1)^{11}}{(x+1) + (x-1)} \right]$$

Ahora, supongamos que el término de la forma $a(x^2 - 1)^b$ ocupa lugar k .

$$\Rightarrow t_k = 2[(-1)^{k-1}(x+1)^{11-k}(x-1)^{k-1}] \equiv a(x^2 - 1)^b$$

Obsérvese que se debe cumplir:

$$11 - k = k - 1 \Rightarrow k = 6$$

$$\text{Reemplazando tenemos: } -2(x^2 - 1)^5 \equiv a(x^2 - 1)^b$$

$$\text{Comparando: } a = -2 \wedge b = 5 \quad \therefore T = 3$$

25. Si un polinomio $P(x)$ de cuarto grado, cuyo coeficiente del término de mayor grado es 3, es divisible por $(x^2 - 9)$ y por $(x - 1)$. Si al dividir $P(x)$ entre $(x - 2)$ se obtiene como residuo -50 , hallar el residuo que se obtiene de la división de $P(x)$ entre $(x + 1)$.

Resolución:

Datos:

$P(x)$ es de 4.º grado, donde el coeficiente principal vale 3.

$P(x)$ es divisible por $(x^2 - 9)$

$P(x)$ es divisible por $(x - 1)$

$$P(x) \div (x - 2) \Rightarrow R = P(2) = -50$$

$$P(x) \div (x + 1) \Rightarrow R = P(-1) = ?$$

$\Rightarrow P(x)$ será divisible por el producto de $(x^2 - 9)(x - 1)$.

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{4.^\circ G} = \frac{(x^2 - 9)(x - 1)}{3.^\circ G} \frac{Q(x)}{1.^\circ G}$$

De aquí: $Q(x) = ax + b$

Donde, además: $a = 3$

$$P(x) \equiv (x^2 - 9)(x - 1)(3x + b)$$

$$\bullet P(2) = (-5)(1)(6 + b) = -50 \Rightarrow b = 4$$

$$P(x) = (x^2 - 9)(x - 1)(3x + 4)$$

$$\bullet P(-1) = (-8)(-2)(1)$$

$$\therefore R = P(-1) = 16$$

26. Hallar el número de términos del cociente notable:

$$\frac{x^{17.5} - y^{8.75}}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{y}}$$

Resolución:

$$\text{De: } \frac{x^{17.5} - y^{8.75}}{x^{1/2} - y^{1/4}}$$

$$\therefore N.^\circ \text{ de términos del CN} = \frac{17.5}{1/2} = \frac{8.75}{1/4} = 35$$

27. El esquema siguiente muestra la división de dos polinomios según la regla del Horner.

a	e	-2b	d	c
b		bd	3d	
c			bf	cf
	d	f	e	c

$b = a + e$

$$\text{Hallar el valor de: } T = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2$$

Resolución:

a	e	-2b	d	c
b	↙	bd	3d	
c		↙	bf	cf
	d	f	e	c

Dato: $b = a + e$

Del esquema:

$$\bullet \frac{e}{a} = d \Rightarrow e = ad \quad \dots(I)$$

$$\bullet dc = 3d \Rightarrow c = 3$$

$$\bullet \frac{-2b + bd}{a} = f \quad \dots(II)$$

$$\bullet 4d + bf = e \quad \dots(III)$$

$$\bullet e + cf = e \Rightarrow f = 0$$

$$\text{En (II): } -2b + bd = 0 \Rightarrow bd = 2b \Rightarrow d = 2$$

$$\text{En (III): } 4d = e \Rightarrow e = 8$$

$$\text{En (I): } 8 = a(2) \Rightarrow a = 4$$

$$\text{En el dato: } b = 12$$

$$\therefore T = 16 + 144 + 9 + 4 + 64 + 0 = 237$$

28. Si P es un polinomio definido por $P(x) = ax^4 + bx^3 + c$, tal que si la diferencia de los restos de dividir, respectivamente, entre: $x^2 + 1$ y $x^3 + 1$ es $2(x + 2)$. Hallar el valor de: $T = ab$

Resolución:

$$\text{Dato: } P(x) = ax^4 + bx^3 + c$$

- Hallemos el resto de $P(x) \div (x^2 + 1)$

$$\text{Por TR: } x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$$

$$P(x) = a(x^2)^2 + b(x^2)x + c$$

$$\Rightarrow R_1(x) = a(-1)^2 + b(-1)x + c$$

$$R_1(x) = -bx + (a + c)$$

- Hallemos el resto de $P(x) \div (x^3 + 1)$

$$\text{Por TR: } x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

$$P(x) = a(x^3)x + b(x^3) + c$$

$$\Rightarrow R_2(x) = a(-1)x + b(-1) + c$$

$$R_2(x) = -ax + (c - b)$$

$$\text{Por dato: } R_1(x) - R_2(x) = 2(x + 2)$$

$$\Rightarrow (-b + a)x + (a + b) = 2x + 4$$

$$\text{Observamos que: } a - b = 2 \wedge a + b = 4$$

$$\Rightarrow a = 3; b = 1$$

$$\therefore T = (3)(1) = 3$$

29. Dada la siguiente división:

$$3 + (x - 3)^{3n+3} \div x^3 - 26 + 27x - 9x^2; n \in \mathbb{Z}^+$$

hallar el resto.

Resolución:

$$D(x) = 3 + (x - 3)^{3n+3}$$

$$d(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 26$$

$$\text{Por TR: } x^3 - 9x^2 + 27x - 26 = 0$$

$$x^3 - 9x^2 + 27x - 27 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x - 3)^3 = -1$$

$$\text{Del dividendo: } D = 3 + [(x - 3)^3]^{3n+2}$$

$$\Rightarrow R = 3 + (-1)^{3n+2} \rightarrow \text{N.º impar}$$

$$\therefore R = 3 + (-1) = 2$$

30. Sea $P(x)$ un polinomio que cumple:

$P(x) - P(x - 1) = 2x(2x - 1)$, hallar la diferencia de los residuos que se obtienen al dividir $P(x)$ entre $(x - 1)$ y $(x + 1)$, respectivamente.

Resolución:

$$P(x) - P(x - 1) = 2x(2x - 1) \quad \dots(I)$$

El resto de dividir $P(x) \div (x - 1)$ es: $R = P(1)$

El resto de dividir $P(x) \div (x + 1)$ es: $R = P(-1)$

Lo que nos piden es: $P(1) - P(-1)$

En (I):

$$x = 1 \Rightarrow P(1) - P(0) = 2 \quad \oplus$$

$$x = 0 \Rightarrow P(0) - P(-1) = 0 \quad \ominus$$

$$\therefore P(1) - P(-1) = 2$$

31. Calcular el residuo de la división siguiente:

$$\frac{(x - 1)^7 - (x - 2)^7 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

Resolución:

$$d(x) \equiv x^2 - 3x + 2 \equiv (x - 2)(x - 1)$$

El divisor es de segundo grado, luego el máximo grado del resto es 1, implica que el resto tomaría la forma: $R(x) = ax + b$

Sabemos que: $D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$

$$\Rightarrow (x - 1)^7 - (x - 2)^7 - 1 \equiv (x - 2)(x - 1)q(x) + (ax + b)$$

Por ser identidad, damos valores:

$$x = 2 \Rightarrow 0 = 0 + 2a + b \Rightarrow 2a + b = 0 \quad \dots(I)$$

$$x = 1 \Rightarrow 0 = 0 + a + b \Rightarrow a + b = 0 \quad \dots(II)$$

Resolviendo (I) y (II) se obtiene: $a = 0 \wedge b = 0$

$$\therefore R(x) \equiv 0x + 0 = 0$$

32. Hallar el resto en: $\frac{x + x^{199} + 1}{x^5 - 1}$

Resolución:

Multipliquemos dividendo y divisor por $(x - 1)$:

$$\frac{x + x^{199} + 1}{x^5 - 1} \cdot \frac{x - 1}{x - 1} = \frac{x^2 + x^{200} + x - x - x^{199} - 1}{x^5 - 1} =$$

$$= \frac{x^{200} - x^{199} + x^2 - 1}{x^5 - 1}$$

Por el teorema del resto: $d = x^5 - 1 = 0 \Rightarrow x^5 = 1$

$$\text{Del dividendo: } D = (x^5)^{40} - (x^5)^{39}x^4 + x^2 - 1$$

$$\text{Luego: } R' = (1)^{40} - (1)^{39}x^4 + x^2 - 1$$

$$R' = 1 - x^4 + x^2 - 1 \Rightarrow R' = -x^2(x^2 - 1)$$

$$\Rightarrow R' = -x^2(x + 1)(x - 1)$$

Para hallar el resto (R) debemos dividir $\frac{R'}{x - 1}$:

$$\therefore R = \frac{R'}{x - 1} = -x^2(x + 1)$$

33. Si al dividir $P(x) / ax^4 + bx^3 + cx^2 + 3x + 1$ entre $x^2 - x + 1$ se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 22 y un resto $R(x) = 10x - 1$, hallar $a + c$

Resolución:

1	a	b	c	3	1
+1	↙	a	-a		
-1		↙	(a + b)	(-a - b)	
			↙	(b + c)	(-b - c)
				10	-1
				q(x)	dato

$$\bullet \quad 3 - a + c = 10 \Rightarrow c - a = 7 \quad \dots(I)$$

$$\bullet \quad 1 - b - c = -1 \Rightarrow b + c = 2 \quad \dots(II)$$

Restando (II) menos (I): $a + b = -5$

$$\text{Por dato: } q(1) = a + \underbrace{(a + b)}_{-5} + \underbrace{(b + c)}_2 = 22$$

$$a - 3 = 22 \Rightarrow a = 25 \wedge c = 32$$

$$\therefore a + c = 57$$

34. Al dividir $F(x)$ entre $(4x^2 - 9)(x + 3)$ se obtuvo como residuo $2(x - 3)^2$. Hallar el residuo de dividir $F(x)$ entre $(2x^2 + 9x + 9)$.

Resolución:

$$4x^2 - 9 \equiv (2x + 3)(2x - 3)$$

Por identidad fundamental:

$$F(x) \equiv (2x + 3)(2x - 3)q(x) + 2(x - 3)^2$$

$$F(x) \equiv (2x - 3)(2x^2 + 9x + 9)q(x) + \underbrace{2x^2 - 12x + 18}_{\text{descomponemos}}$$

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 12x + 18 &= (2x^2 + 9x + 9) + (-21x + 9) \\
 F(x) &\equiv (2x - 3)(2x^2 + 9x + 9)q(x) + (2x^2 + 9x + 9) + (-21x + 9) \\
 F(x) &\equiv (2x^2 + 9x + 9)[(2x - 3)q(x) + 1] + (-21x + 9) \\
 D(x) &\quad d(x) \quad Q(x) \quad R(x) \\
 R(x) &\text{ es el resto de dividir } D(x) \text{ entre } (2x^2 + 9x + 9) \\
 \therefore R(x) &= -21x + 9
 \end{aligned}$$

35. ¿Qué valor toma pq en: $\frac{x^4 + px^2 + q}{x^2 + x + 1}$, de modo que su resto sea idéntico a $3x + 4$?

Resolución:

1	1	0	p	0	q
-1		-1	-1		
-1			1		
				1	-p
				-p	-p
				(1-p)	(q-p)
					resto

Como: $(1-p)x + (q-p) \equiv 3x + 4$ (dato)

$$\begin{cases}
 1-p=3 \Rightarrow p=-2 \\
 q-p=4 \Rightarrow q=2
 \end{cases} \Rightarrow pq = -4$$

36. En la división siguiente: $\frac{2x^5 + 3x^4 + bx^3 + 6bx^2 + x + a}{x^2 - x + b}$ se sabe que el resto es: $2x + 3$; además la suma de coeficientes del cociente es mayor que 15. Calcular ab .

Resolución:

1	2	3	b	6b	1	a
1		2	-2b			
-b			5	-5b		
			(5-b)	(-5b+b^2)		
				5	-5b	
				2	3	
						dato

Del esquema:

- $b^2 - 5b + 6 = 0$
 $\Rightarrow b^2 - 5b + 4 = 0 \Rightarrow (b-4)(b-1) = 0$
 $\Rightarrow b = 4 \vee b = 1$
- $a - 5b = 3$
 Si: $b = 4 \Rightarrow a = 23$
 Si: $b = 1 \Rightarrow a = 8$

Observe que cuando $b = 1 \wedge a = 8$, suma de coeficientes del cociente sale mayor que 15 pero no cuando $b = 4 \Rightarrow b = 1 \wedge a = 8 \therefore ab = 8$

37. Sea P un polinomio de cuarto grado divisible por $(x^2 - 1)$. Si $P(x)$ se divide separadamente entre $(x^2 + 1)$ y $(x^2 - 2)$ los residuos son $(2x - 6)$ y $(6 - x)$ respectivamente, hallar el término independiente de $P(x)$.

Resolución:

$$GA(P) = 4 \wedge P(x) \text{ divisible: } x^2 - 1$$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{x^2 - 1} \equiv (x^2 - 1)q(x)$$

$$P(x) \equiv (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c) \quad \dots(1)$$

I. $\frac{P(x)}{x^2 + 1}$ deja resto: $R_1(x) = 2x - 6$

Por el teorema del resto: $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$

En (1): $R_1(x) = (-1 - 1)(-a + bx + c) \equiv 2x - 6$

$$-2bx - 2(c - a) \equiv 2x - 6$$

$$\Rightarrow b = -1 \wedge c - a = 3 \quad \dots(\alpha)$$

II. $\frac{P(x)}{x^2 - 2}$ deja resto: $R_2(x) = 6 - x$

Por el teorema del resto: $x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2$

En (1): $R_2(x) = (2 - 1)(2a + bx + c) \equiv 6 - x$

$$\Rightarrow b = -1 \wedge 2a + c = 6 \quad \dots(\beta)$$

De (α) y (β) : $a = 1 \wedge c = 4$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 - 1)(x^2 - x + 4) \therefore TI(P) = P(0) = -4$$

38. Si la siguiente división: $\frac{2x^{119} + 1}{1 + x^2 - x}$ es inexacta, hallar el residuo.

Resolución:

De: $\frac{2x^{119} + 1}{x^2 - x + 1} \quad \dots(I)$

Recuerde que si: $D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$

$$\Rightarrow D(x)M(x) \equiv [d(x) \times M(x)]q(x) + R(x)M(x)$$

Esto es, si al dividendo y divisor se les multiplica por $M(x)$ ($M(x) \neq 0$), entonces el resto también quedará multiplicado por $M(x)$.

Por $(x + 1)$: $\frac{(2x^{119} + 1)(x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x + 1)}$

$$\Rightarrow \frac{2x^{120} + 2x^{119} + x + 1}{x^3 + 1} \quad \dots(II)$$

Por el teorema del resto en (II):

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

$$P(x) = 2(x^3)^{40} + 2(x^3)^{39}x^2 + x + 1$$

$$R_F(x) = 2(-1)^{40} + 2(-1)^{39}x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow R_F(x) = -2x^2 + x + 3 = (-2x + 3)(x + 1)$$

Luego, el resto de (I) será:

$$R(x) = \frac{R_F(x)}{x + 1} = \frac{(-2x + 3)(x + 1)}{x + 1}$$

$$\therefore R(x) = -2x + 3$$

39. Si P es un polinomio de cuarto grado, cuyo coeficiente principal es 6, tiene como término independiente -4 ; es divisible separadamente por $(x + 1)$ y $(x + 2)$ y al dividirlo entre $(x - 2)$ el residuo es 240, hallar la suma de coeficientes de polinomio P .

Resolución:

$$GA(P) = 4; CP(P) = 6; TI(P) = -4$$

$P(x)$ es divisible entre $(x + 1)$ y $(x + 2)$

$$\Rightarrow \frac{P(x)}{(x + 1)(x + 2)} \equiv q(x)$$

$$\Rightarrow P(x) \equiv (x+1)(x+2)(ax^2 + bx + c)$$

$$CP(P) = a = 6; TI(P) = 2c = -4 \Rightarrow c = -2$$

$$\Rightarrow P(x) \equiv (x+1)(x+2)(6x^2 + bx - 2)$$

Además: $\frac{P(x)}{x-2}$ deja resto: $R = 240$

$$\Rightarrow P(2) = R = 240 \Rightarrow (3)(4)(24 + 2b - 2) = 240$$

$$\Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow P(x) = (x+1)(x+2)(6x^2 - x - 2)$$

$$\therefore P(1) = (2)(3)(3) = 18$$

40. Si P es un polinomio, tal que al dividir $P(x)$ entre $(x^5 + x + 1)$ se obtiene como residuo $(-x^2 + 1)$, hallar el residuo que se obtiene al dividir $P(x)$ entre $(x^2 + x + 1)$

Resolución:

$$P(x) \equiv (x^5 + x + 1)q(x) + (-x^2 + 1)$$

$$P(x) \equiv (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)q(x) + (-x^2 + 1)$$

Para calcular el resto de $\frac{P(x)}{x^2 + x + 1}$, apliquemos el

teorema del resto: $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow -x^2 = x + 1$

$$\Rightarrow R(x) = 0 \times q(x) + (x + 1 + 1)$$

$$\therefore R(x) = x + 2$$

41. Si un término del cociente notable que resulta de dividir: $\frac{x^m - y^{m+n}}{x^3 y^m - y^{m+2}}$ es x^{12} . Hallar el valor de $m + n$.

Resolución:

Se tiene: $\frac{x^m - y^{m+n}}{x^3 y^m - y^{m+2}} \Rightarrow \frac{1}{y^{m-3}} \left(\frac{x^m - y^{m+n}}{x^3 - y^5} \right)$

Dándole la forma: $\frac{1}{y^{m-3}} \left[\frac{(x^3)^{\frac{m}{3}} - (y^5)^{\frac{m+n}{5}}}{x^3 - y^5} \right]$

Se cumple que: $\frac{m}{3} = \frac{m+n}{5}$

$$\Rightarrow 5m = 3m + 3n \Rightarrow 2m = 3n \Rightarrow n = \frac{2m}{3} \quad \dots (I)$$

Sabemos que un término cualquiera del desarrollo estará expresado por:

$$t_k = \frac{1}{y^{m-3}} (x^3)^{\frac{m}{3}-k} (y^5)^{k-1} = x^{m-3k} y^{5k-5-m+3} = x^{m-3k} y^{5k-m-2}$$

Por dato, uno de sus términos es x^{12} en consecuencia:

$$x^{m-3k} y^{5k-m-2} = x^{12} y^0$$

De donde:

$$\bullet \quad m - 3k = 12 \Rightarrow m = 3k + 12 \quad \dots (II)$$

$$\bullet \quad 5k - m - 2 = 0 \Rightarrow 5k - 3k - 12 - 2 = 0 \Rightarrow k = 7$$

Reemplazando el valor de $k = 7$ en (II):

$$m = 3(7) + 12 \Rightarrow m = 33$$

$$\text{En (I): } n = \frac{2(33)}{3} = n = 22$$

$$\therefore m + n = 33 + 22 = 55$$

42. Si el término " k " contado a partir del extremo final del desarrollo del cociente notable: $\frac{x^{75} - y^{30}}{x^5 - y^2}$ tiene

grado absoluto 40. Calcular el grado absoluto del t_{k+2} , contado a partir del primero.

Resolución:

El término " k " contado a partir del final es el mismo término que se obtiene invirtiendo el desarrollo del cociente notable, lo cual se logra, cambiando de signos, así:

$$\frac{y^{30} - x^{75}}{y^2 - x^5} = \frac{(y^2)^{15} - (x^5)^{15}}{(y^2) - (x^5)}$$

Cálculo del término k : (invertido el orden)

$$t_k = (y^2)^{15-k} (x^5)^{k-1}$$

Dato: $(GA t_k) = 40 = 30 - 2k + 5k - 5$

$$\Rightarrow 3k = 15 \Rightarrow k = 5$$

$\Rightarrow$ Nos piden calcular el $t_{k+2} = t_7$ (sin invertir)

$$t_7 = (x^5)^{15-7} (y^2)^{7-1} = x^{40} y^{12}$$

$$\therefore GA(t_7) = 40 + 12 = 52$$

43. Si al dividir: $\frac{abx^5 + b^2x^4 + bcx^3 - abx + acx^2 + c^2}{ax^2 + bx + c}$

se obtiene por resto: acx , calcular: $\frac{b(a+c)}{ac}$

Resolución:

Por el método de Horner:

a	ab	b ²	bc	ac	-ab	c ²
-b	↙	-b ²	-bc			
-c		↙	0	0		
			↙	0	0	
				↙	-bc	-c ²
	b	0	0	c	(-ab - bc)	0
						R(x)

De donde: $R(x) = (-ab - bc)x \equiv acx$ (dato)

$$\Rightarrow -ab - bc - ac = ab + bc = -ac$$

$$\therefore \frac{b(a+c)}{ac} = -1$$

44. Calcular " n " si el residuo de la división:

$$\frac{(x+3)^n (x+1)^n + nx(x-1)(x+5) + 1}{(x+2)^2}$$

es: $2(1 - 18x)$; n es par.

Resolución:

Por el teorema del resto:

$$d = x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = -4$$

Del dividendo:

$$D = [(x+3)(x+1)]^n + nx(x-1)(x+5) + 1$$

$$D = (x^2 + 4x + 3)^n + nx(x^2 + 4x - 5) + 1$$

$$\text{Luego: } R = (-4 + 3)^n + nx(-4 - 5) + 1$$

Como " n " es par, entonces:

$$R = 1 - 9nx + 1 = -9nx + 2$$

Por dato: $-9nx + 2 \equiv -36x + 2$

$$\Rightarrow -9n = -36 \Rightarrow n = 4$$

45. Hallar el resto en la división: $\frac{x^3}{(x+1)(x+2)}$

Resolución:

Se tiene que:

$$D(x) = x^3 + 0x^2 + 0x + 0$$

$$d(x) = x^2 + 3x + 2$$

Por el método clásico:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 0x + 0 & x^2 + 3x + 2 \\ -x^3 - 3x^2 - 2x & \\ \hline -3x^2 - 2x + 0 & \\ -3x^2 - 2x + 0 & \\ \hline 3x^2 + 9x + 6 & \\ 7x + 6 = \text{resto} & \end{array}$$

46. En la siguiente división:

$$\frac{3x^{12} - 5x^{10} + 3x^3 + 3x^2 - 5x - 5}{ax^2 - b}$$

determinar el valor entero y positivo de "a" y "b", para que dicha división sea exacta, siendo: $a < 4$

Resolución:

Por el teorema del resto:

$$d(x) = ax^2 - b = 0 \Rightarrow x^2 = b/a$$

Del dividendo, dando forma:

$$D = 3(x^2)^6 - 5(x^2)^5 + 3(x^2)x + 3(x^2) - 5x - 5$$

$$R(x) = 3\left(\frac{b}{a}\right)^6 - 5\left(\frac{b}{a}\right)^5 + 3\left(\frac{b}{a}\right)x + 3\left(\frac{b}{a}\right) - 5x - 5$$

Para que sea la división exacta: $R(x) = 0$

$$\Rightarrow \left[3\left(\frac{b}{a}\right) - 5\right]x + \left[3\left(\frac{b}{a}\right)^6 - 5\left(\frac{b}{a}\right)^5 + 3\left(\frac{b}{a}\right) - 5\right] \equiv 0$$

$$\text{De aquí: } 3\left(\frac{b}{a}\right) - 5 = 0 \Rightarrow 3b = 5a$$

Como "a" y "b" $\in \mathbb{Z}^+$: $a = 3 \wedge b = 5$

47. Si se sabe que la división de:

$$F(x) = ax^2 + (3a - b)x^{n-1} + (5a - 3b)x^{n-2} + \dots + (7a - 5b)x^{n-3} + \dots$$

de $(n+1)$ términos, entre $ax - b$, da como residuo $11a$; $(a \neq b)$. Hallar el valor de "n".

Resolución:

Efectuamos la división por Ruffini, para esto analicemos los coeficientes del dividendo, nótese que posee $(n+1)$ términos.

1.º coef. = a

2.º coef. = $(3a - b) = (2 \times 1 + 1)a - (2 \times 1 - 1)b$

3.º coef. = $(5a - 3b) = (2 \times 2 + 1)a - (2 \times 2 - 1)b$

4.º coef. = $(7a - 5b) = (2 \times 3 + 1)a - (2 \times 3 - 1)b$

...

$(n+1).º \text{ coef.} = (2n+1)a - (2n-1)b$

$$\begin{array}{r|l} x = \frac{b}{a} & a(3a-b)(5a-3b) \dots (2n+1)a - (2n-1)b \\ \downarrow & b \quad 3b \quad \dots \quad (2n-1)b \\ \hline & a \quad 3a \quad 5a \dots (2n-1)a \quad \boxed{(2n+1)a} \\ & \text{resto} \end{array}$$

$$\Rightarrow (2n+1)a = 11a \quad \therefore n = 5$$

48. Al efectuar la división: $\frac{(x^2+1)^5 + (x-1)^3 + 3x}{x^3 - x^2 + x - 1}$

Se obtuvo un resto $R(x)$, hallar el valor de: $\frac{R(-1)}{R(1)}$

Resolución:

Se tiene que:

$$d(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1)$$

Factorizando $(x-1)$: $d(x) = (x-1)(x^2+1)$

Luego, $d(x)$ es de tercer grado, entonces el máximo grado de $R(x)$ es 2; es decir:

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$

Sabemos que: $D(x) \equiv d(x)q(x) + R(x)$, entonces $(x^2+1)^5 + (x-1)^3 + 3x \equiv$

$$(x-1)(x^2+1)q(x) + (ax^2 + bx + c) \dots (I)$$

Por ser identidad, damos valores:

$$x = 1 \Rightarrow 35 = a + b + c \dots (II)$$

También se puede escribir en (I) así:

$$(x^2+1)^5 + (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 3x \equiv (x-1)(x^2+1)q(x) + (ax^2 + bx + c)$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow -x + 3 + 3x - 1 + 3x \equiv -a + bx + c$$

$$\Rightarrow 5x + 2 \equiv bx + (c - a)$$

$$\text{De aquí: } b = 5 \wedge c - a = 2 \quad \left. \begin{array}{l} c = 16 \\ \text{Pero } b = 5 \text{ en (II): } a + c = 30 \end{array} \right\} a = 14$$

$$\Rightarrow R(x) = 14x^2 + 5x + 16$$

$$\therefore \frac{R(-1)}{R(1)} = \frac{14 - 5 + 16}{14 + 5 + 16} = \frac{5}{7}$$

49. Si el resto de dividir:

$P(x) = (2x^2 + 6x + 9)^{45} - 3(x^2 + 3x + k)^{24} + 5$ por $d(x) = x^2 + 3x + 4$ es 3, hallar la suma de los valores de k.

Resolución:

Por el algoritmo de la división:

$$P(x) = d(x)q(x) + R(x)$$

Donde $q(x)$: cociente de la división, $R(x) = 3$

$$(2x^2 + 6x + 9)^{45} - 3(x^2 + 3x + k)^{24} + 5 =$$

$$(x^2 + 3x + 4)q(x) + 3$$

$$[2(x^2 + 3x) + 9]^{45} - 3[(x^2 + 3x) + k]^{24} + 5 =$$

$$[(x^2 + 3x) + 4]q(x) + 3$$

$$\text{Para anular } q(x) \Rightarrow x^2 + 3x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = -4$$

Reemplazando:

$$[2(-4) + 9]^{45} - 3(-4 + k)^{24} + 5 = (-4 + k)q(x) + 3$$

$$1^{45} - 3(-4 + k)^{24} + 5 = 0 + 3 \Rightarrow 3 = 3(-4 + k)^{24}$$

$$\Rightarrow 1 = (-4 + k)^{24} \Rightarrow 1 = (-4 + k)$$

$$\Rightarrow -4 + k = 1 \vee -4 + k = -1 \Rightarrow k = 5 \vee k = 3$$

$$\therefore k = \{3; 5\} \Rightarrow \Sigma k = 3 + 5 = 8$$

50. Si el resto de dividir $P(x)$ entre $(x-2)$ es el mismo que el dividir $P(x)$ entre $(x-1)$ e igual a 8. ¿Cuál es el resto de dividir $P(x)$ entre $(x-1)(x-2)$?

Resolución:

Por teoría:

$$\text{Si: } P(x) \div (x-2) \Rightarrow R = 8$$

$$P(x) \div (x-1) \Rightarrow R = 8$$

Entonces al dividir: $P(x) \div (x-2)(x-1)$

El resto también será igual a 8.

51. Encontrar el resto de dividir un polinomio $P(n)$ entre $(2n - 1)$, si se sabe que el término independiente del cociente es 5 y además $P(0) = 18$.

Resolución:

Ecuación fundamental:

$$P(n) = \underbrace{(2n - 1)}_{1.^\circ} Q(n) + \underbrace{R}_{\text{Grado cero}}$$

$$\text{Datos: } P(0) = 18 \wedge Q(0) = 5$$

$$\text{Para } n = 0: P(0) = (-1)Q(0) + R \Rightarrow 18 = -5 + R$$

$$\therefore R = 23$$

52. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x + 4)$ se obtuvo como residuo 13, al dividir el mismo polinomio entre $(x + 2)$ el residuo es -5 . Hallar el residuo de dividir dicho polinomio entre: $(x + 4)(x + 2)$

Resolución:

Datos:

$$P(x) \div (x + 4) \Rightarrow R = 13 \Rightarrow P(-4) = 13$$

$$P(x) \div (x + 2) \Rightarrow R = -5 \Rightarrow P(-2) = -5$$

Ecuación fundamental:

$$P(x) = \underbrace{(x + 4)(x + 2)}_{2.^\circ} q(x) + \underbrace{R}_{1.^\circ}$$

De donde: $R = ax + b$

$$P(-4) = 0 + (-4)a + b \Rightarrow 4a + b = 13 \quad \dots(I)$$

$$P(-2) = 0 + (-2)a + b \Rightarrow 2a + b = -5 \quad \dots(II)$$

$$\text{Resolviendo (I) y (II): } a = -9 \wedge b = -23$$

$$\therefore R = -9x - 23$$

53. Los coeficientes de un polinomio $P(x)$ de cuarto grado son números enteros consecutivos, si se divide $P(x)$ entre $(x - 1)$ el resto es 35, hallar la suma de coeficientes de los términos lineal y cúbico.

Resolución:

Sea:

$$P(x) = ax^4 + (a + 1)x^3 + (a + 2)x^2 + (a + 3)x + (a + 4)$$

Dato: $P(1) = 35$, luego:

$$P(1) = a + a + 1 + a + 2 + a + 3 + a + 4 = 35$$

$$\Rightarrow 5a = 25 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{Coeficiente del término lineal: } a + 3 = 8$$

$$\text{Coeficiente del término cúbico: } a + 1 = 6$$

$$\therefore 8 + 6 = 14$$

54. Un polinomio entero en x , al ser dividido por $(x - 1)$ y por $(x - 2)$ separadamente, los residuos son 6 y 8, respectivamente. Cuánto se debe restar al polinomio para que al dividirlo entre $(x - 1)(x - 2)$, el cociente resulte exacto.

Resolución:

Dato:

$$P(x) \div (x - 1) \Rightarrow R = 6 \Rightarrow P(1) = 6$$

$$P(x) \div (x - 2) \Rightarrow R = 8 \Rightarrow P(2) = 8$$

Ecuación fundamental:

$$P(x) = \underbrace{(x - 1)(x - 2)}_{2.^\circ} q(x) + \underbrace{R}_{1.^\circ}$$

De donde: $R = ax + b$

$$P(1) = 0 + (1)a + b \Rightarrow a + b = 6 \quad \dots(I)$$

$$P(2) = 0 + (2)a + b \Rightarrow 2a + b = 8 \quad \dots(II)$$

Resolviendo (I) y (II):

$$a = 2 \wedge b = 4 \Rightarrow R = 2x + 4$$

 $\therefore q(x)$ será exacto cuando se le reste: $2x + 4$

55. Un polinomio presenta las siguientes características: grado $(n + 1)$, término independiente -3 , primer coeficiente 1, es divisible por $(x^n + 1)$, además $P(2) = -33$. Según lo mencionado, hallar " n ".

Resolución:

$$\text{I. } P(x) \Rightarrow \text{grado: } n + 1$$

$$\text{II. } P(0) = -3$$

$$\text{III. } 1.^\circ \text{ coeficiente: } 1$$

$$\text{IV. } P(x) \div (x^n + 1) \Rightarrow R = 0$$

$$\text{V. } P(2) = -33, \text{ nos piden } n$$

Ecuación fundamental:

$$\text{De (IV): } P(x) = \underbrace{(x^n + 1)}_{n.^\circ} \underbrace{Q(x)}_{1.^\circ}$$

$$\text{De (I): } (n + 1).^\circ \quad n.^\circ \quad 1.^\circ$$

De donde:

$$P(x) = (x^n + 1)(ax + b) \Rightarrow \text{de (III): } a = 1$$

$$P(x) = (x^n + 1)(x + b) \Rightarrow \text{de (II): } b = -3$$

$$P(x) = (x^n + 1)(x - 3) \Rightarrow \text{de (V): } (2^n + 1)(-1) = -33$$

$$\therefore n = 5$$

56. Al dividir el polinomio $P(x)$ entre $(2x^2 + x + 3)$ se obtiene por residuo 6 y un cociente cuya suma de coeficientes es 9. Halle el resto en: $\frac{P(x)}{x - 1}$

Resolución:

Ecuación fundamental:

$$P(x) = (2x^2 + x + 3)Q(x) + 6$$

$$\text{Además: } Q(1) = 9$$

$$\Rightarrow R = P(1) = (2 + 1 + 3)Q(1) + 6 \quad \therefore R = 60$$

57. Calcular el mínimo valor de " k " de manera que en el cociente notable:

$$\frac{a^{m+1} + b^{m+1}}{a^m + b^m}; \text{ para } (m = \text{impar})$$

el grado absoluto del término que ocupa el lugar " k " exceda en $(4m - 4)$ al grado absoluto del término que ocupa el lugar " k " contado desde la derecha.

Resolución:

$$\text{Sea: } \frac{(a^m)^{m+1} + (b^m)^{m+1}}{(a^m)^m + (b^m)^m}$$

Si el desarrollo es un cociente notable entero necesariamente: $m = n.^\circ \text{ impar}$.

$$\text{Dato: } \overrightarrow{GA(t_k)} - \overleftarrow{GA(t_k)} = 4m - 4 \quad \dots(\alpha)$$

$$\overrightarrow{t_k} = (\text{signo})(a^m)^{m+1-k}(b^m)^{k-1}$$

$$\overleftarrow{t_k} = (\text{signo})(a^m)^{k-1}(b^m)^{m-k}$$

En (α):

$$[m(m^m - k) + (k - 1)] - [m(k - 1) + (m^m - k)] = 4n - 4$$

$$\text{Operando: } m^m = 2k + 3 \Rightarrow k = \frac{m^m - 3}{2}$$

$$\therefore k_{\text{mínimo}} = 12 \text{ (para } m = 3)$$

58. Al dividir $P(x) = mx^5 + 2nx^3 - 7x^2 - 3x + 2$ entre $d(x) = x^2 + x + 1$, se obtiene por cociente $q(x)$ y resto $r(x) = 5x - 1$. Hallar el valor de $P(m)$.

Resolución:

Por el algoritmo de la división:

$$P(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

Luego, reemplazando:

$$mx^5 + 2nx^3 - 7x^2 - 3x + 2 = (x^2 + x + 1)q(x) + 5x - 1$$

$$mx^5 + 2nx^3 - 7x^2 - 8x + 3 = (x^2 + x + 1)q(x)$$

Por Horner invertido:

÷ 1	3	-8	-7	2n	0	m
-1		-3	-3			
-1			11	11	-1	
				-1		
	3	-11	1	2n + 10	0	0

$$\text{Luego: } 0 + (-1) + [-(2n + 10)] = 0 \Rightarrow 2n = -11$$

$$\text{También: } m + [-(2n + 10)] = 0 \Rightarrow m = -1$$

$$P(x) = -x^5 - 11x^3 - 7x^2 - 3x + 2$$

$$\therefore P(-1) = 1 + 11 - 7 + 3 + 2 = 10$$

59. Un polinomio entero en x de tercer grado se anula para $x = 7$ y para $x = -3$, y al dividirlo entre $x - 10$ da como residuo 39 si el primer coeficiente del polinomio es 3. Hallar el resto de dividirlo entre $x - 8$.

Resolución:

Sabemos que es un polinomio entero de tercer grado cuyo primer coeficiente es 3 y se anula para $x = 7$ y $x = -3$, podemos plantear que:

$$P(x) = (x - 7)(x + 3)(3x + B) \quad \dots (I)$$

$$\begin{array}{ccc} 3.^\circ & 2.^\circ & 1.^\circ \\ \hline \end{array}$$

$$\text{Dato: } \frac{P(x)}{x - 10} \Rightarrow R = 39 \Rightarrow P(10) = 39$$

$$\text{En (I): } P(10) = (10 - 7)(10 + 3)(10 \times 3 + B) = 39$$

$$\Rightarrow B = -29$$

$$\text{Luego: } P(x) = (x - 7)(x + 3)(3x - 29)$$

$$\text{Piden: } \frac{P(x)}{x - 8} \Big| R = P(8)$$

$$\Rightarrow P(8) = \underbrace{(8 - 7)}_{(1)} \underbrace{(8 + 3)}_{(11)} \underbrace{(3 \times 8 - 29)}_{(-5)} = R$$

$$\therefore R = -55$$

60. Al dividir: $P(x) = x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 2x - 1$ entre un polinomio de segundo grado, se obtuvo como cociente: $(x^2 - 1)$ y como residuo: $(2x + 1)$. Indique el valor de B .

Resolución:

Por Euclides:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + 2x - 1 \equiv d(x)(x^2 - 1) + (2x + 1)$$

$$\text{Para } x = 1: A + B = 1 \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{Para } x = -1: B - A = 1 \quad \dots (\beta)$$

$$\text{Sumando } (\alpha) + (\beta): B = 1$$

61. Al dividir $P(x) = mx^4 + nx^3 + 5x^2 + 5x - 6$ entre $d(x) = x^2 - 3x + 2$, el resto es $x - 2$. Hallar: $n^2 - m^2$

Resolución:

Del algoritmo de la división:

$$mx^4 + nx^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x^2 - 3x + 2)q(x) + x - 2$$

$$mx^4 + nx^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x - 2)(x - 1)q(x) + x - 2$$

Si $x = 1$:

$$m(1)^4 + n(1)^3 + 5(1)^2 + 5(1) - 6 = (1 - 2)(1 - 1)q(1) + 1 - 2$$

$$m + n + 4 = -1 \Rightarrow m + n = -5 \quad \dots (I)$$

Si $x = 2$:

$$m(2)^4 + n(2)^3 + 5(2)^2 + 5(2) - 6 = (2 - 2)(2 - 1)q(2) + 2 - 2$$

$$16m + 8n + 24 = 0 \Rightarrow 2m + n = -3 \quad \dots (II)$$

$$\text{De (I) y (II): } m = 2; n = -7$$

$$\therefore n^2 - m^2 = (-7)^2 - (2)^2 = 45$$

62. Qué lugar ocupa en el desarrollo del cociente notable:

$$\frac{x^{160} - y^{280}}{x^4 - y^7} \text{ el término que tiene grado absoluto 252.}$$

Resolución:

Dándole la forma adecuada:

$$\frac{x^{160} - y^{280}}{x^4 - y^7} = \frac{(x^4)^{40} - (y^7)^{40}}{x^4 - y^7}$$

Sabemos que un término cualquiera del desarrollo estará expresado por: $t_k = (x^4)^{40-k}(y^7)^k$

$$\text{Pero: } GA(t_k) = 160 - 4k + 7k - 7 = 153 + 3k$$

$$\text{Dato: } GA(t_k) = 252 = 153 + 3k \Rightarrow k = 33$$

$$\therefore \text{El término de lugar: } 33$$

63. Dar la suma de coeficientes del cociente de la siguiente división indicada: $\frac{x^6 - 14x^4 + 49x^2 - 36}{(x - 1)(x - 2)(x - 3)}$

Resolución:

Por la regla de Ruffini

	1	0	-14	0	49	0	-36
$x = 1$	↓	1	↓	-13	-13	36	36
$x = 2$	↓	1	1	-13	-13	36	0
	↓	2	6	-14	-54	-36	
$x = 3$	↓	1	3	-7	-27	-18	0
	↓	3	18	33	18		
	↓	1	6	11	6	0	

$$Q(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$$

$$\therefore \Sigma \text{Coef.} = Q(1) = 24$$

64. Cuál es el resto de la división: $\frac{x^{367} - 2}{x^2 - x + 1}$

Resolución:

Multiplicando el dividendo y el divisor por $(x + 1)$ obtenemos:

$$\frac{(x^{367} - 2)(x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x + 1)} = \frac{x^{368} + x^{367} - 2x - 2}{x^3 + 1}$$

Expresando en función de x^3 al dividendo tendríamos:

$$\frac{(x^3)^{122}x^2 + (x^3)^{122}x - 2x - 2}{x^3 + 1}$$

Aplicando el teorema del resto:

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$$

Reemplazando en el dividendo, obtenemos:

$$(x + 1)R(x) = (-1)^{122}x^2 + (-1)^{122}x - 2x - 2$$

$$(x + 1)R(x) = x^2 + x - 2x - 2$$

$$R(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} \quad \dots(I)$$

De (I), por Ruffini:

	1	-1	-2
-1		-1	+2
1	-2	0	

$$\therefore R(x) = x - 2$$

65. Determine el menor valor de "n" para que las siguientes divisiones tengan el mismo resto.

$$\frac{(x-2)^8 + x^2 + x - n}{x-2}; \quad \frac{2x^{18} + nx + n^2}{x+1}$$

Resolución:

Aplicamos el teorema del resto para cada división.

De la primera división:

$$\bullet \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\bullet \quad R_1 = (2-2)^8 + 2^2 + 2 - n \Rightarrow R_1 = 6 - n$$

De la segunda división:

$$\bullet \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$\bullet \quad R_2 = 2(-1)^{18} + n(-1) + n^2 \Rightarrow R_2 = 2 - n + n^2$$

$$\text{Por dato: } R_1 = R_2 \Rightarrow 6 - n = 2 - n + n^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 4 \Rightarrow n = 2 \vee n = -2$$

$\therefore$ El menor valor de n es -2.

66. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $(x + 3)$ se obtuvo por residuo -5 y un cociente cuya suma de coeficientes es igual a 3. Encontrar el residuo de dividir $P(x)$ entre $(x - 1)$.

Resolución:

Datos:

$$P(x) \div (x + 3) \Rightarrow P(x) = (x + 3)Q(x) - 5$$

Suma de coeficientes de $Q(x)$, es decir: $Q(1) = 3$

Aplicamos el teorema del resto: $x - 1 = 0$

$$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow R = P(1)$$

En $P(x)$, para $x = 1$:

$$R = P(1) = (1 + 3)Q(1) - 5 \Rightarrow R = 4Q(1) - 5$$

$$\text{Pero: } Q(1) = 3 \Rightarrow R = 4(3) - 5 \Rightarrow R = 7$$

67. Si el cociente notable que se genera de la división $\frac{x^{20} - y^a}{x^b - y^3}$ tiene 10 términos, halle el valor de: $a + b$

Resolución

Para que genere la división un cociente notable, debe cumplirse que:

$$\frac{20}{b} = \frac{a}{3} = \frac{\text{N.º de términos del cociente}}{10}$$

$$\frac{20}{b} = \frac{a}{3} = 10$$

$$\text{Luego: } \frac{20}{b} = 10 \Rightarrow b = 2 \wedge \frac{a}{3} = 10 \Rightarrow a = 30$$

$$\therefore a + b = 32$$

68. Determine la suma de coeficientes del cociente más la suma de coeficientes del residuo generado por la división:

$$\frac{(x-1)^{10} + x^3 + 20}{3x^4 - 5x^3 + x + 2}$$

Resolución:

Usando la propiedad deducimos que nos piden $q(1) + R(1)$, donde $q(x)$ y $R(x)$ son el cociente y residuo, respectivamente.

De la identidad fundamental, obtenemos:

$$\text{Si } x = 1: 21 = (1)q(1) + R(1)$$

$$\therefore q(1) + R(1) = 21$$

69. Al dividir $P(x) = 3ax^5 + (a + 1)x^3 + 4x^2 - 6x + a$ entre $(x - 1)$ y $(x^2 - 1)$ los restos que se obtuvieron fueron 14 y $(bx + c)$, respectivamente. Calcular: $a + b + c$.

Resolución:

$$1.^\circ \frac{3ax^5 + (a + 1)x^3 + 4x^2 - 6x + a}{(x - 1)}$$

$$\Rightarrow R_1 = 14 \quad \dots(I)$$

Calculando R_1 por el teorema del resto:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Reemplazando en el dividendo:

$$R_1 = 3a(1)^5 + (a + 1)(1)^3 + 4(1)^2 - 6(1) + a$$

$$R_1 = 3a + (a + 1) + 4 - 6 + a$$

$$\Rightarrow R_1 = 5a - 1 \quad \dots(II)$$

$$\text{De (I) = (II): } 5a - 1 = 14 \Rightarrow 5a = 15 \Rightarrow a = 3$$

$$2.^\circ \frac{3ax^5 + (a + 1)x^3 + 4x^2 - 6x + a}{(x^2 - 1)}$$

$$\Rightarrow R_2 = bx + c \quad \dots(III)$$

Calculando R_2 por el teorema del resto:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

Transformando el dividendo:

$$3a(x^2)^2x + (a + 1)x^2x + 4x^2 - 6x + a$$

Reemplazando ($x^2 = 1$) en el dividendo:

$$R_2 = 3a(1)^2x + (a+1)(1)x + 4(1) - 6x + a$$

$$R_2 = 3ax + (a+1)x + 4 - 6x + a$$

$$R_2 = (3a + a + 1 - 6)x + (a + 4)$$

$$\Rightarrow R_2 = (4a - 5)x + (a + 4) \quad \dots(IV)$$

Igualando: (III) = (IV):

$$\underline{bx + c} = \underline{(4a - 5)x + (a + 4)}$$

Donde:

$$b = 4a - 5 \Rightarrow b = 4(3) - 5 \Rightarrow b = 7$$

$$c = a + 4 \Rightarrow c = 7 \quad \therefore a + b + c = 3 + 7 + 7 = 17$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



PROBLEMA 1 (UNI 1988)

Dos de las raíces del polinomio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; son 3 y r . Hallar un polinomio de tercer grado, dos de cuyas raíces sean $\frac{4}{3}$ y $\frac{r+1}{r}$

- A) $cx^3 + (a-b)x^2 + (b+d-c)x + (a+b-d)$
 B) $dx^3 + (c-3d)x^2 + (b+3d-2c)x + (a+c-b-d)$
 C) $dx^3 - 3dx^2 + (3b+d)x + (a-b-c)$
 D) $ax^3 - 2cx^2 + bx + (a-b-d)$
 E) $bx^3 + (2a+b)x^2 + (b+c)x + (b-a-c)$

Resolución:

Quiere decir que existe un $P(y)$ de raíces $1 + \frac{1}{3} \wedge 1 + \frac{1}{r}$

El polinomio $P(y)$ se determina haciendo:

$$1 + \frac{1}{x} = y \Rightarrow y = \frac{1}{x-1}$$

O sea que: $P(y) = P\left(\frac{1}{x-1}\right)$

Finalmente el polinomio buscado es:

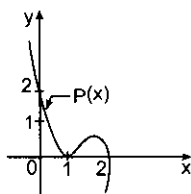
$$P\left(\frac{1}{x-1}\right) = a\left(\frac{1}{x-1}\right)^3 + b\left(\frac{1}{x-1}\right)^2 + c\left(\frac{1}{x-1}\right) + d$$

$$P\left(\frac{1}{x-1}\right) = dx^3 + (c-3d)x^2 + (b+3d-2c)x + (a+c-b-d) = 0$$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2009 - I)

Sea $P(x)$ el polinomio de grado "n", donde "n" es el menor posible y cuya gráfica se representa a continuación:



Encuentre el residuo al efectuar la división de $P(x)$ con $Q(x) = x - 3$

- A) -6 B) -4 C) -1
 D) 1 E) 4

Resolución:

Del gráfico: $P(x) = a(x-1)^2(x-2)$ (grado mínimo)

$$(0; 2) \in P \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow P(x) = -(x-1)^2(x-2)$$

Se pide el residuo de: $\frac{P(x)}{x-3}$

Por teorema del resto:

$$R(x) = P(3) = -(3-1)^2(3-2) = -4$$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - I)

Si $P(x) = x^3 + ax^2 - x + b - 6$ es divisible entre $x^2 - 1$ y la suma de los valores de x que cumplen $P(x) = 0$ es -4 . Calcule el producto de a y b .

- A) -7 B) -4 C) 4 D) 5 E) 8

Resolución:

$$\text{Si: } \frac{P(x)}{x^2-1} \Rightarrow R = 0$$

1	1	a	-1	b-6
0		0	1	
1			0	a
1	a	0	a+b-6	$\Rightarrow a+b-6=0$

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x+a)$$

$$P(x) = 0 \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -a \end{cases}$$

$$\Rightarrow -1 + 1 - a = -4 \Rightarrow a = 4 \wedge b = 2 \quad \therefore ab = 8$$

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2011 - II)

Al dividir un polinomio $p(x)$ entre $x^4 - 1$ se obtuvo como residuo $3x^3 + nx^2 + mx - 2$; si además se sabe que, el resto de dividir $p(x)$ entre $(x^2 - 1)$ es $5x - 4$, entonces el valor de m^n es:

- A) -4 B) -2 C) 1/2
 D) 1/4 E) 4

Resolución:

Dei dato:

$$P(x) \equiv (x^4 - 1)q(x) + 3x^3 + nx^2 + mx - 2 \quad \dots(I)$$

$$\text{Además: } \frac{P(x)}{x^2-1} \text{ deja residuo: } R(x) = 5x - 4 \quad \dots(II)$$

Por teorema del resto en (II): $x^2 = 1$

En (I): $3(x^2)x + (x^2) + mx - 2 = 3x + n + mx - 2$

$$3(x^2)x + (x^2) + mx - 2 = (m+3)x + (n-2)$$

$$R(x) = 5x - 4$$

Identificando con el dato: $m = 2 \wedge n = 2 \quad \therefore m^n = 1/4$

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

Halle el cociente al dividir

$P(x) = 3x^4 + x^3 + x^2 + x - 2$ entre $(x+1)(x-2/3)$

A) $2(x^2 - 1)$

B) $3(x^2 + 2x)$

C) $4(x^2 + 4)$

D) $3(x^2 + 1)$

E) $3(x^2 - 2)$

Resolución:

Factorizamos: $P(x) = (x+1)(x-2/3)(3x^2+3)$

Nos piden el cociente de dividir:

$$\frac{(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(3x^2+3)}{(x+1)\left(x-\frac{2}{3}\right)} = 3(x^2+1)$$

Clave: D

PROBLEMAS

PROPUESTOS

1. Al efectuar la división:

$$\frac{x^5 + 5x^4 - 5x^3 + (9m+1)x^2 + n}{x - \frac{1}{3}}$$

 el residuo es $R(x) = 8$. Calcular $(m+n)^2$

- A) 4 B) 16 C) 36
D) 64 E) 100

2. Calcular el resto de dividir:

$$\frac{8x^3 + 4x^2 - 6ax + 15}{2x - 1}$$

si la suma de coeficientes del cociente es 37.

- A) 46 B) 45 C) 44
D) 43 E) 42

3. En el esquema de la división por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -3 & a & -b & c \\ * & & * & * & * & * \\ \hline & * & 1 & b & * & 3 \end{array}$$

 calcular: $ac - bc$.

- A) 1 B) -1 C) 3
D) -3 E) 4

4. Se define el polinomio mónico:

$$P(x) = (a-3)x^4 - 5x^2 + 2x - a$$

 calcular el resto de la división: $\frac{P(x) - P(0)}{x-3}$

- A) 38 B) 40 C) 36
D) 42 E) 34

5. Calcular la suma de coeficientes del cociente al efectuar la división:
- $\frac{x^{99} - x^{30} + x - 1}{x - 1}$

- A) 50 B) 99 C) 100
D) 70 E) 1

6. Calcular
- $m+n+p$
- , si al dividir:

$$\frac{2x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q}{x^2 - x + 1}$$

 se obtiene un cociente cuyos coeficientes están en PA y deja de resto igual a: $3x + q$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

7. Al dividir:
- $\frac{x^5 - 10x^3 - 21x + 90}{x - b}$

el coeficiente del término cuadrático del cociente es -1. Calcular b.

- A) -4 B) 3 C) 5
D) -3 E) B V D

8. Al efectuar la siguiente división:

$$\frac{x^{n+1} - (n-2)x + 2n - 3}{(x-1)^2}$$

se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es 190. Hallar el resto de la división.

- A) $x + 16$ B) $3x - 16$ C) $x - 16$
D) $3x + 16$ E) 4

9. Si se divide:

 $Q(x) = (a+b)x^3 + (b-c)x^2 + (b+c)x + a - b$
entre $x^2 + n^2$, el residuo es cero. Calcular: $\frac{b^2}{a^2 + c^2}$

- A) 3 B) 1/2 C) 1/4
D) 1 E) 3/2

10. El esquema representa la división por el método de Horner:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} a & a & b & a & b & a \\ b & & b & c & & \\ c & & & b & c & c^2 \\ \hline & b & b & c & & \end{array}$$

Indicar el resto.

- A) $x + 2$ B) $3x + 2$ C) $2x + 1$
D) $4x + 7$ E) $7x + 11$

11. Efectuar la división:

$$\frac{6x^5 - x^4 + 4x^3 - 5x^2 - x - 15}{2x^2 - x + 3}$$

Indicar el resto.

- A) $2x + 1$ B) $4x - 1$ C) $x + 2$
D) 0 E) 1

12. Dividir:
- $\frac{2x^3 - 8x + x^4 + 12 - 7x^2}{(x-2)(x-1)}$

Indicar el valor de verdad:

 I. Σ coeficientes (q) = 12.

 II. El resto es $x + 1$.

III. La división es exacta.

- A) VVV B) VFF C) FFV
D) VVV E) FVV

13. Calcular el valor de
- m^{-1}
- , si la división:

$$\frac{x^4 + x^3 + mx^2 - 6x + 8}{x^2 + 2x + 8}$$
 es exacta.

- A) 3 B) 7 C) 4
D) 1/4 E) 1/7

14. Al dividir:
- $\frac{2x^4 - x^3 + 4x^2 + 7x + m}{x^2 - x + n}$

 el resto es $3x + 4$, calcular m^{-n} .

- A) 3 B) 4 C) $1/3$
D) 1 E) 5

15. Si el resto de la división:

$$\frac{8x^5 + 4x^3 + mx^2 + nx + p}{2x^3 + x^2 - 3}$$

es $R(x) = 5x^2 - 3x + 7$, calcular: $m + n + p$

- A) 10 B) n C) -10
D) $-n$ E) 0

16. Si la división de:

$P(x) = x^5 - x^4 - (a + 3)x^3 + (b + 3)x^2 + (c - 2)x - 2$
entre $x^3 - 8x + 2$ es exacta, calcular:

$$\sqrt{P(a) + P(b)P(c)}$$

- A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 20

17. El polinomio: $P(x) = mx^4 + nx^3 - 9x^2 + 4x + 10$
es divisible por $Q(x) = x^2 - 3x + 5$. Calcular $m - n$

- A) 4 B) -6 C) 6
D) 5 E) -2

18. En la división: $\frac{x^4 + 5x - 3x^2 - 8}{x - 2}$, señalar la suma
de coeficientes del cociente.

- A) 8 B) 10 C) 9
D) 11 E) 12

19. Al dividir: $\frac{3x^4 + (n + 1)x^3 + nx - 5}{x + 3}$ el resto es 1,
calcular: $n - 4\sqrt{n + 1}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

20. Calcular el resto de dividir: $\frac{(2x + 5)^5 - (x - 1)^5}{x^2 + 9x + 18}$

- A) 0 B) $25x + 203$
C) $341x + 2046$ D) $-36x + 20461$
E) $273x + 2036$

21. Al dividir $P(x)$ entre $x^3 - x^2 - 2x + 2$, se obtuvo de
resto $x + 2$. Hallar el resto de dividir $P^3(x)$ entre
 $x^2 - 2$.

- A) $x - 3$ B) $2x + 8$
C) $14x + 20$ D) $8x + 18$
E) $2x - 16$

22. Dado el polinomio $P(x)$ mónico de grado n , que
cumple: $P(1) = 1$; $P(2) = 2$; $P(3) = 3$; ...; $P(n) = n$.

Determinar el resto de dividir: $\frac{P(x)}{x}$

- A) 0 B) $2n$ C) $n + 1$
D) $n - 1$ E) $(-1)^n n$

23. Al dividir $P(x)$ entre $(x^2 + x + 1)$ se obtuvo por residuo
 $(x + 1)$ y al dividir $P(x)$ entre $(x^2 - x + 1)$ el resto es
 $(x - 1)$. Calcular el resto de dividir $P(x)$ por $(x^4 + x^2 + 1)$

- A) x^3 B) x C) $x^3 - x$
D) $x^3 + x$ E) $x + 1$

24. En la división siguiente:

$$\frac{2x^5 + 3x^4 + bx^3 + 6bx^2 + x + a}{x^2 - x + b}$$

se sabe que el resto es $2x + 3$, además, la suma
de coeficientes del cociente es mayor que 15. Cal-
cular ab .

- A) 4 B) 9 C) 7
D) 2 E) 8

25. ¿Qué relación debe guardar los coeficientes del
polinomio $(ax^4 + bx^3 + cx + d)$ para que sea divisi-
ble entre $(x^2 - 2x + 1)$?

- A) $d = 2a + b$ B) $d = 2a + 3b$
C) $d = 3a + 2b$ D) $d = a + 2b$
E) $d = a + b$

26. Determinar A y B / $P(x) = Ax^4 + Bx^3 + 1$. Verificar:
 $P(x) - R(x) = (x - 1)^2 q(x)$, si $R(k) = 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

- A) 3; 4 B) 3; -4 C) 2; -4
D) -2 ; 4 E) -2 ; -4

27. Sabiendo que $P(x) = 4x^5 - 6x^4 + 3x^3 + x^2 - x - 1$,
se puede expresar según potencias de $(x - 1)$, es
decir, $P(x)$ se puede expresar así:

$a(x - 1)^5 + b(x - 1)^4 + c(x - 1)^3 + d(x - 1)^2 + e(x - 1) + f$
Indicar el valor numérico de: $E = \frac{b + d + 1}{a + c + e}$

- A) -1 B) -5 C) -10
D) 1 E) 5

28. Calcular el valor de "m" en la siguiente división indica-
da $\frac{(2x - 1)^m}{(x + 2)(x - 3)}$, si el cociente admite como TI = 4.

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 1 E) 3

29. Si $F\left(\frac{a}{2}\right)$ es el resto de dividir $F(x)$ entre $(x + 2a)$, donde

$F(x) = 2x^3 + a(a + 4)x^2 + (1 + a^2 + a^3)x + 2(a^3 - a^4 + 1)$

calcular $F\left(\frac{1}{2}\right)$.

- A) $\frac{13}{7}$ B) $\frac{13}{12}$ C) $\frac{11}{2}$
D) $\frac{7}{3}$ E) $\frac{5}{3}$

30. El cociente y resto de la siguiente división:

$$\frac{\left(\frac{1}{b^2}\right)x^{51} + \left(\frac{1}{a^2}\right)x^{37} + 2x - 2}{3x - 1}$$

es $(c_0x^{50} + c_1x^{49} + c_2x^{48} + \dots + c_{50})$; -5 , respectiva-
mente, donde:

$c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_{50} = \frac{2}{a} + \frac{1}{b}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Calcular $a+b$.

- A) $-\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $-\frac{1}{2}$ E) 5

31. Si $P(x)$ es divisible por $(x^2 + x + 1)$, donde $P(x) \equiv x^3 A(x^3) + B(x^3)$, calcular la suma de los restos de dividir $A(x)$ y $B(x)$ entre $(x-1)$, respectivamente.

- A) 1 B) 2 C) 0
D) -1 E) -2

32. Luego de efectuar la división:

$$\frac{x^{72} + x^4 + 1}{x^{64} - x^{80} + x^{56} - \dots + 1}$$

hallar el resto.

- A) 1 B) 2 C) $x^4 + 1$
D) $x^4 - 1$ E) $2x^2 + 1$

- 33.Cuál será el residuo de la división:

$$\frac{[(1+x+x^2+x^3)^2 - x^3]^3}{1+x+x^2+x^3+x^4}$$

- A) $-x$ B) x
C) 0 D) $1+x+x^2+x^3$
E) $1-x$

34. Calcular el resto de dividir:

$$\frac{(x-1)^{55} + (2x)^{11} + x^3 - 1}{3x^5 - 15x^4 + 30x^3 - 30x^2 + 21x - 3}$$

- A) 0 B) -1 C) x^3
D) $x^3 - 1$ E) $3x^3 - 3$

35. Determinar el valor del parámetro K, para que la siguiente división sea exacta.

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5 + Kxyz(x^2 + y^2 + z^2)}{x + y + z}$$

- A) $-5/2$ B) $5/6$ C) $5/2$
D) 5 E) 15

36. Determinar el resto de la división:

$$\frac{(x^5 + x^4 + x^2 + 3)(x^4 - x^2 + 1) + x(x^4 + 1) + x^4(x + 1)}{x^3 - x + 1}$$

- A) $1-x$ B) $2x-1$ C) $3-2x$
D) $4x-3$ E) x^2+x-1

37. Indicar el valor de "a" y "b", para que $(x^6 + ax^4 + b)$ sea divisible por $(x^2 + x + 1)$.

- A) 1; 2 B) 2; 1 C) 3; 2
D) -1; 1 E) 1; 1

38. Al efectuar la división:

$$\frac{3ax^4 - 4dx^3 - 2cx^2 + 2x + 2}{3x^2 + 2x - a}$$

se obtiene un cociente cuya suma de coeficientes es igual a 30 y un resto idéntico a $5ax + a + 2$, $a \neq 0$.

Calcular $\frac{a}{q(1)-a}$, donde $q(x)$ es cociente.

- A) 1 B) $1/4$ C) -1
D) $-1/4$ E) 4

39. El polinomio $P(x)$ dividido separadamente entre $(x^2 - x + 1)$ y $(x^2 + x + 1)$ originan residuos $-x + 1$ y $3x + 5$, respectivamente. Determinar el término independiente del residuo de dividir $P(x)$ entre $x^4 + x^2 + 1$.

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 6 E) 8

40. Hallar el residuo: $\frac{(x-5)^{10} + (x-6)^7 + 6}{(x-5)(x-6)}$

- A) $2x - 5$ B) $2x + 5$ C) $2x$
D) 5 E) $3x - 5$

41. Sabiendo que $P(x)$ es un polinomio y si $a \neq b$ son números reales, tales que $P(a) = P(b)$, hallar el resto de la división de $P(x)$ entre $x^2 - (a+b)x + ab$.

- A) $[P(a)]^2$ B) 1 C) $P(a)$
D) $\sqrt{P(a)}$ E) 0

42. Si "n" es un número natural impar y múltiplo de 3, determinar el resto en la siguiente división:

$$(x^{2n} + x^n + 2) + (x^2 - x + 1)$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

43. Si P es un polinomio de tercer grado, tal que al dividir P entre $(x^2 - 2x + 2)$ deja un residuo $(3x - 6)$. Al dividir P entre $(x^2 + x)$ su residuo es $(6x + 2)$. Calcular el residuo que se obtiene de dividir P entre $(x+1)(x-2)$.

- A) $-8x + 4$ B) $4x - 8$ C) $8x + 4$
D) $4x + 8$ E) $8x - 4$

44. Si los cocientes de dividir $P(x)$ entre $(x-1)$ y $(x-2)$ son, respectivamente, $Q(x)$ y $q(x)$, determinar $P(3)$, sabiendo que: $P(1) = 3$; $P(2) = 2$; $2Q(3) + q(3) = 5$

- A) -3 B) -5 C) 2
D) 4 E) 5

45. Al dividir separadamente el polinomio $P(x)$ entre $x^2 - (b+1)x + b$ y entre $x^2 - (b+2)x + 2b$, se obtiene por restos $7x - 4$ y $5x - 8$, respectivamente. Hallar la suma de coeficiente del resto de dividir $P(x)$ entre $x^3 - (b+3)x^2 + (3b+2)x - 2b$.

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

46. Un polinomio $P(x)$ de sexto grado, al ser dividido por $(x+1)^6$ arroja un cociente entero $q(x)$ y un re-

siduo $3x+2$. Si $q(x)$ tiene como coeficiente principal al número 7, y la suma de coeficientes de $P(x)$ es 325, determinar el término independiente de $q(x)$.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

47. Determinar el residuo de la división:

$$x^{20}(x^2 + x + 1) + x^{19}(x + 1)$$

- A) $-x^{19}$ B) $-2x^{19}$ C) x^{19}
D) $2x^{19}$ E) $3x^{19}$

48. Hallar el resto de la división:

$$\frac{(x-1)(x+2)(x+3)(2x-1)}{x^2 + x - 5}$$

- A) $x + 8$ B) $2x + 7$ C) $6x + 10$ D))
9x + 21 E) $9x + 11$

49. Hallar el residuo de dividir:

$$x^n(x+1)^n + (2x^2 + 2x - 1)^{20} + (x+1)^2 - (x+2)$$

entre $x^2 + x - 1$.

- A) $x + 1$ B) 2 C) 1
D) -1 E) 0

50. Calcular el resto de dividir:

$$\frac{(x+1)^{35} + 7(x+1)^{28} + 3(x+1)^{17} + (x+1)^6 + 3}{x^2 + 2x + 2}$$

- A) $2x + 11$ B) $2x - 11$ C) $2x + 7$
D) $2x + 13$ E) $2x - 13$

51. Hallar el resto de la división: $\frac{2x^{23} - x^5 + 3}{x^2 + x + 1}$

- A) $-4 + x$ B) $4 - x$ C) $2 - x$
D) 3 E) -3

52. Determinar el valor de M, si la siguiente división:

$$\frac{x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) + M(x^2 + y^2 + z^2)}{x + y + z}$$

es exacta.

- A) -3 B) -1 C) 1
D) 2 E) 3

53. Determinar el resto de dividir:

$$(x+2)^3(x^6 + x + 1) \text{ por } x^2 - x + 1$$

Dar como respuesta el coeficiente del término lineal.

- A) 12 B) 16 C) 18
D) 29 E) 55

54. Si el polinomio $P(x)$ de tercer grado es divisible por $x - 2$, se anula para $x = -1$; tiene término independiente -10 y al ser dividido por $(x - 3)$ su resto es 56. Calcular $P(5)$.

- A) 164 B) 170 C) 128
D) 160 E) 156

55. Si el polinomio de tercer grado $P(x)$ se divide separadamente por $(x - 3)$, $(x + 2)$ y $(x - 1)$ se obtiene el mismo resto -36 , además 4 es raíz de $P(x)$. Calcular $P(5)$.

- A) 120 B) 124 C) 108
D) 144 E) 24

56. Luego de efectuar $\frac{4x^5 + 10x^4 - 2x^2 + 15x - 2}{2x^2 + 3x - 1}$ dé

como respuesta la suma de coeficientes del cociente aumentado en el término independiente del residuo.

- A) 6 B) 9 C) 10
D) 5 E) 4

57. Si en la división:

$$\frac{9x^4 + 6ax^3 + (a^2 + 3b)x^2 + 9a^2x - 3ab}{3x^2 + ax - b}$$

su resto es $6ab + b^2$ $1ab \neq 0$, calcule: $3 + \left(\frac{b}{a}\right)^2$

- A) 72 B) 84 C) 82
D) 76 E) 78

58. ¿Cuál es el valor de $m + n$, si $\frac{nx^3 + 13x^2 + 9x + 2}{mx^2 + 3x + 1}$ es exacta?

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 4

59. En el esquema de Horner.

B	A	3	C	D
2		8	12	
Y			P	Q
	A	m	E	F

calcule: $A + B + C - D - E + Q + F$

- A) 6 B) 37 C) -7
D) 9 E) -1

60. En la división $\frac{x^n - (n+2)x + n + 1}{x - 1}$, el término independiente del cociente es -10 . ¿De qué grado es su dividendo?

- A) 12 B) 8 C) 11
D) 9 E) 10

61. En el esquema de Ruffini:

	a	b	c	d
2	↓	6	p	40
	a	8	20	e

el resto es 2. Calcule: $a + b + c + d + e + p$

- A) -15 B) -11 C) -13
D) -28 E) 13

62. Dado el polinomio:

$P(x) = x^6 + 2\sqrt{2}x^5 + 2\sqrt{2}x^3 + 2\sqrt{2}x + 7$, halle el valor numérico del polinomio cuando $x = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

- A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 13

63. En la base a la división $\frac{6x^{14} + 2x^7 + 14}{x^7 + x - (1 + x)}$, ¿cuál de las proposiciones es verdadera?

- I. El resto no es 22.
II. $|R|_{\max}$ es 6.
III. Su resto es de grado cero.

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

64. Halle $m + n$, sabiendo que la división:

$$\frac{2x^5 + mx^3 + nx^2 - 3x + 1}{x^2 + 3}$$

da un residuo igual a: $3x - 2$

- A) 5 B) 9 C) 10
D) 13 E) 11

65. Dados los polinomios:

$P(x) = 4x^5 + x^3 - x^2 + 4x + 3$; $D(x) = 2x^2 - x + 1$
Al dividir $P(x)$ entre $D(x)$, mediante el esquema de Horner, un estudiante se olvida de cambiar de signo a los coeficientes del divisor. Indique el polinomio que se debe sumar al cociente para que este sea el correcto.

- A) $x^3 + 2x^2 - x + 1$ B) $x^2 - x + 1$
C) $2x^2 - 2x + 1$ D) $2x^2 + x + 1$
E) $2x^2 - x + 1$

66. Al dividir un polinomio $P(x)$ entre $x - 1$ se obtiene que el término independiente, del cociente es 21, indique el residuo, si $P(0) = 7$.

- A) 28 B) 32 C) 25
D) 21 E) 40

67. Determine el valor de $b - a - c$, si se cumple que:

$$\frac{x^5 - 4x^4 - 10x^3 + 27x^2 + ax + b}{x^3 - 4x^2 - 11x + c} \equiv q(x) + \frac{1}{x - 5}$$

- A) 4 B) 6 C) 9
D) 14 E) 13

68. Sea $P(x) = (1 - \sqrt{2})x^3 + 2x^2 - 2\sqrt{2}x + 10$

$$q(x) = x^5 - 9x^4 + x + 2$$

se sabe que Juan gana "b" soles por cada "a" soles que invierte, donde: $P(1 + \sqrt{2}) = b \wedge q(b) = a$
Determine cuánto gana Juan, si invierte 22 soles más.

- A) 14 B) 27 C) 32
D) 39 E) 41

69. Al dividir $\frac{P(x)}{2x^2 + x - 1}$ se obtiene un cociente que es igual al divisor y un residuo $R(x)$, tal que $R(0) = 0$. Halle $P(1)$, si $R(1) = 3$

- A) 7 B) 5 C) 4
D) 6 E) 9

70. Al dividir $P(x) = x^{n^2-3} + 3x^{n^2-4} + 3x^{n^2-5} + \dots + 3x + 6$ entre $D(x) = x - 2$; se obtiene que la suma de coeficientes del cociente es 109; halle $n^2 - R$. (R : residuo de la división).

- A) -12 B) 36 C) 15
D) -20 E) -19

71. Si en la división $\frac{x^{2006}}{(x-a)(x-b)}$ el residuo es 1, halle el máximo valor de $a + b$.

- A) 0 B) 2 C) 3
D) 2006 E) 4

72. Dada la división:

$$\frac{x^{12n} + 2x^{12n-12} + 3x^{12n-24} + \dots + nx^{12} + 1}{(x^6 + 1)(x^3 + 1)}$$

Si el residuo es 56, halle el valor de "n".

- A) 10 B) 15 C) 11
D) 9 E) 8

73. Si el cociente de la división $\frac{x^3 + 3x + 2}{x^2 + x + 3}$ es divisor

de $q(x) = x^5 - 2x^4 + 5x + b$, calcule el valor de b.

- A) -2 B) -4 C) -7
D) 9 E) 11

74. Si $P(x)$ es un polinomio mónico cúbico y es divisible por $x^2 - 5x + 6$, además al dividir $P(x)$ con $x^2 - x - 2$ se obtiene como residuo $8x - 16$. ¿Cuál es el resto de dividir $P(x)$ con $x^2 - 2x + 3$?

- A) $3x - 2$ B) $2x - 3$ C) $x - 1$
D) $-2x + 6$ E) 6

75. Determinar el residuo de dividir:

$$P(x) = x^5 + 3x^2 + 5x + 1 \text{ entre el cociente de } \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

- A) $2x + 1$ B) $x - 2$ C) $x - 3$
D) $2 + 3x$ E) $2x - 1$

76. Un polinomio mónico de tercer grado es divisible por $(x + 2)$ y por $(x - 1)$, además al ser dividido por $(x + 4)$ resultó como residuo 10. Calcule el resto de dividir dicho polinomio entre $(x + 1)$.

- A) -8 B) -3 C) 0
D) 3 E) 6

77. De un polinomio mónico de séptimo grado $P(x)$ se conoce que 3 de sus raíces que son 2; -1 y -3 ;

además es divisible por $(x^2 + 1)$ y $(x - 4)$. Determine el residuo de dividir $P(x)$ entre x , si la suma de coeficientes de $P(x)$ es 96.

- A) 4 B) 8 C) 24
D) 48 E) 60

78. Si el polinomio: $P(x) = x^7 + ax^4 + 5x^2 - bx + c$ es divisible por $(x^3 - x)$; halle el valor de: $\frac{a-b}{2c+1}$

- A) -1 B) -3 C) -5
D) -6 E) -7

79. El residuo de dividir: $\frac{x^{39} + (x^2 - x)^{13} + 5x^3 + x^2 + 2x}{x^2 - x + 1}$

tiene la forma $ax^2 + bx + c$, halle: $\frac{a+b-1}{c}$

- A) -1 B) 2 C) -1/4
D) 3 E) -5

80. Dado $P(x) = x^3 + bx^2 + mx + 6$, si $P(x)$ es divisible por $(x + 1)$ y $(x + 2)$, halle: $\frac{b-m}{5}$

- A) -2 B) 4 C) -3/5
D) -1 E) 1/5

CLAVES

1. D	11. D	21. C	31. C	41. C	51. C	61. B	71. B
2. C	12. D	22. E	32. A	42. B	52. C	62. B	72. A
3. D	13. E	23. D	33. C	43. C	53. E	63. E	73. B
4. D	14. D	24. E	34. D	44. E	54. B	64. A	74. E
5. D	15. C	25. C	35. A	45. E	55. C	65. C	75. E
6. C	16. E	26. B	36. A	46. C	56. A	66. A	76. A
7. E	17. B	27. D	37. E	47. A	57. B	67. A	77. C
8. D	18. D	28. A	38. E	48. D	58. D	68. B	78. D
9. B	19. B	29. C	39. A	49. B	59. B	69. A	79. C
10. E	20. C	30. C	40. A	50. A	60. B	70. E	80. D

Factorización

09 capítulo

Jean-Robert Argand nació el 18 de julio de 1768 y murió el 13 de agosto de 1822. Fue un contable y un talentoso matemático autodidacta francés, nacido en Suiza, que describió en 1806, mientras atendía una tienda de libros en París, la representación geométrica de los números complejos, publicando la idea de lo que se conoce como plano de Argand. Su formación y la educación que recibió son –en su mayoría– desconocidas.

Argand se trasladó a París en 1806 junto con su familia y, mientras trabajaba en una librería, publicó a sus expensas su *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (Ensayo sobre una forma de

representar las cantidades imaginarias mediante construcciones geométricas). El ensayo discute un método de representación gráfica de los números complejos a través de la geometría analítica. Propone la interpretación del valor « i » como una rotación de 90 grados en el plano coordenado, llamado para este fin plano de Argand. En este ensayo también se propone por vez primera la idea de módulo para indicar la magnitud de los vectores y los números complejos, así como la típica notación para los vectores con una flecha horizontal sobre las letras que señalan sus extremos. También es reconocido por ofrecer una prueba del teorema fundamental del álgebra.



Suiza, 1768 - Francia, 1822

Jean-Robert Argand

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Es la transformación de un polinomio en la multiplicación indicada de dos o más polinomios primos dentro de cierto campo de números.

$$\begin{aligned} M(x)N(x) &= P(x) \rightarrow \text{Multiplicación} \\ M(x)N(x) &\rightarrow \text{Multiplicación indicada} \end{aligned}$$

POLINOMIO PRIMO

Es aquel polinomio de grado mayor que cero que no admite ser transformado en multiplicación indicada. También se dice de aquel polinomio que es divisible entre sí mismo y cualquier constante de un cierto campo de números.

Ejemplos:

- $2x + 3$ Es primo en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.
- $x^2 - 5$ Es primo en $\mathbb{Q}$.
No es primo en $\mathbb{R}$.
- $x^2 - x + 1$ Es primo en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
No es primo en $\mathbb{C}$.

Generalmente se ha de trabajar en los racionales. Pero debe tenerse en cuenta lo siguiente:

$P(x) = (x^2 + 1)(x^2 - 3)(x + 4)(x - 2)$, está factorizado en $\mathbb{Q}$.

$P(x) = (x^2 + 1)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 4)(x - 2)$, está factorizado en $\mathbb{R}$.

$P(x) = (x + i)(x - i)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 4)(x - 2)$, está factorizado en $\mathbb{C}$.

MÉTODOS DE FACTORIZACIÓN

Método del factor común por agrupación

Consiste en agrupar los términos de un polinomio de dos en dos o tres en tres, de tal manera que se obtenga un mismo factor.

Ejemplos:

1. Factorizar:

$$P(a; b) = b(a^2 + a + 1) + a(b^2 + b + 1) + a^2 + b^2$$

Resolución:

Efectuando las operaciones indicadas:

$$P(a; b) = ba^2 + ab + b + ab^2 + ab + a + a^2 + b^2$$

$$P(a; b) = a^2 + 2ab + b^2 + ba^2 + ab^2 + a + b$$

Agrupando de la manera indicada se tendrá:

$$P(a; b) = (a + b)^2 + (a + b) + ab(a + b)$$

Extrayendo factor común $(a + b)$:

$$P(a; b) = (a + b)[(a + 1) + b(a + 1)]$$

Factorizado en el corchete:

$$P(a; b) = (a + b)(b + 1)(a + 1)$$

2. Factorizar:

$$A(x; y) = x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7$$

Resolución:

Agrupando convenientemente:

$$A(x; y) = x^7 + x^6y + x^5y^2 + x^4y^3 + x^3y^4 + x^2y^5 + xy^6 + y^7$$

$$A(x; y) = x^6(x + y) + x^4y^2(x + y) + x^2y^4(x + y) + y^6(x + y)$$

Extrayendo factor común $(x + y)$:

$$A(x; y) = (x + y)(x^6 + x^4y^2 + x^2y^4 + y^6)$$

$$A(x; y) = (x + y)[x^4(x^2 + y^2) + y^4(x^2 + y^2)]$$

Extrayendo del corchete el factor: $(x^2 + y^2)$

$$\text{Luego: } A(x; y) = (x + y)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$$

3. Factorizar:

$$J(x; y; z) = x^3y - xyz^2 + x^2y^2 - y^2z^2 - x^2yz + yz^3 - zx^3 + xz^3$$

Resolución:

Agrupando en forma conveniente:

$$J(x; y; z) = xy(x^2 - z^2) + y^2(x^2 - z^2) - yz(x^2 - z^2) - xz(x^2 - z^2)$$

Extrayendo factor común: $(x^2 - z^2)$:

$$J(x; y; z) = (x^2 - z^2)(xy + y^2 - yz - xz)$$

$$J(x; y; z) = (x + z)(x - z)[x(y - z) + y(y - z)]$$

Extrayendo factor común $(y - z)$:

$$J(x; y; z) = (x + z)(x - z)(y + x)(y - z)$$

4. Factorizar:

$$E(a; b; c) = a^4b - a^4c + a^3b^2 - a^3bc - abc^3 + ac^4 - b^2c^3 + bc^4$$

Resolución:

Extrayendo los factores: (a^4) , (a^3b) , (ac^3) y (bc^3)

$$E(a; b; c) = a^4(b - c) + a^3b(b - c) - ac^3(b - c) - bc^3(b - c)$$

Extrayendo factor común $(b - c)$:

$$E(a; b; c) = (b - c)(a^4 + a^3b - ac^3 - bc^3)$$

$$E(a; b; c) = (b - c)[a^3(a + b) - c^3(a + b)]$$

$$E(a; b; c) = (b - c)(a^3 - c^3)(a + b)$$

Desarrollando la diferencia de cubos:

$$E(a; b; c) = (b - c)(a - c)(a^2 + ac + c^2)(a + b)$$

5. Factorizar: $S(a; b; x; y) = ab(x + y)^2 + xy(a - b)^2$

Resolución:

Desarrollando los binomios al cuadrado se tendrá:

$$S(a; b; x; y) = ab(x^2 + 2xy + y^2) + xy(a^2 - 2ab + b^2)$$

Efectuando:

$$S(a; b; x; y) = abx^2 + 2abxy + aby^2 + a^2xy - 2abxy + b^2xy$$

$$S(a; b; x; y) = ax(bx + ay) + by(ay + bx)$$

Finalmente extrayendo factor común $(ay + bx)$:

$$S(a; b; x; y) = (ay + bx)(ax + by)$$

6. Factorizar:

$$Q(a; b; c) = a^2b^2c + bc^2 - abc^2 - ab^3 + b^2c + a^2bc^2 - ac^3 - ab^2c$$

Resolución:

Agrupando como se indica:

$$Q(a; b; c) = a^2b^2c + bc^2 - abc^2 - ab^3 + b^2c + a^2bc^2 - ac^3 - ab^2c$$

Se obtendrá:

$$Q(a; b; c) = abc(ab - c) - bc(ab - c) - b^2(ab - c) + ac^2(ab - c)$$

Extrayendo el factor común $(ab - c)$

$$Q(a; b; c) = (ab - c)[abc - bc - b^2 + ac^2]$$

Factorizando en el corchete:

$$Q(a; b; c) = (ab - c)[b(ac - b) + c(ac - b)]$$

$$Q(a; b; c) = (ab - c)(ac - b)(b + c)$$

7. Factorizar:

$$R(x; y; z) = xyz + (xyz)^{12} + (xyz)^6(x^7 + y^7 + z^7) + (x^7y^7) + y^7z^7 + z^7x^7$$

Resolución:

Transformando la expresión se tendrá:

$$R(x; y; z) = xyz + x^{12}y^{12}z^{12} + x^{13}y^{6}z^6 + x^6y^{13}z^6 + x^6y^6z^{13} + x^7y^7 + y^7z^7 + z^7x^7$$

Luego de agrupar de la manera indicada:

$$R(x; y; z) = xy(z + x^6y^6) + x^6y^6z^2(z + x^6y^6) + z^5x^7(z + x^6y^6) + y^7z^6(z + x^6y^6)$$

Extrayendo el factor común $(z + x^6y^6)$:

$$R(x; y; z) = (z + x^6y^6)(xy + x^6y^6z^2 + x^7z^6 + y^7z^6)$$

$$R(x; y; z) = (z + x^6y^6)[x(y + x^6z^6) + y^6z^6(y + x^6z^6)]$$

$$\therefore R(x; y; z) = (z + x^6y^6)(y + x^6z^6)(x + y^6z^6)$$

Método de las identidades

Para este caso se utilizará los productos notables en forma inversa; entre las más importantes ya conocemos:

$$(a^{2n} - b^{2n}) = (a^n + b^n)(a^n - b^n)$$

$$(a^{3n} + b^{3n}) = (a^n + b^n)(a^{2n} - a^n b^n + b^{2n})$$

$$(a^{3n} - b^{3n}) = (a^n - b^n)(a^{2n} + a^n b^n + b^{2n})$$

$$(a^{2n} \pm 2a^n b^n + b^{2n}) = (a^n \pm b^n)^2$$

Ejemplos:

1. Factorizar:

$$D(a; b; c; d) = b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad + 2bc$$

Resolución:

Agrupando en la forma indicada:

$$D(a; b; c; d) = (b^2 + c^2 + 2bc) - (a^2 + d^2 - 2ad)$$

Luego se tendrá:

$$D(a; b; c; d) = (b + c)^2 - (a - d)^2$$

Por diferencia de cuadrados:

$$D(a; b; c; d) = (b + c + a - d)(b + c - a + d)$$

2. Factorizar:

$$A(a; b) = a^3 + a^2 + a^2b - b^3 - ab^2 - b^2$$

Resolución:

Extrayendo factor común (a^2) de los 3 primeros y $(-b^2)$ de los últimos.

$$A(a; b) = a^2(a + 1 + b) - b^2(b + a + 1)$$

$$A(a; b) = (a + b + 1)(a^2 - b^2)$$

$$A(a; b) = (a + b + 1)(a + b)(a - b)$$

3. Factorizar:

$$N = x^6 - x^4 + 2x^2 - 1$$

Resolución:

Agrupando los tres últimos términos:

$$N = x^6 - (x^4 - 2x^2 + 1)$$

$$N = x^6 - (x^2 - 1)^2 = (x^3)^2 - (x^2 - 1)^2$$

Desarrollando la diferencia de cuadrados:

$$N = (x^3 + x^2 - 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

4. Factorizar:

$$A(a; b; c) = (a^2 + b^2 + ab)^2 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2$$

Resolución:

Agrupando los dos primeros sumandos y de los últimos extrayendo factor común $(-c^2)$:

$$A(a; b; c) = (a^2 + b^2 + ab + ab)(a^2 + b^2 + ab - ab) - c^2(a^2 + b^2)$$

Simplificando:

$$A(a; b; c) = (a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 2ab) - c^2(a^2 + b^2)$$

$$(a + b)^2$$

$$A(a; b; c) = (a^2 + b^2)[(a + b)^2 - c^2]$$

$$\therefore A(a; b; c) = (a^2 + b^2)(a + b + c)(a + b - c)$$

5. Factorizar:

$$M(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$$

Resolución:

Agrupando en la forma indicada:

$$M(x) = x^4(x - 1) - 2x^2(x - 1) + (x - 1)$$

Extrayendo factor común $(x - 1)$:

$$M(x) = (x - 1)(x^4 - 2x^2 + 1)$$

$$M(x) = (x - 1)(x^2 - 1)^2 = (x - 1)[(x + 1)(x - 1)]^2$$

$$\text{Finalmente: } M(x) = (x - 1)^3(x + 1)^2$$

6. Factorizar: $F(a; x) = ax(ax - 2) - (x^2 - 1) + a(2x - a)$

Resolución:

Efectuando el primer y último sumando:

$$F(a; x) = a^2x^2 - 2ax - (x^2 - 1) + 2ax - a^2$$

Reduciendo términos semejantes y agrupando:

$$F(a; x) = a^2(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(a^2 - 1)$$

Desarrollando la diferencia de cuadrados:

$$F(a; x) = (x + 1)(x - 1)(a + 1)(a - 1)$$

7. Factorizar:

$$P(a; b; c) = (a^4 + a^2b^2 + b^4)^2 - a^4b^4 - b^4c^4 - c^4a^4$$

Resolución:

Transformando la expresión:

$$P(a; b; c) = (a^4 + a^2b^2 + b^4)^2 - (a^2b^2)^2 - c^4(a^4 + b^4)$$

Diferencia de cuadrados

$$P(a; b; c) = (a^4 + 2a^2b^2 + b^4)(a^4 + b^4) - c^4(a^4 + b^4)$$

Extrayendo el factor común $(a^4 + b^4)$:

$$P(a; b; c) = (a^4 + b^4)[(a^2 + b^2)^2 - (c^2)^2]$$

$$P(a; b; c) = (a^4 + b^4)(a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)$$

8. Factorizar:

$$Q(x; y; z) = x(xy + z^2 - x^2) + y(xy + z^2 - y^2)$$

Resolución:

Efectuando se tendrá:

$$Q(x; y; z) = x^2y + xz^2 - x^3 + xy^2 + yz^2 - y^3$$

Luego agrupar:

$$Q(x; y; z) = xy(x + y) + z^2(x + y) - (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

$$Q(x; y; z) = (x + y)(xy + z^2 - x^2 + xy - y^2)$$

$$Q(x; y; z) = (x + y)[z^2 - (x^2 - 2xy + y^2)]$$

$$Q(x; y; z) = (x + y)[z^2 - (x - y)^2]$$

$$\therefore Q(x; y; z) = (x + y)(z + x - y)(z - x + y)$$

9. Factorizar:

$$R(a; b; c) = (a + b)(b + c)(c + a) + a^3 + b^3 + c^3 - 2abc$$

Resolución:

De la identidad:

$$(a + b)(b + c)(c + a) \equiv (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc$$

En la expresión:

$$R(a; b; c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) - abc + a^3 + b^3 + c^3 - 2abc$$

$$R(a; b; c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Haciendo uso de la identidad:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

$$R(a; b; c) = (a + b + c)(ab + bc + ca) + (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Simplificando se tendrá:

$$R(a; b; c) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2)$$

10. Factorizar: $S(x) = x^5 + 2x^3 + x - 1$ **Resolución:**

Transformando la expresión dada:

$$S(x) = x^5 + x^3 + x^3 - 1 + x$$

Desarrollando la diferencia de cubos:

$$S(x) = x(x^4 + x^2 + 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$S(x) = x(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

Extrayendo el factor común $(x^2 + x + 1)$:

$$S(x) = (x^2 + x + 1)[x^3 - x^2 + x + x - 1]$$

$$\therefore S(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 2x - 1)$$

Método de las aspas**Método del aspa simple:** se utiliza para factorizar trinomios de la forma general:

$$P(x; y) = ax^{2m} + bx^m y^n + cy^{2n}$$

Cuando: $m = 1 \wedge n = 1$: $P(x; y) = ax^2 + bxy + cy$ Si: $m = 1 \wedge n = 0 \Rightarrow P(x; y) = ax^2 + bx + c$

El método consiste en descomponer los términos extremos, de tal manera que al sumar los productos en aspa nos reproduzca el término central. Los factores se escribirán horizontalmente.

Ejemplos:1. Factorizar: $F(x) = 8x^2 - 22x + 15$ **Resolución:**

$$F(x) = 8x^2 - 22x + 15$$

$$\begin{array}{rcl} 4x & \nearrow & -5 \\ 2x & \searrow & -3 \\ & \text{---} & -10x \\ & \text{---} & -12x \\ & \text{---} & -22x \end{array}$$

$$\therefore F(x) = (4x - 5)(2x - 3)$$

2. Factorizar: $F(x) = 7x^2 + 29x - 36$ **Resolución:**

$$F(x) = 7x^2 + 29x - 36$$

$$\begin{array}{rcl} 7x & \nearrow & 36 \\ x & \searrow & -1 \\ & \text{---} & 36x \\ & \text{---} & -7x \\ & \text{---} & 29x \end{array}$$

$$\therefore F(x) = (7x + 36)(x - 1)$$

3. Factorizar: $F(x) = abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$ **Resolución:**

$$F(x) = abx^2 + (a^2 + b^2)x + ab$$

$$\begin{array}{rcl} ax & \nearrow & b \\ bx & \searrow & a \\ & \text{---} & b^2x \\ & \text{---} & a^2x \\ & \text{---} & (a^2 + b^2)x \end{array}$$

$$\therefore F(x) = (ax + b)(bx + a)$$

4. Factorizar: $P(x; y) = 8x^3 + 215x^3y^3 - 27y^6$ **Resolución:**

$$8x^3 + 215x^3y^3 - 27y^6$$

$$\begin{array}{rcl} 8x^3 & \nearrow & -y^3 \\ x^3 & \searrow & +27y^3 \\ & \text{---} & -x^3y^3 \\ & \text{---} & +216x^3y^3 \\ & \text{---} & 215x^3y^3 \end{array}$$

$$\text{Luego: } P(x; y) = (8x^3 - y^3)(x^3 + 27y^3)$$

Desarrollando la suma y diferencia de cubos:

$$P(x; y) = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2)(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2)$$

5. Factorizar: $R(x; y) = (a^2 - a)x^2 - (3a - 5)xy - 10y^2$

Resolución:

Como la expresión tiene la forma general:

$$a(a-1)x^2 - (3a-5)xy - 10y^2$$

$$\begin{array}{rcl} ax & \nearrow & -5y \\ (a-1)x & \searrow & 2y \\ & & -5(a-1)xy \\ & & 2axy \\ & & \hline & & -(3a-5)xy \end{array}$$

Luego: $R(x; y) = (ax - 5y)(a - 1)x + 2y$

6. Factorizar: $P(x) = x^5 - 3x^3 - x^2 + 1$

Resolución:

Ordenando el polinomio:

$$x^5 - (2x^3 + x^2) - (x^3 - 1)$$

$$\begin{array}{rcl} x^3 & \nearrow & -(x^2 + x + 1) \\ x^2 & \searrow & (x - 1) \\ & & -x^4 - x^3 - x^2 \\ & & \hline & & x^4 - x^3 \\ & & \hline & & -(2x^3 + x^2) \end{array}$$

Luego: $P(x) = (x^3 - x^2 - x - 1)(x^2 + x - 1)$

Aspa doble: se utiliza para factorizar polinomios que adoptan la siguiente forma:

$$Ax^{2n} + bx^n y^n + cy^{2n} + dx^n + ey^n + f$$

El método consiste en descomponer todos los términos que produzcan aspa de tal manera que la suma de la multiplicación en aspa nos compruebe cada uno de los términos del polinomio. Si faltará algún término se le completará con ceros, los factores se toman horizontalmente.

Ejemplos:

1. Factorizar: $E(x; y) = 3x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1$

Resolución:

$$E(x; y) = 3x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1$$

$$\begin{array}{rcl} 3x & \nearrow & y \\ x & \searrow & y \\ & & 1 \end{array}$$

Comprobaciones:

I. $(3x)y + x(y) = 4xy$

II. $y(1) + y(1) = 2y$

III. $(3x)(1) + (x)(1) = 4x$

$\therefore E(x; y) = (3x + y + 1)(x + y + 1)$

2. Factorizar: $S(x; y) = 9x^2 + 11xy + 2y^2 + 26x + 5y - 3$

Resolución:

$$S(x; y) = 9x^2 + 11xy + 2y^2 + 26x + 5y - 3$$

$$\begin{array}{rcl} 9x & \nearrow & 2y \\ x & \searrow & y \\ & & -3 \end{array}$$

Comprobaciones:

I. $(9x)y + 2y(x) = 11xy$

II. $(2y)3 + y(-1) = 5y$

III. $(9x)3 + (-1)(x) = 26x$

$\therefore S(x; y) = (9x + 2y - 1)(x + y + 3)$

3. Factorizar: $A(x; y) = 2x^2 + 7xy - 15y^2 - 6x + 22y - 8$

Resolución:

$$A(x; y) = 2x^2 + 7xy - 15y^2 - 6x + 22y - 8$$

$$\begin{array}{rcl} 2x & \nearrow & -3y \\ x & \searrow & 5y \\ & & 2 \end{array}$$

$\therefore A(x; y) = (2x - 3y + 2)(x + 5y - 4)$

4. Factorizar:

$$B(x; y) = 30x^2 + 2xy - 4y^2 + 47x - 12y + 7$$

Resolución:

$$B(x; y) = 30x^2 + 2xy - 4y^2 + 47x - 12y + 7$$

$$\begin{array}{rcl} 6x & \nearrow & -2y \\ 5x & \searrow & 2y \\ & & 1 \end{array}$$

$\therefore B(x; y) = (6x - 2y + 1)(5x + 2y + 7)$

5. Factorizar: $C(x; y) = 10x^2 - 17xy + 3y^2 + 5x - y + 0$

Resolución:

$$C(x; y) = 10x^2 - 17xy + 3y^2 + 5x - y + 0$$

$$\begin{array}{rcl} 5x & \nearrow & -1y \\ 2x & \searrow & 3y \\ & & 0 \end{array}$$

$\therefore C(x; y) = (5x - y)(2x - 3y + 1)$

6. Factorizar: $E(x; y) = 21xy - 39y^2 + 56x - 92y + 32$

Resolución:

Completando el polinomio:

$$E(x; y) = 0x^2 + 21xy - 39y^2 + 56x - 92y + 32$$

$$\begin{array}{rcl} 7x & \nearrow & 13y \\ 0x & \searrow & 3y \\ & & 4 \end{array}$$

$\therefore E(x; y) = (7x - 13y + 4)(3y + 8)$

7. Factorizar:

$$R(x; y) = 12x^2 + 10xy - 12y^2 + 11x + 36y - 15$$

Resolución:

$$R(x; y) = 12x^2 + 10xy - 12y^2 + 11x + 36y - 15$$

$$\begin{array}{rcl} 4x & \nearrow & 6y \\ 3x & \searrow & -2y \\ & & -3 \end{array}$$

$\therefore R(x; y) = (4x + 6y - 3)(3x - 2y + 5)$

Método del aspa doble especial: se utiliza para factorizar polinomios que adopten la siguiente forma:

$$P(x; y) = ax^{4n} + bx^{3n}y^n + cx^{2n}y^{2n} + dx^ny^{3n} + ey^{4n}$$

El método consiste en descomponer los términos extremos de tal manera que la suma, de la multiplicación en aspa nos de un valor igual o aproximado al término central, la cantidad faltante se agregará descompuesta de tal manera que se compruebe cada uno de los términos del polinomio.

Ejemplos:

1. Factorizar: $E(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 11x + 6$

Resolución:

$$E(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 11x + 6$$

$$\begin{array}{l} \text{Se tiene:} \quad 5x^2 \quad \uparrow (-) \\ \text{Se debe tener:} \quad 9x^2 \\ \text{Se necesita:} \quad 4x^2 \end{array}$$

Los factores serán:

$$E(x) = (x^2 + 4x + 3)(x^2 + x + 2)$$

$$\therefore E(x) = (x + 3)(x + 1)(x^2 + x + 2)$$

2. Factorizar: $F(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 36x + 18$

Resolución:

$$F(x) = x^4 + 7x^3 + 19x^2 + 36x + 18$$

$$\begin{array}{l} \text{Se tiene:} \quad 9x^2 \quad \uparrow (-) \\ \text{Se debe tener:} \quad 19x^2 \\ \text{Se necesita:} \quad 10x^2 \end{array}$$

$$\therefore F(x) = (x^2 + 5x + 3)(x^2 + 2x + 6)$$

3. Factorizar $B(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 2$

Resolución:

$$B(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 2$$

$$\begin{array}{l} \text{Se tiene:} \quad x^2 \quad \uparrow (-) \\ \text{Se debe tener:} \quad -x^2 \\ \text{Se necesita:} \quad 2x^2 \end{array}$$

$$\therefore B(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + x - 1)$$

4. Factorizar: $C(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 4$

Resolución:

$$C(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x + 4$$

$$\begin{array}{l} \text{Se tiene:} \quad 4x^2 \quad \uparrow (-) \\ \text{Se debe tener:} \quad x^2 \\ \text{Se necesita:} \quad -3x^2 \end{array}$$

$$\text{Luego: } C(x) = (x^2 + 3x + 2)(x^2 - x + 2)$$

$$\therefore C(x) = (x + 1)(x + 2)(x^2 - x + 2)$$

5. Factorizar: $D(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 5x + 12$

Resolución:

$$D(x) = x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 5x + 12$$

$$\begin{array}{l} \text{Se tiene:} \quad -7x^2 \quad \uparrow (-) \\ \text{Se debe tener:} \quad -10x^2 \\ \text{Se necesita:} \quad -3x^2 \end{array}$$

$$\text{Luego: } D(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 - 3x - 4)$$

$$\therefore D(x) = (x^2 + x - 3)(x - 4)(x + 1)$$

6. Factorizar: $H(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 32$

Resolución:

$$H(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + 8x - 32$$

$$\begin{array}{l} \text{Se tiene:} \quad -4x^2 \quad \uparrow (-) \\ \text{Se debe tener:} \quad -4x^2 \\ \text{Se necesita:} \quad 0x^2 \end{array}$$

$$\text{Luego: } H(x) = (x^2 + 2x - 8)(x^2 + 4)$$

$$\therefore H(x) = (x + 4)(x - 2)(x^2 + 4)$$

7. Factorizar:

$$P(x; y) = 6x^4 - x^3y - 13x^2y^2 + 5xy^3 + 3y^4$$

Resolución:

$$P(x; y) = 6x^4 - x^3y - 13x^2y^2 + 5xy^3 + 3y^4$$

$$\begin{array}{l} \text{Se tiene:} \quad -11x^2y^2 \quad \uparrow (-) \\ \text{Se debe tener:} \quad -13x^2y^2 \\ \text{Se necesita:} \quad -2x^2y^2 \end{array}$$

$$\text{Luego: } P(x; y) = (3x^2 - 2xy - y^2)(2x^2 + xy - 3y^2)$$

Factorizando cada paréntesis por aspa simple:

$$\therefore P(x; y) = (3x + y)(x - y^2)(2x + 3y)$$

8. Factorizar: $Q(x) = x^8 + 5x^6 - 5x^4 + 5x^2 - 6$

Resolución:

$$Q(x) = x^8 + 5x^6 - 5x^4 + 5x^2 - 6$$

Se tiene: $-5x^4 \uparrow (-)$
 Se debe tener: $-5x^4$
 Se necesita: $0x^4$

$$\text{Luego: } Q(x) = (x^4 + 5x^2 - 6)(x^4 + 1)$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x^2 + 6)(x^2 - 1)(x^4 + 1)$$

$$\therefore Q(x) = (x^2 + 6)(x + 1)(x - 1)(x^4 + 1)$$

9. Factorizar:

$$R(x) = a(a-1)x^4 + (2a^2 - a + 1)x^3 + (3a^2 - 2)x^2 + (2a^2 + a + 1)x + a(a+1)$$

Resolución:

$$R(x) = a(a-1)x^4 + (2a^2 - a + 1)x^3 + (3a^2 - 2)x^2 + (2a^2 + a + 1)x + a(a+1)$$

$$\begin{array}{ccc} ax^2 & \swarrow \searrow & (a-1)x \\ (a-1)x^2 & \swarrow \searrow & (a+1)x \\ & & a \end{array}$$

$$\text{Se tiene: } a^2x^2 + (a^2 - 1)x^2 = (2a^2 - 1)x^2 \uparrow (-)$$

$$\text{Se debe tener: } (3a^2 - 2)x^2$$

$$\text{Se necesita: } (a^2 - 1)x$$

Luego:

$$R(x) = [ax^2 + (a-1)x + (a+1)][(a-1)x^2 + (a+1)x + a]$$

Método de los divisores binómicos: se utiliza para factorizar polinomios que aceptan como factores a binomios de la forma $ax + b$, basándose en el siguiente principio de la división algebraica.

Si el polinomio se anula para $x = a$, entonces un factor será $(x - a)$.

I. Cero de un polinomio: es el valor o conjunto de valores que tienen la propiedad de anular (valor numérico cero) a un polinomio dado.

$$\text{Por ejemplo: para } P(x) = x^3 - 7x + 6$$

$$\bullet \text{ Si: } x = 1: P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$$

$$x = 1 \text{ es un cero de } P(x)$$

$$\bullet \text{ Si: } x = 2: P(2) = 2^3 - 14 + 6 = 0$$

$$x = 2 \text{ es un cero de } P(x)$$

II. Forma de calcular los posibles ceros de un polinomio: se divide cada uno de los divisores del término independiente entre los divisores del primer coeficiente (con su doble signo).

$$PC = \left\{ \pm \frac{\text{Divisores del término independiente}}{\text{Divisores del coeficiente principal}} \right\}$$

Ejemplos:

$$1. \text{ Factorizar: } E(x) = x^3 - 11x + 31x - 21$$

Resolución:

$$PC = \pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21$$

Para $x = 1$: $E(1) = 1^3 - 11(1) + 31(1) - 21 = 0$, se anula, luego tendrá un factor $(x - 1)$, determinando el otro factor por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -11 & 31 & -21 \\ 1 & & 1 & -10 & 21 \\ \hline & 1 & -10 & 21 & 0 \end{array}$$

$$\text{Luego: } E(x) = (x - 1)(x^2 - 10x + 21)$$

$$\therefore E(x) = (x - 1)(x - 7)(x - 3)$$

$$2. \text{ Factorizar: } E(x) = x^3 - x - 6$$

Resolución:

$$PC = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$$

Para $x = 2$: $E(2) = (2)^3 - 2 - 6 = 0$, se anula, entonces tendrá un factor $(x - 2)$, luego por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & & 2 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\therefore E(x) = (x - 2)(x^2 + 2x + 3)$$

$$3. \text{ Factorizar: } B(x) = x^5 + 5x^4 + 7x^3 - x^2 - 8x - 4$$

Resolución:

$$PC = \pm 1; \pm 2; \pm 4$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow B(1) = 0$$

$$x = -2 \Rightarrow B(-2) = 0$$

$$x = -1 \Rightarrow B(-1) = 0$$

Aplicando Ruffini 3 veces:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 5 & 7 & -1 & -8 & -4 \\ 1 & & 1 & 6 & 13 & 12 & 4 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & 12 & 4 & 0 \\ -2 & & -2 & -8 & -10 & -4 & \\ \hline & 1 & 4 & 5 & 2 & 0 & \\ -1 & & -1 & -3 & -2 & & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 & & \end{array}$$

$$\text{Luego } B(x) = (x - 1)(x + 2)(x + 1)(x^2 + 3x + 2)$$

$$\begin{array}{c} x \quad 2 \\ x \quad 1 \end{array}$$

$$\therefore B(x) = (x - 1)(x + 2)^2(x + 1)^2$$

$$4. \text{ Factorizar: } E(x) = 2x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Resolución:

$$PC = \left(\frac{1}{2} \right) = \pm 1; \pm 1/2$$

$$\text{Para } x = -\frac{1}{2}$$

$$E\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0;$$

se anula, entonces tendrá un factor $(2x + 1)$.

Aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x = \frac{-1}{2} & 2 & 3 & 3 & 1 \\
 & & -1 & -1 & -1 \\
 \hline
 \div 2 & 2 & +2 & 2 & 0 \\
 & 1 & 1 & 1 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$\therefore E(x) = (2x + 1)(x^2 + x + 1)$$

5. Factorizar: $E(x) = 12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$

Resolución:

$$PC = \pm \left\{ \frac{1, 2}{1, 2; 3; 4; 6; 12} \right\} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots \right\}$$

Para $x = \frac{1}{2}$:

$$E\left(\frac{1}{2}\right) = 12\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{2}\right) - 2 = 0;$$

se anula, entonces tendrá un factor $(2x - 1)$.

Por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x = 1/2 & 12 & 8 & -3 & -2 \\
 & & 6 & 7 & 2 \\
 \hline
 \div 2 & 12 & 14 & 4 & 0 \\
 & 6 & 7 & 2 & \\
 \hline
 \end{array}$$

$$E(x) = (6x^2 + 7x + 2)(2x - 1)$$

$$\begin{array}{c}
 3x \quad 2 \\
 2x \quad 1
 \end{array}$$

$$\therefore E(x) = (3x + 2)(2x + 1)(2x - 1)$$

6. Factorizar: $E(x) = 12x^3 - 56x^2 + 77x - 30$

Resolución:

$$PC = \left\{ \frac{1; 2; 3; 5; 6; 10; 30}{1; 2; 3; 4; 6; 12} \right\} = \pm \left\{ 1; \frac{1}{2}; \dots \right\}$$

Para $x = \frac{2}{3}$ se anula, aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 x = 2/3 & 12 & -56 & 77 & -30 \\
 & & 8 & -32 & 30 \\
 \hline
 \div 3 & 12 & -48 & 45 & 0 \\
 & 4 & -16 & 15 & \\
 \hline
 \end{array}$$

Luego $E(x) = (4x^2 - 16x + 15)(3x - 2)$

$$\begin{array}{c}
 2x \quad -5 \\
 2x \quad -3
 \end{array}$$

$$\therefore E(x) = (2x - 3)(2x - 5)(3x - 2)$$

7. Factorizar: $P(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 - x^2 + 4x + 2$

Resolución:Los posibles ceros: $PC = \{\pm 1; \pm 2\}$

Para $x = 1$: $P(1) = 1^5 - 1^4 - 5(1)^3 - 1^2 + 4(1) + 2 = 0$,

se anula, entonces tendrá un factor $(x - 1)$.

Aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 1 & 1 & -1 & -5 & -1 & 4 & 2 \\
 & & 1 & 0 & -5 & -6 & -2 \\
 \hline
 & 1 & 0 & -5 & -6 & -2 & 0
 \end{array}$$

Luego $P(x) = (x - 1)(x^4 + 0x^3 - 5x^2 - 6x - 2)$

$$\begin{array}{c}
 x^2 \quad -2x \quad -2 \\
 (I) \quad (III) \quad (III) \\
 x^2 \quad 2x \quad 1
 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (x - 1)(x^2 - 2x - 2)(x + 1)^2$$

8. Factorizar: $P(x) = x^3(3x + 1)^3 - (6x + 1)^2 - 15$

Resolución:

Desarrollando el binomio al cuadrado y dándole forma al primero:

$$P(x) = [x(3x + 1)]^3 - 36x^2 - 12x - 1 - 15$$

$$P(x) = [3x^2 + x]^3 - 12(3x^2 + x) - 16$$

Haciendo: $3x^2 + x = a$

$$P(a) = a^3 - 12a - 16 = a^3 + 0a^2 - 12a - 16$$

Para $a = -2$:

$$P(-2) = (-2)^3 + (2)^2 \cdot 0 - 12(-2) - 16 = 0, \text{ se anula, entonces tendrá un factor } (a + 2).$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -2 & 1 & 0 & -12 & -16 \\
 & & -2 & 4 & 16 \\
 \hline
 & 1 & -2 & -8 & 0
 \end{array}$$

$$P = (a + 2)(a^2 - 2a - 8) = (a + 2)(a + 2)(a - 4);$$

Entonces: $P = (a + 2)^2(a - 4)$

Reponiendo x : $P(x) = (3x^2 + x + 2)^2(3x^2 + x - 4)$

$$\begin{array}{c}
 3x \quad 4 \\
 x \quad -1
 \end{array}$$

$$\therefore P(x) = (3x^2 + x + 2)^2(3x + 4)(x - 1)$$

◀ FACTORIZACIÓN RECÍPROCA O RECURRENTE**Polinomio recíproco**

Es aquel que se caracteriza porque los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales (en valor absoluto).

Ejemplos:

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$$

(recíproco de primera especie)

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx - a$$

(recíproco de segunda especie)

Reglas o pasos a seguir para factorizar este tipo de polinomios**Cuando el polinomio es de grado par:**

- Se extrae la parte literal del término central con su respectivo exponente.

- Se busca la expresión base: $x + \frac{1}{x}$ o $x - \frac{1}{x}$ para luego proceder a un cambio de variable y a partir de ello deducir las expresiones derivadas tales como: $x^2 + 1/x^2$; $x^3 + 1/x^3$; $x^4 + 1/x^4$, etc.
- Escrita la expresión en función del cambio de variable, esta se factorizará por los criterios antes estudiados. Es necesario tener en cuenta las siguientes relaciones:

$$\text{Si: } x + \frac{1}{x} = m \quad \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} = m^3 - 3m \\ x^4 + \frac{1}{x^4} = m^4 - 4m^2 + 2 \end{cases}$$

$$\text{Si: } x - \frac{1}{x} = m \quad \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 + 2 \\ x^3 + \frac{1}{x^3} = m^3 + 3m \\ x^4 + \frac{1}{x^4} = m^4 - 4m^2 + 2 \end{cases}$$

Cuando el polinomio es de grado impar:

- Tiene la propiedad de anularse para $x = 1$ o $x = -1$ implica entonces que aceptaran como uno de sus factores a $(x - 1)$ o $(x + 1)$.
- Por Ruffini se deduce el otro factor que también será recíproco y de grado par, que se factorizará utilizando los pasos del caso A.

Ejemplos:

- Factorizar: $M(x) = 8x^4 - 2x^3 + 13x^2 - 2x + 8$

Resolución:

Extrayendo x^2 :

$$M(x) = x^2 \left[8x^2 - 2x + 13 - \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} \right]$$

$$M(x) = x^2 \left[-2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 8 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 13 \right]$$

$$\text{Haciendo: } x + \frac{1}{x} = m; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2$$

$$M(x) = x^2 [-2m + 8(m^2 - 2) + 13]$$

$$M(x) = x^2 [8m^2 - 2m - 3]$$

$$\begin{array}{r} 4m \quad -3 \\ 2m \quad +1 \end{array}$$

$$M(x) = x^2 (4m - 3)(2m + 1)$$

Reponiendo x :

$$M(x) = x^2 \left[4 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 3 \right] \left[2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right]$$

$$M(x) = x^2 \left(\frac{4x^2 - 3x + 4}{x} \right) \left(\frac{2x^2 + x + 2}{x} \right)$$

$$M(x) = (4x^2 - 3x + 4)(2x^2 + x + 2)$$

- Factorizar:

$$R(x) = x^5 - 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1$$

Resolución:

Factorizando x^3 :

$$R(x) = x^3 \left[x^3 - 4x^2 + 3x - 8 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right]$$

$$R(x) = x^3 \left[3 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 4 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + x^3 + \frac{1}{x^3} - 8 \right]$$

Haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = t; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$$

$$R = x^3 [3t - 4(t^2 - 2) + t^3 - 3t - 8] = x^3 (t^3 - 4t^2)$$

$$R = x^3 t^2 (t - 4)$$

Reponiendo x :

$$R(x) = x^3 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \left(x + \frac{1}{x} - 4 \right)$$

$$R(x) = x^3 \left[\frac{(x^2 + 1)^2}{x^2} \right] \left[\frac{(x^2 - 4x + 1)}{x} \right]$$

$$\therefore R(x) = (x^2 + 1)^2 (x^2 - 4x + 1)$$

- Factorizar: $P(x) = 3x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 5x + 3$

Resolución:

Para $x = -1$, se anula, entonces tendrá un factor $(x + 1)$.

Luego por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -1 & 3 & 5 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ & & -3 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ \hline & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x + 1)(3x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 3)$$

$$\begin{array}{r} 3x^2 \quad \uparrow \quad \boxed{+5x} \quad \uparrow \quad 3 \\ x^2 \quad \times \quad \quad \quad \times \quad 1 \end{array}$$

Se tiene: $6x^2$
Se debe tener: $x^2 \uparrow (-)$

Se necesita: $-5x^2$

$$\therefore P(x) = (x + 1)(3x^2 + 5x + 3)(x^2 - x + 1)$$

- Factorizar:

$$F(x) = x^7 + 8x^6 + 17x^5 + 9x^4 + 9x^3 + 17x^2 + 8x + 1$$

Resolución:

Para $x = -1$, se anula, entonces tendrá un factor $(x + 1)$.

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} -1 & 1 & 8 & 17 & 9 & 9 & 17 & 8 & 1 \\ & & -1 & -7 & -10 & 1 & -10 & -7 & -1 \\ \hline & 1 & 7 & 10 & -1 & 10 & 7 & 1 & 0 \end{array}$$

$$F(x) = (x + 1) \underbrace{(x^6 + 7x^5 + 10x^4 - x^3 + 10x^2 + 7x + 1)}_{(\alpha)} \dots (l)$$

$$\alpha = x^3 \left[x^3 + 7x^2 + 10x - 1 + \frac{10}{x} + \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right]$$

$$\alpha = x^3 \left[\left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right) + 7 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 10 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 1 \right]$$

Haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = a; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 - 3a$$

$$\alpha = x^3 [a^3 - 3a + 7(a^2 - 2) + 10a - 1]$$

$$\alpha = x^3 (a^3 + 7a^2 + 7a - 15)$$

Por Ruffini:

1	1	7	7	-15
1		1	8	15
1	8	15		0

$$\alpha = x^3 (a - 1)(a^2 + 8a + 15)$$

$$\alpha = x^3 (a - 1)(a + 3)(a + 5)$$

Reponiendo x:

$$\alpha = x^3 \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 3 \right) \left(x + \frac{1}{x} + 5 \right)$$

$$\alpha = x^3 \left(\frac{x^2 - x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 3x + 1}{x} \right) \left(\frac{x^2 + 5x + 1}{x} \right)$$

En (I):

$$F(x) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

◀ MÉTODO DE LOS ARTIFICIOS

Cambio de variable

Mediante transformaciones u operaciones adecuadas se pueden lograr expresiones iguales para luego proceder a un cambio de variable o factorizar la expresión por los métodos ya estudiados.

Ejemplos:

1. Factorizar: $F(x) = (x - 2)(x + 3)(x + 2)(x - 1) + 3$

Resolución:

Agrupando y efectuando en la forma indicada:

$$F(x) = (x^2 + x - 6)(x^2 + x - 2) + 3$$

$$\text{Haciendo: } x^2 + x = a$$

$$F(a) = (a - 6)(a - 2) + 3$$

$$F(a) = (a^2 - 8a + 15) = (a - 3)(a - 5)$$

$$\text{Reponiendo x: } F(x) = (x^2 + x - 3)(x^2 + x - 5)$$

2. Factorizar: $M(x) = 1 + x(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

Resolución:

La expresión puede escribirse como:

$$M(x) = 1 + (x + 0)(x + 1)(x + 2)(x + 3)$$

$$M(x) = 1 + (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)$$

$$\text{Haciendo: } x^2 + 3x = m$$

$$M(m) = 1 + m(m + 2) = m^2 + 2m + 1 = (m + 1)^2$$

$$\text{Reponiendo x: } M(x) = (x^2 + 3x + 1)^2$$

3. Factorizar:

$$F(x) = (x^2 + x)(x^2 + 5x + 6) + (x^2 + 3x + 1)^2 + 1$$

Resolución:

Expresando en su forma de factores al primer sumando:

$$F(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + (x^2 + 3x + 1)^2 + 1$$

Agrupando y efectuando en la forma indicada:

$$F(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 3x + 1)^2 + 1$$

$$\text{Haciendo: } x^2 + 3x = t$$

$$F(t) = t(t + 2) + (t + 1)^2 + 1 = 2t^2 + 4t + 2$$

$$F(t) = t(t + 2) + (t + 1)^2 + 1 = 2(t^2 + 2t + 1)$$

$$F(t) = t(t + 2) + (t + 1)^2 + 1 = 2(t + 1)^2$$

$$\text{Reponiendo x: } F(x) = 2(x^2 + 3x + 1)^2$$

4. Factorizar:

$$F(m; n) = (m + n + 1)^4 - 5(m + n)^2 - 10(m + n) - 1$$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } m + n + 1 = p$$

$$F(p) = p^4 - 5(p - 1)^2 - 10(p - 1) - 1$$

$$F(p) = p^4 - 5p^2 + 10p - 5 - 10p + 10 - 1$$

$$F(p) = p^4 - 5p^2 + 4 = (p^2 - 1)(p^2 - 4)$$

$$F(p) = (p + 1)(p - 1)(p + 2)(p - 2)$$

Reponiendo las variables m y n:

$$F(m; n) = (m + n + 1 + 1)(m + n + 1 - 1)$$

$$(m + n + 1 + 2)(m + n + 1 - 2)$$

$$F(m; n) = (m + n + 2)(m + n)(m + n + 3)(m + n - 1)$$

Quita y pon o reducción a diferencia de cuadrados

Consiste en sumar y restar una misma expresión en forma conveniente de modo tal que al hacer agrupaciones, el objetivo, sea llegar a una diferencia de cuadrados.

Ejemplos:

1. Factorizar: $F(x) = 36x^4 + 15x^2 + 4$

Resolución:

Utilizando el criterio del trinomio cuadrado perfecto:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 \sqrt{} & & \sqrt{} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 2(6x^2) & \overline{(x)} & (2) = 24x^2
 \end{array}
 \end{array}$$

Quitando y poniendo $9x^2$:

$$F(x) = 36x^4 + 15x^2 + 4 + 9x^2 - 9x^2$$

$$F(x) = 36x^4 + 24x^2 + 4 - 9x^2$$

$$F(x) = (6x^2 + 2)^2 - 9x^2 = (6x^2 + 2)^2 - (3x)^2$$

$$\therefore F(x) = (6x^2 + 3x + 2)(6x^2 - 3x + 2)$$

2. Factorizar: $F(m; n; p) = m^4n^4 + 64p^4$

Resolución:

Utilizando el criterio del trinomio cuadrado perfecto para detectar la expresión que falta: quitando y poniendo $16m^2n^2p^2$:

$$\begin{aligned} F(m; n; p) &= m^4n^4 + 64p^4 + 16m^2n^2p^2 - 16m^2n^2p^2 \\ F(m; n; p) &= (m^2n^2 + 8p^2)^2 - (4mnp)^2 \\ F(m; n; p) &= (m^2n^2 + 4mnp + 8p^2)(m^2n^2 - 4mnp + 8p^2) \end{aligned}$$

3. Factorizar: $P(x; y) = 49x^4 + 25y^4 - 11x^2y^2$

Resolución:

Ordenando la expresión:

$$P(x; y) = 49x^4 - 11x^2y^2 + 25y^4$$

Deduciendo la expresión que falta:

$$\begin{array}{ccc} 49x^4 & - & 11x^2y^2 + 25y^4 \\ \sqrt{} \downarrow & & \downarrow \sqrt{} \\ 2(7x^2) & \overline{()} & (5y^2) = 70x^2y^2 \end{array}$$

Sumando y restando $70x^2y^2$

$$P(x; y) = 49x^4 - 11x^2y^2 + 25y^4 + 70x^2y^2 - 70x^2y^2$$

Reduciendo y agrupando en la forma indicada:

$$P(x; y) = 49x^4 + 70x^2y^2 + 25y^4 - 81x^2y^2$$

TCP

$$P(x; y) = (7x^2 + 5y^2)^2 - (9xy)^2$$

Luego, por diferencia de cuadrados:

$$P(x; y) = (7x^2 + 5y^2 + 9xy)(7x^2 + 5y^2 - 9xy)$$

$$\therefore P(x; y) = (7x^2 - 9xy + 5y^2)(7x^2 + 9xy + 5y^2)$$

Suma y restas especiales

Consiste en sumar y restar una expresión en forma conveniente de modo tal que se obtenga por lo general $(x^2 + x + 1)$ o $(x^2 - x + 1)$, ambos componentes de una diferencia o suma de cubos; en otros casos se puede buscar otro tipo de expresiones que conduzcan a la factorización del polinomio.

Ejemplos:

1. Factorizar: $F(x) = x^5 + x + 1$

Resolución:

Sumando y restando x^2

$$F(x) = x^5 + \underbrace{x + 1 + x^2 - x^2}$$

$$F(x) = x^2(\underbrace{x^3 - 1}) + (x^2 + x + 1)$$

$$F(x) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$F(x) = (x^2 + x + 1)[x^2(x - 1) + 1]$$

$$\therefore F(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

Otra forma: completando el polinomio para ello sumamos y restamos $x^4 + x^3 + x^2$:

$$F(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - x^4 - x^3 - x^2$$

$$F(x) = x^3(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1)$$

$$F(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$$

2. Factorizar: $F(x) = x^5 + x - 1$

Resolución:

Sumando y restando x^2 :

$$F(x) = x^5 + x - 1 - x^2 + x^2 =$$

$$F(x) = x^2 \underbrace{(x^3 + 1)} - (x^2 - x + 1)$$

$$F(x) = x^2(x + 1)(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1)$$

$$F(x) = (x^2 - x + 1)[x^2(x + 1) - 1]$$

$$\therefore F(x) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$$

Otra forma: completando el polinomio sumando y restando $x^4 + x^3 + x^2$

$$x^5 + x - 1 + x^4 + x^3 + x^2 - x^4 - x^3 - x^2$$

Ordenando convenientemente y factorizando:

$$F(x) = \underbrace{x^5 - x^4 + x^3 + x^4 + x^2 - x^3 + x - 1 - x^2}$$

$$F(x) = x^3(x^2 - x + 1) + x^2(x^2 - x + 1) - (x^2 - x + 1)$$

$$F(x) = (x^2 - x + 1)(x^3 + x^2 - 1)$$

3. Factorizar: $P(x) = x^{10} + x^8 + 1$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } x^2 = y \Rightarrow P(y) = y^5 + y^4 + 1$$

Sumando y restando y^2 , luego agrupando:

$$P(y) = y^5 + y^4 + 1 + y^2 - y^2 = y^2(y^3 - 1) + \underbrace{(y^4 + y^2 + 1)}$$

Argand

$$P(y) = y^2(y - 1)(y^2 + y + 1) + (y^2 + y + 1)(y^2 - y + 1)$$

$$P(y) = (y^2 + y + 1)(y^3 - y + 1)$$

Reponiendo x :

$$P(x) = \underbrace{(x^4 + x^2 + 1)}(x^6 - x^2 + 1)$$

$$\therefore P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^2 + 1)$$

Otra forma: completando con x^6, x^4, x^2

$$P(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 - x^6 - x^4 - x^2$$

$$P(x) = x^6(x^4 + x^2 + 1) + (x^4 + x^2 + 1) - x^2(x^4 + x^2 + 1)$$

$$P(x) = (x^4 + x^2 + 1)(x^6 - x^2 + 1)$$

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^6 - x^2 + 1)$$

◀ FACTORIZACIÓN SIMÉTRICA Y ALTERNADA

Polinomio simétrico

Es aquel que se caracteriza porque al intercambiar cualquier par de variables entre sí no cambia de valor.

Por ejemplo:

$$x^3 + y^3 + z^3 - 8xyz$$

Si: $x = y$

$$\begin{array}{c} x \\ \circlearrowleft \\ y \end{array}$$

$$y^3 + x^3 + z^3 - 8yxz$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 8xyz$$

Polinomio alternado

Es aquel que se caracteriza porque al intercambiar cualquier par de sus variables entre sí solo se altera su signo.

Por ejemplo:

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$$

Si: $a = b$ 

$$\begin{aligned} & b^2(a-c) + a^2(c-b) + c^2(b-a) \\ & -b^2(c-a) - a^2(b-c) - c^2(a-b) \\ & -\{b^2(a-c) + a^2(b-c) + c^2(a-b)\} \end{aligned}$$

∴ El polinomio es alternado.

Propiedades:

1. La suma, el producto y el cociente de dos expresiones simétricas cualesquiera debe ser simétrica.
2. El producto de un polinomio simétrico con un polinomio alternado da otro polinomio alternado.
3. Si un polinomio simétrico se anula para una de sus variables, también se anulará para todas las demás variables.
4. Si un polinomio simétrico se anula para una variable igual a otra o su negativo entonces se anula para todas las combinaciones entre ellas.

Si el polinomio simétrico tiene 3 variables y se anula para $x = z$, entonces un factor del polinomio será $(x - z)$ y los otros serán según se indica en el gráfico siguiente:



$$(z - y) ; (y - x)$$

5. Las propiedades de los polinomios simétricos son válidos también para los polinomios alternados.

Pasos a seguir

1. Se deduce si el polinomio es simétrico o alternado.
2. Se busca factores monomios haciendo cualquier variable igual a cero.
3. Se buscan los factores binomios haciendo una variable igual a otra o a su negativo.
4. Se hace la equivalencia del polinomio y se utiliza los principios de las identidades.

Ejemplos:

1. Factorizar: $E(a; b; c) = (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$

Resolución:

Si se intercambian "a" con "b" en el polinomio:

$$E'(a; b; c) = (b-a)^3 + (a-c)^3 + (c-b)^3 = -E$$

El polinomio solo cambia de signo, por lo tanto, es alternado.

Buscando monomios para ello hacemos: $a = 0$

$$-b^3 + (b-c)^3 + c^3 \neq 0$$

Para buscar factores binómicos hacemos: $a = b$

Luego:

$$(a-a)^3 + (a-c)^3 + (c-a)^3 = (a-c)^3 - (a-c)^3 = 0$$

Lo que implica que $(a-b)$ es un factor del polinomio.

Los otros serán: $(b-c), (c-a)$

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 \equiv k(a-b)(b-c)(c-a)$$

Para $a = 1 \wedge b = 2 \wedge c = 3$ tenemos:

$$-1 - 1 + 8 = k(-1)(-1)(2) \rightarrow k = 3$$

$$\therefore E(a; b; c) = 3(a-b)(b-c)(c-a)$$

2. Factorizar:

$$M(a; b; c) = (ab + bc + ac)^3 - a^3b^3 - a^3c^3 - b^3c^3$$

Resolución:

Haciendo: $ab = x; bc = y; ac = z$

Reemplazando en la expresión:

$$M = (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$$

Intercambiando x con z :

$$M = (z + y + x)^3 - z^3 - y^3 - x^3$$

El polinomio no se altera, entonces será simétrico.

Hacemos:

$$x = 0 \Rightarrow M = (y + z)^3 - y^3 - z^3 \neq 0$$

Hacemos:

$$x = -y \Rightarrow M = (-y + y + z)^3 + y^3 - y^3 - z^3 = 0$$

Un factor será: $(x + y)$



Los otros serán: $(y + z), (z + x)$

$$(x + y + z)^3 - y^3 - x^3 - z^3 \equiv R(x + y)(y + z)(z + x)$$

Para: $x = 1 \wedge y = 1 \wedge z = 0$, tendremos:

$$8 - 1 - 1 = R(2)(1)(1) \Rightarrow R = 3$$

$$\text{Luego: } M = 3(x + y)(y + z)(z + x)$$

$$\text{Reemplazando: } M = 3(ab + bc)(bc + ac)(ac + ab)$$

$$\therefore M = 3abc(a + c)(b + a)(c + b)$$

Luego:

$$P(x) = x^2 + (b + c + 2d)x + (d + b)(d + c)$$

$$\begin{array}{ccc} x & & d + b \\ & \nearrow & \searrow \\ & x & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ x & & d + c \end{array}$$

$$P(x) = (x + d + b)(x + d + c)$$

∴ Un factor primo es: $x + b + d$

7. Si P es un polinomio factorizable definido por:

$$P(x; y; z) = x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz$$

hallar uno de los factores.

Resolución:

$$P = x^2 + x - y^2 + y - z^2 - z + 2yz$$

$$P = x^2 + x + y - z - (y^2 + z^2 - 2yz)$$

$$P = x(x + 1) + (y - z) - (y - z)^2$$

$$\begin{array}{ccc} x & & (y - z) \\ & \nearrow & \searrow \\ & x + 1 & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & & -(y - z) \end{array}$$

$$\Rightarrow P = (x + y - z)(x + 1 - y + z)$$

∴ Uno de los factores de P es: $x - y + z + 1$

8. Si H es un polinomio factorizable definido por:

$$H(x; y; z; w) =$$

$$(x + y + z)(x + y + w)(x + z + w)(y + z + w) - xyzw$$

hallar un factor primo.

Resolución:

$$H = (x + y + z)(x + y + w)(x + z + w)(y + z + w) - xyzw$$

Sea: $x + y + z + w = a$, entonces:

$$H = (a - w)(a - z)(a - y)(a - x) - xyzw$$

$$H = a^4 - (x + y + z + w)a^3 + (xy + xz + xw + yz + yw + zw)a^2 + (xyz + xyw + xzw + yzw)a - xyzw$$

$$\Rightarrow H = \underbrace{(xy + xz + xw + yz + yw + zw)}_M a^2 + \underbrace{(xyz + xyw + xzw + yzw)}_N a$$

$$\rightarrow H = a[(M)a + (N)]$$

$$H = (x + y + z + w)[(M)(x + y + z + w) + (N)]$$

∴ Un factor primo de H es: $x + y + z + w$

9. Si E es un polinomio factorizable definido por:

$$E(x) = x^6 + 4x^4 + 3x^2 - 2x - 1$$

hallar la suma de coeficientes de un factor.

Resolución:

Aplicamos aspa doble, introduzcamos $0x^3$:

$$E(x) = x^6 + 4x^4 + 3x^2 + 0x^3 - 2x - 1$$

$$\begin{array}{ccc} x^3 & & 1 \\ & \nearrow & \searrow \\ & x^3 & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow E(x) = (x^3 + 3x + 1)(x^3 + x - 1)$$

∴ Σ coeficientes de $x^2 + 3x + 1 = 5$

10. Si P es un polinomio factorizable definido por:

$$P(x; y) = x^{10} - y^8 x^2 + x^9 y - xy^9 + x^8 y^2 - y^{10}$$

hallar uno de sus factores primos.

Resolución:

$$P(x; y) = x^{10} - y^8 x^2 + x^9 y - xy^9 + x^8 y^2 - y^{10}$$

$$P(x; y) = x^2(x^8 - y^8) + xy(x^8 - y^8) + y^2(x^8 - y^8)$$

$$P(x; y) = (x^8 - y^8)(x^2 + xy + y^2)$$

$$P(x; y) = (x^4 + y^4)(x^4 - y^4)(x^2 + xy + y^2)$$

$$P(x; y) = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)(x^2 + xy + y^2)$$

$$P(x; y) = (x^4 + y^4)(x^2 + y^2)(x + y)(x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

∴ Un factor primo de P es: $x^2 + xy + y^2$

11. Si Q es un polinomio factorizable definido por:

$$Q(x; y) = 2x^2 + 1 - (4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4)$$

determinar un factor primo de Q.

Resolución:

$$Q = 2x^2 + 1 - (4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4)$$

$$Q = x^4 + 2x^2 + 1 - (x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4xy^3 + y^4)$$

$$Q = (x^2 + 1)^2 - (x + y)^4$$

$$Q = [x^2 + 1 + (x + y)^2][x^2 + 1 - (x + y)^2]$$

$$Q = (2x^2 + 2xy + y^2 + 1)(-2xy - y^2 + 1)$$

∴ Un factor primo es: $1 - 2xy - y^2$

12. Si $P(x; y; z) = 5(x^2 + y^2 - z^2) + 10xy + 2(x + y + z)^2 + 2(x + y - z)^2$

es un polinomio factorizable, hallar un factor primo.

Resolución

$$P = 5(x^2 + y^2 - z^2) + 10xy + 2(x + y + z)^2 + 2(x + y - z)^2$$

$$P = 5(x^2 + y^2 + 2xy - z^2) + 2(x + y + z)^2 + 2(x + y - z)^2$$

$$P = 5[(x + y)^2 - z^2] + 2(x + y + z)^2 + 2(x + y - z)^2$$

$$= 2(x + y + z)^2 + 5(x + y + z)(x + y - z) + 2(x + y - z)^2$$

$$\begin{array}{ccc} 2(x + y + z) & & (x + y - z) \\ & \nearrow & \searrow \\ & (x + y + z) & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & & 2(x + y - z) \end{array}$$

$$P = (2x + 2y + 2z + x + y - z)(x + y + z + 2x + 2y - 2z)$$

$$P = (3x + 3y + z)(3x + 3y - z)$$

∴ Un factor primo es: $3x + 3y - z$

13. Determinar el término independiente de uno de los factores primos del polinomio P si:

$$P(x) = (x + 1)(x - 3)(x + 4)(x - 6) + 38$$

Resolución:

$$P(x) = (x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 24) + 38$$

$$\text{Haciendo: } x^2 - 2x - 3 = a$$

$$\Rightarrow P(a) = a(a - 21) + 38 = a^2 - 21a + 38$$

$$\begin{array}{ccc} a & & -19 \\ & \nearrow & \searrow \\ & a & \\ & \nwarrow & \nearrow \\ & & -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(a) = (a - 19)(a - 2)$$

$$P(x) = (x^2 - 2x - 3 - 19)(x^2 - 2x - 3 - 2)$$

$$P(x) = (x^2 - 2x - 22)(x^2 - 2x - 5)$$

∴ El TI en un factor primo es -5 .

14. Si P es un polinomio factorizable definido por:

$$P(x; y) = 4(x^2 + y - 1)^3 - (x^2 - 1)(2x^2 + 3y - 2)^2$$

Señalar un factor primo.

Resolución:

$$P(x; y) = 4(x^2 + y - 1)^3 - (x^2 - 1)(2x^2 + 3y - 2)^2$$

$$P(x; y) = 4(x^2 - 1 + y)^3 - (x^2 - 1)[2(x^2 - 1) + 3y]^2$$

Sea $x^2 - 1 = a$, reemplazando

$$P = 4(a + y)^3 - a(2a + 3y)^2$$

$$P = 4a^3 + 12a^2y + 12ay^2 + 4y^3 - 4a^3 - 12a^2y - 9ay^2$$

$$\Rightarrow P = 3ay^2 + 4y^3 = y^2(3a + 4y)$$

Reponiendo "a":

$$P(x, y) = y^2(3x^2 - 3 + 4y)$$

∴ Un factor primo de P es: $3x^2 - 3 + 4y$

15. Dar el número de factores primos de la siguiente expresión:

$$P(x) = (x - a)^3(b - c)^3 + (x - b)^3(c - a)^3 + (x - c)^3(a - b)^3$$

Resolución:

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$m = (x - a)(b - c); n = (x - b)(c - a); p = (x - c)(a - b)$$

$$m = bx - cx - ab + ac; n = cx - ax - bc + ab$$

$$p = ax - bx - ac + bc$$

Sumando:

$$m + n + p = bx - cx - ab + ac + cx - ax - bc + ab + ax - bx - ac + bc$$

$$m + n + p = 0; \text{ por identidad se cumple:}$$

$$m^3 + n^3 + p^3 = 3mnp$$

$$P(x) = 3 \underbrace{(x - a)}_{1.^\circ} \underbrace{(b - c)}_{2.^\circ} \underbrace{(c - a)}_{3.^\circ} \underbrace{(x - c)}_{4.^\circ} \underbrace{(a - b)}_{5.^\circ}$$

Deben estar en función "x"

∴ El N.º de factores primos es 3.

16. Factoriza e indicar un factor.

$$M(x, y, z) = x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$$

Resolución:

Efectuando operaciones con los últimos sumandos:

$$M(x, y, z) = x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + xyz(xyz - 1)$$

$$M(x, y, z) = x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) + z^3(y - x^2) + \underbrace{z^3y - z^3x^2 + x^2y^2z^2 - xyz}_{0}$$

Agrupando en la forma indicada:

$$M(x, y, z) = x^3(z - y^2) + y^3(x - z^2) - yz(x - z^2) - x^2z^2(z - y^2)$$

$$M(x, y, z) = x^2(z - y^2)(x - z^2) - y(x - z^2)(z - y^2)$$

Extrayendo factor común:

$$M(x, y, z) = (z - y^2)(x - z^2)(x^2 - y)$$

∴ Un factor será: $x - z^2$.

17. Factorizar: $M(x, y) = x^6 + 3y^2 - 4x^3y + 2x^3 - 4y + 1$ e indicar un factor:

Resolución:

Ordenando el polinomio para aplicar un aspa doble:

$$M(x, y) = x^6 - 4x^3y + 3y^2 + 2x^3 - 4y + 1$$

$$\begin{array}{ccc} x^3 & \nearrow & 3y \\ x^3 & \searrow & -y \end{array}$$

$$\Rightarrow M(x, y) = (x^3 - 3y + 1)(x^3 - y + 1)$$

∴ Un factor es: $(x^3 - 3y + 1)$

18. Indicar uno de los factores primos de la siguiente expresión:

$$H(x) = 13(x + 1)^3(x - 1) - 4x^2 - (x - 1)^3(x + 1) + 4$$

Resolución:

Agrupando en la forma indicada:

$$H(x) = 13(x + 1)^3(x - 1) - 4x^2 - (x - 1)^3(x + 1) + 4$$

$$H(x) = 13(x + 1)^3(x - 1) - (x - 1)^3 - 4(x^2 - 1)$$

$$H(x) = 13(x + 1)^3(x - 1) - (x - 1)^3(x + 1) - 4(x + 1)(x - 1)$$

Extrayendo el factor común $(x + 1)(x - 1)$:

$$H(x) = (x + 1)(x - 1)[13(x + 1)^2 - (x - 1)^2 - 4]$$

Reduciendo dentro del corchete:

$$H(x) = (x + 1)(x - 1)4(3x^2 + 7x + 2)$$

$$\begin{array}{ccc} 3x & \nearrow & 1 \\ x & \searrow & 2 \end{array}$$

$$\therefore H(x) = 4(x + 1)(x - 1)(3x + 1)(x + 2)$$

19. Indicar el número de factores primos en:

$$P(a, b, c) = (a + b)^7 + c^3(a + b)^4 - c^4(a + b)^3 - c^7$$

Resolución:

Agrupando en la forma indicada:

$$P(a, b, c) = (a + b)^7 + c^3(a + b)^4 - c^4(a + b)^3 - c^7$$

$$P(a, b, c) = (a + b)^4[(a + b)^3 + c^3] - c^4[(a + b)^3 + c^3]$$

Extrayendo el factor común:

$$P(a, b, c) = [(a + b)^3 + c^3][(a + b)^4 - c^4]$$

Desarrollando:

$$P(a, b, c) = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab)(a + b + c)(a + b - c)$$

$$P(a, b, c) = \underbrace{(a + b + c)^2}_{1.^\circ} \underbrace{(a + b - c)^2}_{2.^\circ} \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab)}_{3.^\circ} \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - ac - bc)}_{4.^\circ}$$

∴ Número de factores primos: 4

20. Determinar el número de factores primos para el polinomio P.

$$P(x) = x^5 + x^3 - x^2 + x + 2$$

Resolución:

$$x^5 + x + 1 = x^5 + x + 1 + x^2 - x^2$$

$$P(x) = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 1)$$

$$P(x) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) + (x^3 - x^2 + 1)$$

$$P(x) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1) + (x^3 - x^2 + 1)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$$

∴ P tiene 2 factores primos.

21. Si P es un polinomio factorizable definido por:

$$P(x, y, z, w) = 2(x + y)^2 + (x + y)(z + w) + z(w - z), \text{ hallar un factor primo.}$$

Resolución:

$$P = 2(x + y)^2 + (z + w)(x + y) + z(w - z)$$

$$\begin{array}{ccc} 2(x + y) & \nearrow & w - z \\ (x + y) & \searrow & z \end{array}$$

$$2(x+y)z + (x+y)(w-z) = (z+w)(x+y)$$

$$\Rightarrow P(x; y; z; w) = (2x + 2y + w - z)(x + y + z)$$

∴ Un factor primo es: $x + y + z$

22. ¿Cuántos factores primos lineales tiene el polinomio P, si: $P(x) = (x+2)^4 + (x+5)^2 - 6(x+2) - 8$

Resolución:

$$P(x) = (x+2)^4 + (x+5)^2 - 6(x+2) - 8$$

$$\text{Haciendo: } x+2 = a$$

$$P(a) = a^4 + (a+3)^2 - 6a - 8$$

$$P(a) = a^4 + a^2 + 1 = (a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$$

$$\Rightarrow P(x) = [(x+2)^2 + x + 2 + 1][(x+2)^2 - (x+2) + 1]$$

$$P(x) = (x^2 + 5x + 7)(x^2 + 3x + 3)$$

∴ P no tiene factores primos lineales.

23. Hallar la suma de los factores primos del polinomio: $P(x) = (2x^2 - 9x + 1)^2 + 24(2x - 1)(x - 1)x$

Resolución:

$$P(x) = (2x^2 - 9x + 1)^2 + 24(2x - 1)(x - 1)x$$

$$P(x) = (2x^2 - 9x + 1)^2 + 24(2x^2 - 3x + 1)x$$

$$P(x) = (2x^2 - 3x + 1 - 6x)^2 + 4(2x^2 - 3x + 1)(6x)$$

$$\text{Como: } (a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$$

$$\Rightarrow P(x) = (2x^2 - 3x + 1 + 6x)^2$$

$$P(x) = (2x^2 + 3x + 1)^2 = (2x + 1)^2(x + 1)^2$$

$$\text{Factores primos: } 2x + 1 \wedge x + 1$$

∴ La suma de factores primos es: $3x + 2$

24. Obtener la suma de los factores primos del polinomio P, definido por: $P(x) = x^2(a^2 + b^2x) + ab(x^5 + 1)$

Resolución:

$$P(x) = x^2(a^2 + b^2x) + ab(x^5 + 1)$$

$$P(x) = a^2x^2 + b^2x^3 + abx^5 + ab$$

$$P(x) = bx^3(ax^2 + b) + a(ax^2 + b)$$

$$P(x) = (ax^2 + b)(bx^3 + a)$$

∴ Suma de factores primos: $bx^3 + ax^2 + a + b$

25. Calcule el número máximo de factores algebraicos en: $F(a; b) = [a^{24} + b^{24} + (a^6 + b^6)^4]^4$

Resolución:

$$F(a; b) = [a^{24} + b^{24} + (a^6 + b^6)^4]^4$$

$$\text{Efectuando dos cambios: } a^6 = x \wedge b^6 = y$$

$$F(x; y) = [x^4 + y^4 + (x + y)^4]^4$$

$$F(x; y) = [x^4 + y^4 + (x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4)]^4$$

Reduciendo:

$$F(x; y) = [2x^4 + 2y^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3]^4$$

$$F(x; y) = [2(x^4 + y^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3)]^4$$

Agrupando en el corchete para aplicar un aspa doble especial:

$$F(x; y) = 16(x^4 + 2x^3y + 3x^2y^2 + 2xy^3 + y^4)^4$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \nearrow & y^2 \\ & +xy & \\ x^2 & \searrow & y^2 \\ & +xy & \end{array} = \begin{array}{cc} x^2y^2 & \\ & x^2y^2 \\ & 2x^2y^2 \end{array}$$

Balanco:

$$\text{SDT: } 3x^2y^2$$

$$\text{ST: } 2x^2y^2 \quad (-) \downarrow$$

$$\text{Falta: } +x^2y^2$$

$$F(x; y) = 16[(x^2 + xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)]^4$$

$$F(x; y) = 16[(x^2 + xy + y^2)^4]^4$$

$$\Rightarrow F(x; y) = 16(x^2 + xy + y^2)^8$$

Sustituyendo sus variables originales:

$$F(a; b) = 16(a^{12} + a^6b^6 + b^{12})^8$$

Por identidad trinómica:

$$F(a; b) = 16(a^6 + a^3b^3 + b^6)^8(a^6 - a^3b^3 + b^6)^8$$

∴ Número máximo de factores algebraicos:

$$(8+1)(8+1) = 81$$

26. Factorizar el polinomio en $\mathbb{R}$.

$$P(a) = (a^3 - 2)^2 - a^2[(a - 2)^2 - 5(a + 1)^2(a - 1)^2]$$

señalar un factor.

Resolución:

$$P(a) = (a^3 - 2)^2 - a^2[(a - 2)^2 - 5(a + 1)^2(a - 1)^2]$$

$$P(a) = (a^3 - 2)^2 - a^2[(a - 2)^2 - 5(a^2 - 1)^2]$$

Efectuando en toda la expresión:

$$P(a) = a^6 - 4a^3 + 4 - a^2[a^2 - 4a + 4 - 5a^4 + 10a^2 - 5]$$

$$P(a) = a^6 - 4a^3 + 4 - a^4 + 4a^3 - 4a^2 + 5a^6 - 10a^4 + 5a^2$$

Reduciendo:

$$P(a) = 6a^6 - 11a^4 + a^2 + 4$$

$$\text{Haciendo: } a^2 = m \Rightarrow P(m) = 6m^3 - 11m^2 + m + 4$$

Evaluando para $m = 1$:

$$P(1) = 6(1)^3 - 11(1)^2 + (1) + 4$$

$$\Rightarrow P(1) = 0 \text{ (se anula)}$$

En consecuencia un factor es $(m - 1)$ y el otro factor lo hallaremos dividiendo por Ruffini, así:

$m - 1 = 0$	6	-11	+1	+4
$m = 1$	↓	6	-5	-4
	6	-5	-4	0

$$P(m) = (m - 1)(6m^2 - 5m - 4)$$

$$\begin{array}{ccc} 3m & \nearrow & -4 \\ 2m & \searrow & +1 \end{array}$$

$$\Rightarrow P(m) = (m - 1)(3m - 4)(2m + 1)$$

Reponiendo la variable original:

$$P(a) = (a^2 - 1)(3a^2 - 4)(2a^2 + 1)$$

$$P(a) = (a - 1)(a + 1)(\sqrt{3}a + 2)(\sqrt{3}a - 2)(2a^2 + 1)$$

∴ Un factor es: $a + 1$

27. Factorizar:

$$F(x; y; z) = z^3x^2 - y^3x^2 + 2xz^2 - xyz + 2y^2x + z - y$$

Resolución:

Agrupamos los sumandos y extraemos factor común de cada grupo:

$$F(x; y; z) = (z^3x^2 - y^3x^2) + (2xz^2 - xyz + 2y^2x) + z - y$$

$$F(x; y; z) = x^2(z^3 - y^3) + (2z^2 - yz + 2y^2)x + z - y$$

Resolviendo por productos notables y aplicando un aspa simple:

$$F(x; y; z) = x^2(z-y)(z^2+yz+y^2) + (2z^2-yz+2y^2)x + (z-y)$$

$$\begin{array}{rcl} x(z-y) & \xrightarrow{\quad} & 1 \\ x(z^2+yz+y^2) & \xrightarrow{\quad} & (z-y) \end{array}$$

$$F(x; y; z) = [x(z-y) + 1][x(z^2 + yz + y^2) + z - y]$$

Efectuando operaciones dentro de corchetes:

$$\therefore F(x; y; z) = (xz - xy + 1)(xz^2 + xy^2 + xyz + z - y)$$

28. Factorice:

$$F(x; y; z) = x(z-y)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 + 8xyz$$

Resolución:

Efectuando operaciones:

$$xz^2 - 2xyz + xy^2 + yz^2 - 2xyz + yx^2 + zx^2 - 2xyz + zy^2 + 8xyz$$

Agrupando convenientemente:

$$xz^2 + xy^2 + yz^2 + yx^2 + zx^2 + zy^2 + 2xyz$$

Extrayendo factor común:

$$x(z^2 + y^2 + 2yz) + y(z^2 + x^2 + 2zx) + z(x^2 + y^2 + 2xy)$$

$$x(y+z)^2 + yz(z+y) + x^2(y+z)$$

$$(y+z)[xy + xz + yz + x^2]$$

Agrupando convenientemente:

$$(y+z)[x(y+x) + z(x+y)]$$

$$(y+z)(x+y)(x+z)$$

$$F(x; y; z) = (x+y)(y+z)(z+x)$$

$\therefore$ Hay 3 factores primos: $(x+y)$, $(y+z)$, $(z+x)$

29. Factorice:

$$H(x; y; z) = 4x^4 + 12x^2y + 0y^2 - x^2z^2 - 27yz^2 - 18z^4$$

Resolución:

Por aspa doble:

$$4x^4 + 12x^2y + 0y^2 - x^2z^2 - 27yz^2 - 18z^4$$

$$\begin{array}{rcl} 4x^2 & \xrightarrow{\quad} & 0y \\ x^2 & \xrightarrow{\quad} & -9z^2 \\ & \xrightarrow{\quad} & 2z^2 \end{array}$$

$$H(x; y; z) = (4x^2 - 9z^2)(x^2 + 3y + 2z^2)$$

$$H(x; y; z) = (2x + 3z)(2x - 3z)(x^2 + 3y + 2z^2)$$

$\therefore$ Hay 3 factores primos; 2 lineales y 1 cuadrático.

30. El MCD de P y Q es $x^2 - x - 6$, donde:

$$P(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 + ax + b$$

$$Q(x) = 3x^4 - 7x^3 + mx + n$$

Halle: $an + bm$

Resolución:

Por definición: $P(x) \div (x^2 - x - 6)$ el resto es cero
Por Horner:

1	2	-3	1	a	b
1		2	12		
6			-1	-6	
				12	72
	2	-1	12	0	0

$$\text{Entonces: } a - 6 + 12 = 0 \Rightarrow a = -6$$

$$b + 72 = 0 \Rightarrow b = -72$$

También: $Q(x) \div (x^2 - x - 6)$ el residuo es cero

Por Horner:

1	3	-7	0	m	n
1		3	18		
6			-4	-24	
				14	84
	3	-4	14	0	0

$$m - 24 + 14 = 0 \Rightarrow m = 10$$

$$n + 84 = 0 \Rightarrow n = -84$$

$$\therefore \text{Piden: } an + bm = (-6)(-84) + (-72)(10) = -216$$

31. Factorice:

$$P(x; y; z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y$$

Resolución:

Agrupando convenientemente de 3 en 3:

$$P(x; y; z) = x^2(x + y + z) + y^2(y + x + z) + z^2(z + x + y)$$

Extrayendo factor común:

$$P(x; y; z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2)$$

32. Factorice: $P(x) = x^8 + 2x^6 + 13x^4 + 8x^2 + 36$

Resolución:

$$x^8 + 2x^6 + 13x^4 + 8x^2 + 36$$

$$\begin{array}{rcl} x^4 & \xrightarrow{\quad} & 2x^2 \\ x^4 & \xrightarrow{\quad} & 0 \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 2x^2 & \xrightarrow{\quad} & +9 \\ & \xrightarrow{\quad} & +4 \end{array}$$

$$13x^4 + 0x^4 = 13x^4$$

$$(x^4 + 2x^2 + 9)(x^4 + 4)$$

Completando términos para volver a intentar aspa doble especial:

$$x^4 + 0x^3 + 2x^2 + 0x + 9$$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & \xrightarrow{\quad} & 2x \\ x^2 & \xrightarrow{\quad} & -2x \end{array} \quad \begin{array}{rcl} & \xrightarrow{\quad} & +3 \\ & \xrightarrow{\quad} & +3 \end{array}$$

$$6x^2 - 4x^2 = 2x^2$$

$$x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 4$$

$$\begin{array}{rcl} x^2 & \xrightarrow{\quad} & 2x \\ x^2 & \xrightarrow{\quad} & -2x \end{array} \quad \begin{array}{rcl} & \xrightarrow{\quad} & +2 \\ & \xrightarrow{\quad} & +2 \end{array}$$

$$4x^2 - 4x^2 = 0x^2$$

$$\therefore P(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

33. Se sabe que el producto de multiplicar el MCD y MCM de dos polinomios es $(x^5 - x^3)$ y además la suma de dichos polinomios es $(x^3 + x^2 - 1)$. Halle el residuo de dividir el MCM de dichos polinomio entre $x + 2$.

Resolución:

Sean los polinomios $A(x)$ y $B(x)$

Por teorema $A(x) \times B(x) = \text{MCD} \times \text{MCM}$

$$\text{Datos: } \text{MCD} \times \text{MCM} = x^5 - x^3$$

$$\Rightarrow A(x) \times B(x) = x^5 - x^3 \quad \dots(I)$$

$$\text{Además: } A(x) + B(x) = x^3 + x^2 - 1 \quad \dots(II)$$

$$\text{De (I) y (II): } A(x) = x^3 \quad B(x) = x^2 - 1$$

Luego, el MCM = $x^3(x^2 - 1)$

Piden el resto: $\frac{x^3(x^2 - 1)}{x + 2}$

Por el teorema del resto: $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$$\therefore R(x) = (-2)^3[(-2)^2 - 1] = -24$$

34. Factorice: $A(x; y) = 8x^5 - 19x^3y^3 - 27y^6$

Resolución:

Por aspa simple: $\begin{array}{r} 8x^3 \quad -27y^3 \\ x^3 \quad \quad y^3 \end{array}$

$$A(x; y) = (8x^3 - 27y^3)(x^3 + y^3)$$

Por suma y diferencia de cubos:

$$A(x; y) = (2x - 3y)(4x^2 + 6xy + 9y^2)(x + y)(x^2 - xy + y^2)$$

35. Factorice: $P(x; y) = 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - 65y^3$

Resolución:

$$PC = \pm(1, 2, 5, 13, 65, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \dots)$$

y por Ruffini:

$\frac{5}{2}y$	8	$-12y$	$6y^2$	$-65y^3$	
	$\downarrow$	$20y$	$20y^2$	$+65y^3$	
2	8	$8y$	$26y^2$	0	
	$\downarrow$	$4y$	$13y^2$		
	4	$4y$	$13y^2$		

$$\therefore P(x; y) = (2x - 5y)(4x^2 + 4xy + 13y^2)$$

36. Al factorizar: $P(x) = (2x + 7c + d)(x + 3c) + cd - c^2$ indique la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

Resolución:

Efectuando se tiene:

$$P(x) = 2x^2 + x(13c + d) + 4c(5c + d)$$

$$\begin{array}{r} 2x \quad \quad (5c + d) \\ x \quad \quad \quad 4c \end{array}$$

$$P(x) = (2x + 5c + d)(x + 4c)$$

$\therefore$ Un factor primo es $(x + 4c)$; la suma de coeficientes es $(4c + 1)$.

37. Factorice: $P(x) = (x - a)(x - 3a)(x + 4a)(x + 6a) + 40a^4$

Resolución:

$$P(x) = (x^2 + 3ax - 4a^2)(x^2 + 3ax - 18a^2) + 40a^4$$

$$\text{Hacemos } x^2 + 3ax = z$$

$$\text{Luego: } (z - 4a^2)(z - 18a^2) + 40a^4$$

$$\text{Efectuando: } z^2 - 22a^2z + 112a^4$$

$$\begin{array}{r} z \quad \quad -14a^2 \\ z \quad \quad \quad -8a^2 \end{array}$$

Reemplazando:

$$\therefore P(x) = (x^2 + 3ax - 14a^2)(x^2 + 3ax - 8a^2)$$

38. Factorice: $P(x) = 9x^6 - 58x^4 + 57x^2 - 1$

Resolución:

Artificio: buscar diferencia de cuadrados

$$P(x) = 9x^6 - 42x^4 - 16x^4 + 49x^2 + 8x^2 - 1$$

Ordenando convenientemente

$$P(x) = 9x^6 - 42x^4 + 49x^2 - (16x^4 - 8x^2 + 1)$$

$$P(x) = (3x^3 - 7x)^2 - (4x^2 - 1)^2$$

Por diferencia de cuadrados

$$P(x) = (3x^3 - 7x + 4x^2 - 1)(3x^3 - 7x - 4x^2 + 1)$$

$$\therefore P(x) = (3x^3 + 4x^2 - 7x - 1)(3x^3 - 4x^2 - 7x + 1)$$

39. Si se cumple que: $a^3 + b^3 + c^3 = 0$

$$\text{simplificar: } \frac{3abc}{a(b-a) + b(c-b) + c(a-c)}; abc \neq 0$$

Resolución:

Piden:

$$\frac{3abc}{-(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}$$

$$= \frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}$$

$$= \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}{(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)}$$

$$\therefore a + b + c$$

40. Indicar el número de factores primos en:

$$(x^2 + 7x + 5)^2 + 3(x^2 + 1) + 21x + 2$$

Resolución:

$$\text{Agrupando: } (x^2 + 7x + 5)^2 + 3(x^2 + 7x + 5) - 10$$

$$\text{Sea: } x^2 + 7x + 5 = a$$

$$a^2 + 3a - 10 \text{ por aspa simple}$$

$$\begin{array}{r} a \quad \quad 5 \\ a \quad \quad \quad -2 \end{array}$$

$$(a + 5)(a - 2) \text{ reponiendo variable}$$

$$= (x^2 + 7x + 10)(x^2 + 7x + 3)$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad 5 \\ x \quad \quad \quad 2 \end{array}$$

$$(x + 5)(x + 2)(x^2 + 7x + 3)$$

$$\therefore \text{Tenemos 3 factores primos}$$

41. Luego de factorizar, indicar la suma de los coeficientes principales de los factores primos de:

$$P(x; y) = y^3x^4 + 1 - x^4 - y^4x^2 + y^3 - 2y^2x^2$$

Resolución:

Agrupando convenientemente y aplicando el criterio del aspa simple, se tiene:

$$P(x; y) = x^4(y^3 - 1) + x^2(-y^4 - 2y^2) + (y + 1)(y^2 - y + 1)$$

$$\begin{array}{r} x^2(y - 1) \quad \quad (y^2 - y + 1) \\ x^2(y^2 + y + 1) \quad \quad -(y + 1) \end{array}$$

$$P(x; y) = [x^2(y - 1) - (y^2 - y + 1)][x^2(y^2 + y + 1) - (y + 1)]$$

$\therefore$ La suma de los coeficientes principales de los factores primos es: $y^2 + y + 1 + y - 1 = y^2 + 2y$

42. Luego de factorizar: $P(x) = x^6 + 4x^4 + x^3 + 4x^2 + 2x$ indicar un factor primo binómico

Resolución:

Aplicando factor común se tiene:

$$P(x) = x[x^5 + 4x^3 + x^2 + 4x + 2]$$

Agrupando convenientemente:

$$P(x) = x[x(x^4 + 4x^2 + 4) + (x^2 + 2)]$$

$$P(x) = x[x(x^2 + 2)^2 + (x^2 + 2)]$$

Aplicando factor común:

$$P(x) = x(x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)$$

∴ Un factor primo binómico es: $x^2 + 2$

43. Luego de factorizar, indicar el número de factores primos lineales de:

$$F(a; b; c) = (a - b)(a + b)^2 + (b - c)(b + c)^2 + (c - a)(c + a)^2$$

Resolución:

Si: $a = b$ resulta

$$F(a; b; c) = (b - c)(b + c)^2 + (c - b)(c + b)^2 = 0$$

Si: $b = c$ resulta

$$F(a; b; c) = (a - c)(a + c)^2 + (c - a)(c + a)^2 = 0$$

Si: $a = c$ resulta

$$F(a; b; c) = (c - b)(c + b)^2 + (b + c)^2(b - c) = 0$$

$$F(a; b; c) = (a - b)(b - c)(a - c) \underline{M}$$

es una constante

∴ Existen 3 factores primos lineales.

44. Luego de dividir:

$$\frac{(x^2 + xy + y^2)^2 - x^2z^2 - y^2z^2 - x^2y^2}{(x + y - z)(x^2 + y^2)}$$

el cociente es idéntico a: $Q(x; y; z) = ax + by + cz$

Hallar: $a + b - c$

Resolución:

Agrupando convenientemente el dividendo se tiene:

$$(x^2 + xy + y^2)^2 - x^2y^2 - z^2(x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + 2xy + y^2)(x^2 + y^2) - z^2(x^2 + y^2)$$

$$(x^2 + y^2)[(x + y)^2 - z^2] = (x^2 + y^2)(x + y + z)(x + y - z)$$

$$\text{Luego se tiene: } \frac{(x^2 + y^2)(x + y + z)(x + y - z)}{(x + y - z)(x^2 + y^2)}$$

$$\Rightarrow x + y + z \equiv ax + by + cz \Rightarrow a = 1; b = 1; c = 1$$

∴ Me piden: $a + b - c = 1$

45. Dadas las condiciones:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2$$

$$(a + b + c)(1 + ab + bc + ca) = 32$$

Calcule $a + b + c$

Resolución:

Dato:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2 \quad \dots(\beta)$$

$$(a + b + c)(2 + 2ab + 2bc + 2ca) = 64 \quad \dots(\alpha)$$

(β) en (α) :

$$(a + b + c) \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)}{(a + b + c)^2} = 64$$

$$\therefore a + b + c = 4$$

46. Factorizar: $P(x; y) = 5x^2 - y^2 + 10x - 2y + 4xy$

Luego indicar un factor primo.

Resolución:

Aplicando el criterio del aspa doble:

$$P(x; y) = 5x^2 + 4xy - y^2 + 10x - 2y + 0$$

$$\begin{array}{ccccc} 5x & & & -y & 0 \\ & \swarrow & & \searrow & \\ & x & & y & 2 \end{array}$$

$$\therefore P(x; y) = (5x - y)(x + y + 2)$$

47. Los trinomios $(2x^2 + ax + 6)$ y $(2x^2 + bx + 3)$ admiten un factor común de la forma $(2x + c)$. Calcule el valor de: $(a - b)c$

Resolución:

Usando el teorema del residuo.

$$\text{Si } P(x) = 2x^2 + ax + 6$$

$$\Rightarrow R_1 = P\left(-\frac{c}{2}\right) = 2\left(\frac{c^2}{4}\right) + a\left(-\frac{c}{2}\right) + 6 = 0$$

$$\text{Si } Q(x) = 2x^2 + bx + 3$$

$$\Rightarrow R_2 = Q\left(-\frac{c}{2}\right) = 2\left(\frac{c^2}{4}\right) + b\left(-\frac{c}{2}\right) + 3 = 0$$

$$\therefore \text{De } R_1 = R_2: c(a - b) = 6$$

48. Luego de factorizar:

$$N(a; b; c) = a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$$

indicar uno de sus factores compuestos.

Resolución:

Efectuando y agrupando se tiene:

$$N(a; b; c) = a^2(b - c) + b^2c - b^2a + c^2a - c^2b$$

$$N(a; b; c) = a^2(b - c) + bc(b - c) - a(b + c)(b - c)$$

$$N(a; b; c) = (b - c)[a^2 - a(b + c) + bc]$$

$$\therefore \text{Un factor compuesto es: } a^2 - a(b + c) + bc$$

49. Determine la suma de valores de n para que el polinomio $F(x) = x - n$ sea un factor de $P(x) = x^3 + (2 - n)x^2 + (1 - 2n)x + n^2$

Resolución:

$$F(x) \text{ es factor de } P(x) \Leftrightarrow \frac{P(x)}{F(x)} \text{ es exacta.}$$

$x - n = 0$	1	$2 - n$	$1 - 2n$	n^2
n	↓	n	$2n$	n
	1	2	1	0

Por ser una división exacta:

$$n^2 + n = 0 \Rightarrow n(n + 1) = 0$$

$$n_1 = 0 \vee n_2 = -1$$

$$\therefore n_1 + n_2 = -1$$

50. Factorice el polinomio: $F(x) = x^4 - 6x^2 - 27$

Luego indique el factor primo de menor término independiente.

Resolución:

Podemos utilizar el criterio del aspa simple por la forma que tiene.

$$F(x) = x^4 - 6x^2 - 27$$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & & -9 \\ & \swarrow & \searrow \\ x^2 & & 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow F(x) = (x^2 - 9)(x^2 + 3)$$

$$F(x) = \underbrace{(x-3)}_{FP} \underbrace{(x+3)}_{FP} \underbrace{(x^2+3)}_{FP}$$

∴ El factor primo de menor término independiente es $(x-3)$.

51. Factorice el polinomio siguiente

$$P(x; y) = (x^2y + xy^2)^2 - 4x^2 - 8xy - 4y^2$$

e indique el número de factores primos.

Resolución:

$$P(x; y) = (xy(x+y))^2 - 4(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$P(x; y) = (xy)^2(x+y)^2 - 4(x+y)^2 - 4(x+y)^2$$

$$P(x; y) = (x+y)^2[(xy)^2 - 4]$$

$$P(x; y) = (x+y)^2[(xy-2)(xy+2)]$$

Entonces, sus factores primos son

$$(x+y), (xy-2) \text{ y } (xy+2)$$

Por lo tanto, tiene 3 factores primos.

52. Factorice el polinomio: $P(x) = 2x^3 - x^2 - 18x + 9$
Luego iguale a cero cada factor primo y encuentre los valores de x .

Resolución:

Agrupando convenientemente tenemos

$$P(x) = \underbrace{2x^3 - x^2}_{FP} - \underbrace{18x + 9}_{FP}$$

$$P(x) = x^2(2x-1) - 9(2x-1)$$

$$P(x) = (2x-1)(x^2-9)$$

$$P(x) = \underbrace{(2x-1)}_{FP} \underbrace{(x-3)}_{FP} \underbrace{(x+3)}_{FP}$$

iguales a cero cada factor para encontrar sus raíces.

$$2x-1=0 \vee x-3=0 \vee x+3=0$$

$$x = \frac{1}{2} \vee x = 3 \vee x = -3$$

Por lo tanto, las raíces de $P(x)$ son: $\frac{1}{2}$; 3 y -3

53. Señale uno de los factores primos de:

$$P(x; y) = x^2(x-y)^2 - 14xy^2(x-y) + 24y^4$$

Resolución:

Efectuando en los primeros dos sumandos:

$$P(x; y) = \underbrace{x^2(x-y)^2}_{FP} - \underbrace{14xy^2(x-y)}_{FP} + 24y^4$$

$$P(x; y) = [x(x-y)]^2 - 14(x^2-xy)y^2 + 24y^4$$

$$P(x; y) = [x^2 - xy]^2 - 14(x^2 - xy)y^2 + 24y^4$$

$$\begin{array}{ccc} (x^2 - xy) & \xrightarrow{\quad} & -12y^2 \\ (x^2 - xy) & \xrightarrow{\quad} & -2y^2 \end{array}$$

$$(x^2 - xy - 12y^2)(x^2 - xy - 2y^2)$$

Luego:

$$P(x; y) = (x^2 - xy - 12y^2)(x^2 - xy - 2y^2)$$

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\quad} & -4y \\ x & \xrightarrow{\quad} & -2y \\ & \xrightarrow{\quad} & +3y \end{array}$$

$$P(x; y) = (x-4y)(x+3y)(x-2y)(x+y)$$

∴ Un factor primo es: $(x+y)$

54. Señale un factor primo de la siguiente expresión:

$$R(z; w) = 5z^5 - 2z^4w^4 - 75z^4 + 32w^4 - 80$$

Resolución:

Completando términos para aplicar aspa doble:

$$R(z; w) = 5z^5 - 2z^4w^4 + 0w^5 - 75z^4 + 32w^4 - 80$$

$$\begin{array}{ccc} 5z^4 & \xrightarrow{\quad} & -2w^4 \\ 1z^4 & \xrightarrow{\quad} & 0w^4 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & 5 \\ & \xrightarrow{\quad} & -16 \end{array}$$

$$\Rightarrow R(z; w) = (5z^4 - 2w^4 + 5)(z^4 - 16)$$

$$R(z; w) = (5z^4 - 2w^4 + 5)(z^2 + 4)(z^2 - 4)$$

$$R(z; w) = (5z^4 - 2w^4 + 5)(z^2 + 4)(z + 2)(z - 2)$$

∴ Un factor primo es: $(z^2 + 4)$

55. Factorizar:

$$A(x) = x^{4n} + (1-2n)x^{3n} + (1-2n-3n^2)x^{2n} - (2n+3n^2)x^n - 3n^2$$

Resolución:

$$A(x) = x^{4n} + x^{3n} - 2nx^{3n} + x^{2n} - 2nx^{2n} - 3n^2x^{2n} - 2nx^n - 3n^2x^n - 3n^2$$

$$A(x) = x^{2n}(x^{2n} + x^n + 1) - 2nx^n(x^{2n} + x^n + 1) - 3n^2(x^{2n} + x^n + 1)$$

$$A(x) = (x^{2n} + x^n + 1)(x^{2n} - 2nx^n - 3n^2)$$

$$\begin{array}{ccc} x^n & \xrightarrow{\quad} & -3n \\ x^n & \xrightarrow{\quad} & +n \end{array}$$

$$\therefore A(x) = (x^{2n} + x^n + 1)(x^n - 3n)(x^n + n)$$

56. Factorizar: $A(m; p) = (m^6 - 2m^2p^3)^3 + (2m^6p^2 - p^6)^3$

Resolución:

$$(m^6 - 2m^2p^3)^3 + (2m^6p^2 - p^6)^3$$

$$[m^6(m^6 - 2p^3)]^3 + [p^6(2m^6 - p^6)]^3$$

$$m^6(m^6 - 2p^3)^3 + p^6(2m^6 - p^6)^3$$

$$\text{Haciendo: } m^6 = a^3; p^6 = b^3$$

$$a^3(a^3 - 2b^3)^3 + b^3(2a^3 - b^3)^3$$

$$a^3(a^9 - 6a^6b^3 + 12a^3b^6 - 8b^9) + b^3(8a^9 - 12a^6b^3 + 6a^3b^6 - b^9)$$

$$a^{12} - 6a^9b^3 + 12a^6b^6 - 8a^3b^9 + 8a^9b^3 - 12a^6b^6 + 6a^3b^9 - b^{12}$$

$$a^{12} + 2a^9b^3 - 2a^6b^6 - b^{12}$$

$$(a^{12} - b^{12}) + 2a^3b^3(a^6 - b^6)$$

$$(a^6 + b^6)(a^6 - b^6) + 2a^3b^3(a^6 - b^6)$$

$$(a^6 - b^6)[a^6 + b^6 + 2a^3b^3]$$

$$(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)(a^3 + b^3)^2$$

$$(a^3 + b^3)^3(a^3 - b^3)$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2)[(a+b)(a^2 - ab + b^2)]^3$$

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)^3(a^2 - ab + b^2)^3$$

$$\text{Sabemos que: } m^6 = a^3 \Rightarrow a = m^2$$

$$p^6 = b^3 \Rightarrow b = p^2$$

$$(m^2 - p^2)(m^4 + m^2p^2 + p^4)(m^2 + p^2)^3(m^4 - m^2p^2 + p^4)^3$$

$$\therefore (m + p^2)^3(m^4 - m^2p^2 + p^4)^3(m + p)(m - p)(m^2 + mp + p^2)(m^2 - mp + p^2)$$

57. Factorizar:

$$P(x) = x^2[(a^2 + 1)x^2 + 8a^2] - 5x[(a^2 + 1)x^2 + a^2] + 8x^2 - 5x + 1 + a^2$$

63. Si $F(x)$ es el factor primo de mayor grado que resulta al factorizar $P(x) = x^5 + x^4 + 1$ en $Z(x)$, hallar $F(3)$.

Resolución:

$$P(x) = x^5 + x^4 + 1$$

Aplicando el método del quita y pon:

$$P(x) = x^5 + x^4 + 1 + x^3 - x^3$$

$$x^3(x^2 - 1) + x^4 + x^3 + 1 + x^2 - x^2$$

$$x^3(x^2 - 1) + x^2(x^2 - 1) + x^3 + x^2 + 1 + x - x$$

$$x^3(x^2 - 1) + x^2(x^2 - 1) + x(x^2 - 1) + x^2 + x + 1$$

$$= (x^2 - 1)(x^3 + x^2 + x) + x^2 + x + 1$$

$$= x(x^2 - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x(x^2 - 1) + 1)$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

$$\Rightarrow F(x) = x^3 - x + 1 \quad \therefore F(3) = 3^3 - 3 + 1 = 25$$

64. Factorizar: $P(x; y) = x^3 + 28y^3 + 3xy(x + y)$ e indicar la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.

Resolución:

Desdoblando términos para formar desarrollo de un binomio al cubo

$$P(x; y) = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + 27y^3$$

$$P(x; y) = (x + y)^3 (3y)^3; \text{ suma de cubos}$$

$$P(x; y) = (x + y + 3y)[(x + y)^2 - (x + y)(3y) + (3y)^2]$$

$$\Rightarrow P(x; y) = (x + 4y)(x^2 - xy + 7y^2) : \text{factores}$$

Suma de coeficientes de $(x + 4y)$ es 5.

$\therefore$ Suma de coeficientes de $(x^2 - xy + 7y^2)$ es 7

65. Factorice: $P(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) + 7x^2 - 385$ e indicar la suma de sus factores primos lineales.

Resolución:

$$\text{Efectuando: } P(x) = (x^4 + x^2 + 1) + 7x^2 - 385$$

$$P(x) = x^4 + 8x^2 - 384 \text{ factorizando por aspa simple}$$

$$x^2 \quad + 24$$

$$x^2 \quad - 16$$

$$P(x) = (x^2 + 24)(x^2 - 16)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 24)(x + 4)(x - 4)$$

$$\therefore \text{Nos piden: } (x + 4) + (x - 4) = 2x$$

66. Factorizar: $P(x; y) = y^2x^2 + 2yx^3 - xy + x^4 - x^2 - 20$ e indicar un factor primo.

Resolución:

Agrupando convenientemente se tiene:

$$P(x; y) = y^2x^2 + y(2x^3 - x) + (x^2 + 4)(x^2 - 5)$$

$$\begin{array}{ccc} yx & \leftarrow & x^2 + 4 \\ yx & \rightarrow & x^2 - 5 \end{array}$$

$$P(x; y) = (yx + x^2 + 4)(yx + x^2 - 5)$$

$$\therefore \text{Un factor primo es: } yx + x^2 - 5$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

**PROBLEMA 1 (UNI 1975)**

Uno de los factores de: $x^6 - x^2 - 8x - 16$, es:

- A) $x^3 - 4$ B) $x^3 - 2x + 4$ C) $x^2 + 2x - 4$
D) $x^3 - x - 4$ E) $x^3 - x + 4$

Resolución:

Extrayendo el signo $(-)$ a los tres últimos términos se tendrá:

$$x^6 - (x^2 + 8x + 16) = (x^3)^2 - (x + 4)^2$$

$$\therefore (x^3 + x + 4)(x^3 - x - 4)$$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 1978)

Descomponer en dos factores:

$$(x + y)^3 + 3xy(1 - x - y) - 1$$

- A) $(x + y + 1)(x^2 + 2xy + y^2 + x + y + 1)$
B) $(x + y - 1)(x^2 + 2xy + y^2 - x - y + 1)$
C) $(x + y - 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1)$
D) $(x - y - 1)(x^2 - 2xy + y^2 + x - y + 3)$
E) $(x - y + 1)(x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 3)$

Resolución:

Agrupando en la forma indicada:

$$(x + y)^3 - 1 - 3xy(x + y - 1)$$

$$(x + y - 1)[(x + y)^2 + x + y + 1] - 3xy(x + y - 1)$$

$$(x + y - 1)(x^2 + y^2 + 2xy + x + y + 1 - 3xy)$$

$$\therefore (x + y - 1)(x^2 - xy + y^2 + x + y + 1)$$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 1983-I)

Factorizar: $(a - b)^2(c - d)^2 + 2ab(c - d)^2 + 2cd(a^2 + b^2)$ e indicar la suma de sus factores

- A) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ B) $a + 2b + c + 2d$
C) $a + b^2 + c + d$ D) $a^2 - b^2 + c^2 - d^2$
E) $a^2 - b + c - d$

Resolución:

Sacando factor común $(c - d)^2$ a los primeros términos:

$$(c - d)^2[(a - b)^2 + 2ab] + 2cd(a^2 + b^2)$$

$$(c - d)^2(a^2 + b^2) + 2cd(a^2 + b^2)$$

Factorizamos ahora: $(a^2 + b^2)$

$$(a^2 + b^2)[(c - d)^2 + 2cd] = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$$

$$\therefore \text{Se pide la suma de factores: } a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 1984 - II)

Uno de los factores de:

$$zx^4 + 4x^2y^2 - 4x^2y^2z + 4y^4z - x^4 - 4y^4, \text{ es:}$$

- A) $1 + z$ B) $2 - z$ C) $z - 1$
D) $x - 2y$ E) $x + 2y$

Resolución:

Agrupando en la forma indicada:

$$(zx^4 - 4x^2y^2z + 4y^4z) - (x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4)$$

$$z(x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4) - (x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4)$$

Sumando factor común:

$$\therefore \underbrace{(x^4 - 4x^2y^2 + 4y^4)}_{\text{TCP}}(z - 1) = (x^2 - 2y^2)^2(z - 1)$$

Clave: C

PROBLEMAS 5 (UNI 1985 - II)

Descomponer en factores la siguiente expresión:

$$a(\log x)^4 + 10(\log x)^3a + 23a(\log x)^2 - 10(\log x)a + a$$

- A) $a((\log x)^2 + 5\log x - 1)^2$ B) $a(\log x^2 + 6\log x - 2)^2$
 C) $a(\log x + 3)(\log x - 25)$ D) $a((\log x)^2 + 4\log x - 1)$
 E) $a(\log x - 2)(\log x + 2)$

Resolución:

Haciendo el cambio de variable:

$\log x = y$, tendremos:

$$ay^4 + 10y^3a + 23y^2a - 10ya + a$$

$$a[y^4 + 10y^3 + 23y^2 - 10y + 1]$$

$$\begin{array}{ccccc} y^2 & & 5y & & -1 \\ & \swarrow & \downarrow & \searrow & \\ y^2 & & 5y & & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow a[y^2 + 5y - 1]^2$$

$$\therefore \text{Reponiendo } x; \text{ quedaría: } a((\log x)^2 + 5\log x - 1)^2$$

Clave: A



PROBLEMAS

- Hallar un factor primo del siguiente polinomio:
 $[(x - y + z)(x - y - z) + 1]^2 - 4(x - y)^2$
 A) $x + y + z + 1$ B) $x - y + z + 1$ C) $x - y + z$
 D) $x - y + z + 2$ E) $z + y - x + 2$
- Sabiendo que $x^2 + 2x + 3$, es un factor de:
 $P(x) = x^4 + x^3 + 6x^2 + mx + n$
 entonces es verdad que:
 A) $m + n = 21$ B) $mn < 0$ C) $m < 0$
 D) n es par E) $n - 2n = 1$
- Calcular el número de factores cuadráticos de:
 $P(x) = 4x^4 - 37x^2 + 9$
 A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6
- Siendo n el valor que debe admitir x para que los factores de primer grado de $T(x) = 2x^2 + 7x + 6$, tengan el mismo valor numérico, señalar un factor de: $E(a; b; c) = a(a + c) + nb(b + c)$
 A) $a + b$ B) $b + c$ C) $c + a$
 D) $a + b + c$ E) $a + b - c$
- Factorizar:
 $M(a; b; c) = a^2 - b^2 - c^2 + 2(a + b - c + bc)$
 Dar como respuesta la suma de sus factores primos.
 A) $2a$ B) $2b + c$ C) $2a + 2$
 D) $3a + c$ E) $2a + b + 1$
- Señalar cuántos factores lineales admite la expresión:
 $J(x; y) = x^7 - x^3y^4 + x^4y^3 - y^7$
 A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5
- Hallar un factor primo del siguiente polinomio:
 $R(x; y; z) = \frac{1}{3}[8(x + y + z)^3 - (x + y)^3 - (y + z)^3 - (z + x)^3]$
 A) $x + y$ B) xyz C) $x^3 + y^3 + z^3$
 D) $x + y + z$ E) $xy + 2z$
- Sea el polinomio:
 $Q(n) = (n^2 + 3n - 9)^2 + n^2 + 3n - 11$
 dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
 I. $(n - 5)$ es un factor primo.
 II. $(n^2 + 3n - 7)$ es un factor primo.
 III. Presenta dos factores primos lineales.
 A) FFV B) FVV C) FVF
 D) VVF E) VFF
- Si a uno de los factores primos de:
 $P(x) = (x + 4)(x + 5)(x - 3)(x - 2) + 6$
 se le suma $3x$; se obtienen dos factores primos lineales. Hallar la suma de ellos.

PROPUESTOS



- A) $2x + 5$ B) $2x - 5$ C) $2x - 3$
 D) $2x + 3$ E) $2x$
- Si $P(x; y; z) = (ax + by + cz)(mx + ny + pz)$, $p \in \mathbb{Z}$, representa al polinomio:
 $P(x; y; z) = 2[(x + y + z)^2 + (x + y - z)^2] + 5(x^2 + y^2 - z^2 + 2xy)$
 Luego de haber sido factorizado, calcular el valor de:
 $E = \frac{a + b + c}{m - n + p}$
 A) $1/9$ B) $3/7$ C) $5/7$
 D) $7/5$ E) $9/5$
- ¿Cuántos valores admite n para que el polinomio:
 $P(x) = (x - n)(x - 6)^{n-5}(2x - 3)^{12-n}$
 admite dos factores primos repetidos?
 A) 6 B) 7 C) 5 D) 4 E) 8
- Luego de factorizar:
 $P(x; y) = x^2y^3(x^2 + xy) - x^2y^3(xy + yz)$, dar como respuesta la suma de sus factores primos.
 A) $3x + 2y + z$ B) $3x + 2y - z$ C) $2x + y - z$
 D) $2x + y + z$ E) $x + y + z$
- Calcular la suma de coeficientes de un factor primo de:
 $Q(x; y) = x^2 - 25z^2 + 6xy + 9y^2$
 A) 4 B) 9 C) $4 + 5z$
 D) $4 - 5z$ E) Hay dos correctas
- Si $P(x; y; z) = (x + 2y + 3z)(x + 3y + 5z) + 2yz$ es un polinomio factorizable, hallar un factor primo.
 A) $x + y + 2z$ B) $x + y + z$ C) $x + y + 3z$
 D) $x + 2y + 5z$ E) $x + xy + y$
- Señalar un factor del siguiente polinomio:
 $(x + y)^2(x^2 + 3xy + y^2) - 6xy(x^2 + xy + y^2)$
 A) $x + y$ B) $x - y$ C) $x^2 + xy + y^2$
 D) $x^2 - xy + y^2$ E) $x + xy + y$
- Si $P(x; y) = x^3 + 28y^3 + 3xy(x + y)$ es un polinomio factorizable, indicar la suma de coeficientes de uno de sus factores primos.
 A) 3 B) 5 C) 6 D) 9 E) 10
- Si $P(x) = (3x + 2)(4x - 3)(x - 1)(12x + 11) - 14$ es un polinomio factorizable en los racionales, señalar un factor primo.
 A) $x - 1$ B) $12x^2 - 4x - 3$ C) $13x + 12$
 D) $12x - 13$ E) $2x - 1$
- Indicar un factor de:
 $R(x) = 2(x + 21)^2 + (x + 20)^2 - (x + 19)^2 - 1$
 A) $2x + 46$ B) $x - 20$ C) $2x - 46$
 D) $x - 23$ E) $x + 9$

19. Indicar cuál es el factor común de las siguientes expresiones:

$$P(x) = x^4 - 8x^2 + 16$$

$$Q(x) = (x + 1)(x^2 - 3) - x - 1$$

$$R(x) = 2x^4 + 16x$$

- A) $x - 2$ B) $x + 2$ C) $x + 1$
D) $x - 1$ E) $x - 3$

20. Luego de factorizar: $T(x) = (x - 1)^6 - (x - 1)^3 - 2$
Indicar un factor

- A) $x + 1$ B) $x + 2$ C) $x + 3$
D) x E) $x - 3$

21. Si $P(x) = x^2 + (2m - 1)x + (m - 1)^2$ es factorizable mediante un aspa simple (en el campo numérico de los racionales), además $m \in \mathbb{Z}^+ \wedge m < 13$, indicar un factor primo.

- A) $x + 5$ B) $x + 7$ C) $x + 9$
D) $x + 11$ E) $x - 1$

22. Determinar la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones.

- I. Un polinomio mónico de segundo grado de coeficientes; si no se factoriza por aspa simple es primo.
II. Un polinomio mónico de coeficientes racionales y de grado 3; si no se factoriza por divisores binómicos es primo en $\mathbb{Q}$.
III. Un polinomio mónico de coeficientes racionales y de grado 4; si no se factoriza por aspa doble especial es primo en $\mathbb{Q}$.

- A) VFF B) FVV C) VVV
D) VVF E) FFF

23. Luego de factorizar:

$$P(x) = x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 39x + 180 - (x + 3)(x - 4)(2x + 17)$$

indicar uno de los factores primos.

- A) $x - 4$ B) $x + 2$ C) $x + 8$
D) $x + 1$ E) $x - 1$

24. Con respecto al polinomio:

$$M(x) = (x^3 + 1)^2 - x^2(x^2 + 4)$$

indicar lo correcto:

- I. Tiene 2 factores cúbicos primos.
II. La diferencia entre sus factores primos es $\pm 2x(x - 2)$.
III. La suma de coeficientes de un factor primo es 1.
IV. En los complejos tiene 6 factores primos.

- A) I y II B) II, III y IV
C) I y IV D) Todos
E) Ninguno

25. Luego de factorizar el polinomio:

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - 2)(x^3 - 3) + 2(2x^3 - 3x + 3)$$

este admite la forma: $P(x) = x^n(x + c)^n(x^n + ax - a)$
Calcular el valor numérico de: $n - ac$

- A) -4 B) -1 C) 0
D) 3 E) 5

26. Factorizar en $\mathbb{Z}$ los polinomios

$$P(x) = x^7 + x^5 - x^5 - 2x^3 - 1$$

$$Q(x) = x^7 - 2x^4 - 1$$

Si $M(x)$ es el polinomio que resulta de sumar los factores primos de tercer grado, hallar una raíz irracional de $M(x)$.

- A) $\frac{\sqrt{7} - 2}{4}$ B) $\frac{\sqrt{13} - 5}{4}$ C) $\frac{\sqrt{17} - 1}{4}$
D) $\frac{\sqrt{21} - 2}{5}$ E) $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$

27. Indicar falso o verdadero según corresponda.

- I. Todos los divisores del término independiente de un polinomio de coeficientes enteros son raíces enteras del mismo.
II. Para que un polinomio tenga raíces enteras no es necesario que tenga coeficientes enteros.
III. El polinomio $P(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ tiene raíces racionales.

- A) VVV B) VFF C) FVV
D) FFF E) FFF

28. Si x_1 es una raíz real del polinomio:

$$P(x) = x^7 + x - 8; \text{ indicar lo correcto:}$$

- A) $x_1 \notin (1; 2)$ B) $x_1 \in \left(\frac{8}{7}; \frac{4}{3}\right)$ C) $x_1 \in \left(\frac{4}{3}; \frac{3}{2}\right)$
D) $x_1 \in \left(\frac{3}{2}; 2\right)$ E) $x_1 \in \left(\frac{65}{64}; \frac{8}{7}\right)$

29. Señalar un factor primo de $(2x + 1)^7 + 4x(x + 1) + 2$

- A) $4x^2 + 7x + 3$ B) $4x^2 + 6x + 3$ C) $4x^2 + 4x + 1$
D) $4x^2 + 2x + 1$ E) $4x^2 - 2x + 1$

30. Sea el polinomio:

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$; de coeficientes enteros. Si al menos de un modo, se puede elegir un número primo m que satisfaga las condiciones siguientes:

- I. a_0 no es divisible entre m .
II. Todos los demás coeficientes son divisibles entre m .
III. a_n es divisible por m , pero no por m^2 .
Entonces el polinomio es:

- A) divisible entre cualquier polinomio.
B) irreducible en $\mathbb{Q}$.
C) irreducible en $\mathbb{R}$.
D) tiene factores en $\mathbb{R}$.
E) No se puede afirmar nada.

31. Indicar un factor del siguiente polinomio:

$$P(x) = x^{107} + x^{21} + x$$

- A) $x^2 - x + 1$ B) $x^2 + 2x - 3$ C) $x^2 + x - 2$
D) $x^2 + x + 1$ E) $x^5 + x + 1$

32. Luego de factorizar el polinomio:

$P(x) = x^7 - 2x^5 + x^4 - x^2 + x - 1$, indicar un factor.

- A) $x^3 + x + 1$ B) $x^2 - 1$ C) $x^4 - x^2 - 1$
 D) $x^3 - x + 1$ E) $x^4 + x^2 + 1$

33. Si al factorizar

$P(x) = ax^5 - (a + b)x^4 + bx^3 + ax^2 - (a + b)x + b$,
 se encuentra un factor primo racional doble, hallar $\left(\frac{b}{a}\right)$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) 2 C) 1
 D) -1 E) $\neq 1$

34. Sabiendo que
- $a \in \mathbb{Z} - \{1; 0; -1\}$
- ; factorizar

$P(x) = x^6 + (2a - a^2)x^4 + (a^2 - 2a)x^2 - 1$ e indicar el número de términos de la suma de todos sus factores primos, si dos de sus factores primos son de segundo grado.

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

35. Indicar un término de un factor primo de

$S(x) = x^5(x^3 + 4) + (3x + 1)(x - 1)$

- A) 2 B) 3 C) 3x
 D) 5x E) $2x^2$

36. Factorizar aplicando identidades

$P(a; b; c) = (a + b)^3(c - d)^2 - 3ab(a + b)(c - d)^2 + (a^3 + b^3)(c + d)^2$

Señalar el número de factores primos en $\mathbb{Q}$.

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

37. Factorizar:

$P(a; b; c; d) = (a + b + c - 2d)^3 - (2b - a - d + 2c)^3 - (2a - b - c - d)^3$

Señalar un factor.

- A) $a + b + c + d$ B) $a - 2b - 2c + d$
 C) $-2a + b + c + d$ D) $a - b + c - d$
 E) $2a - b - c + 2d$

38. Luego de factorizar

$P(a; b; c) = a^2b^3c + a^3bc^2 + ab^2c^3 + a^3b^3c^3 + 1 + a^2b + b^2c + c^2a$

indicar la suma de todos sus factores primos.

- A) $a^2b + b^2c + c^2a + 1$
 B) $1 + ab + bc + ac$
 C) $a^2b + 1$
 D) $b^2c + 1$
 E) $a^2b + 1 + b^2c + 1 + c^2a + 1$

39. Si se suma los factores primos de:

$P(a; b; c) = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 8abc$
 se obtiene

- A) $a(b + 1) + b(c + 1) + c(a + 1)$
 B) $ab + bc + ac$

C) $2(a + b + c)$

D) $a(a + b) + b(b + c) + c(a + c)$

E) $a(a + 1) + b(b + 1) + c(c + 1)$

40. ¿Cuántos divisores algebraicos primos admite el polinomio:
- $P(x; y) = [x^4 + y^4 + (x + y)^4]^4$
- ?

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 9

41. Hallar la suma de los factores primos del siguiente polinomio:

$H(x; y) = 15x^2 + 7xy - 2y^2 - 6x - 17y - 21$

- A) $8x + y + 4$ B) $8x - y - 4$ C) $8x + y - 4$
 D) $8x - y + 4$ E) $8x + 4y + 1$

42. Luego de factorizar:

$N(x; y) = 6x^2 + 19xy + 15y^2 - 11x + 4 - 17y$
 indicar un factor.

- A) $2x + 3y - 1$ B) $2x - 3y + 1$ C) $3x - 5y + 4$
 D) $3x + y + 4$ E) $3x + 5y + 4$

43. En el siguiente esquema:

$3x^2 - 2xy - 8y^2 + 22x + 6y + 35$

se observa el procedimiento de factorización por el criterio de aspa doble. Hallar el valor de: $ab + c$

- A) 14 B) 15 C) 17
 D) 18 E) 20

44. Calcular el valor numérico del factor primo de mayor grado respecto de "y" que se obtiene al factorizar:

$P(x; y) = 3x^4 - 2x^2y^2 - 7x^2 + 8y^2 - 20$

para: $x = 1 \wedge y = 0$

- A) -8 B) 6 C) -6 D) 8 E) 12

45. Señalar un factor primo del siguiente polinomio:

$P(x; y; z) = x^4 - x^2y + 5yz^2 - x^2z^2 - 2y^2 - 2z^4$

- A) $x^2 - y + 3z^2$ B) $x^2 + y + 6z^2$
 C) $x^2 - y + 4z^2$ D) $x^2 + y - 2z^2$
 E) $x + y + z$

46. Calcular el número de factores primos del siguiente polinomio:
- $P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 6$

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

47. Luego de factorizar el polinomio:

$A(x) = 3x^3 - 2x^2 - 19x - 6$

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Tiene dos factores primos mónicos.
 II. La suma de sus factores primos es $5x$.
 III. Todos sus factores primos son lineales.

- A) VVF B) FVF C) VVV
 D) FFV E) FVV

48. Luego de factorizar:
 $M(x) = x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1$
 se obtiene: $(x - 1)^{m-2}(x + 1)^{n+1}$.
 Hallar el valor de mn.
 A) 3 B) 6 C) 8
 D) 12 E) 15
49. Señalar un factor de:
 $P(x) = 6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6$
 A) $x - 1$ B) $x - 2$ C) $2x + 1$
 D) $3x^2 + 7x + 2$ E) $3x + 1$
50. Si $(a + 1)x^2 + (b - 3)y^2$, representa a la suma de los factores primos de: $P(x,y) = 64x^4 + y^4$
 Calcular el valor de: ab^{-1}
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
51. Factorizar $F(x) = x^4 - 4x^3 + 11x^2 - 14x + 10$ y dar como respuesta el mayor TI de uno de sus factores primos.
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
52. Determinar cuántos factores cuadráticos admite:
 $F(x) = 25x^4 + 5x^3 - x - 1$
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
53. Si luego de factorizar $M(x) = 2x^4 - 3x^3 - 1$
 Un factor se evalúa para $x = \sqrt{2}$, se obtiene:
 A) $2 - \sqrt{2}$ B) $1 - \sqrt{2}$ C) $5 + \sqrt{2}$
 D) $1 + \sqrt{2}$ E) $3 + \sqrt{2}$
54. Si la suma de los factores primos de:
 $M(x,y) = x^4 - 2x^3y - 39x^2y^2 + 8xy^3 + 140y^4$
 es: $ax + by$, entonces podemos afirmar que:
 A) $\sqrt[3]{ab} = 2$ B) $a + b = -2$ C) $a - b = 2$
 D) $b^2 = 16$ E) $a^b = 16$
55. Si la suma de los factores primos de:
 $P(x) = x^3 - 5x - 2$, tiene la forma:
 $mx^2 + nx + p$, calcular el valor de:
 $R = (m - n + p)^{p-n}$
 A) -1 B) 0 C) 1 D) 3 E) 9
56. Sea el polinomio $P(x) = 6x^3 - x^2 - 5x + m$.
 Si $P(0; 5) = 0$, hallar un factor primo de dicho polinomio.
 A) $2x + 1$ B) $x + 2$ C) $3x - 1$
 D) $5x - 1$ E) $3x - 2$
57. Al factorizar el polinomio $P(x) = 3x^3 - 21x + 18$
 se obtiene: $a(x - b)(x - c)(x - d)$, con a, b, c y d constantes enteras, tal que: $b < c < d$.
 Calcular el valor de $a - b + c - d$.
 A) -7 B) 3 C) 5 D) 6 E) 9
58. Hallar un factor primo del siguiente polinomio:
 $P(x) = x^5 + 81x + 243$
 A) $x^2 + 3x + 9$ B) $x^2 - 3x + 9$
 C) $x^3 + 3x^2 + 27$ D) $x^2 - x + 1$
 E) $x^3 - 3x^2 + 9$
59. Siendo $(b + 1) \wedge (a - 1)$ cuadrados perfectos, factorizar:
 $M(x) = x^6 - (a + b + 1)x^4 + (ab + 2a - 1)x^2 - a + b - ab + 1$
 y señalar aquel que no es factor de $M(x)$.
 A) $x + \sqrt{b+1}$ B) $x - \sqrt{a+1}$ C) $x - \sqrt{b-1}$
 D) $x^2 - 1$ E) $x^2 + 1 - a$
60. Indicar un factor de:
 $S(x) = (x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)^2 - x^5$
 A) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ B) $x^9 + 1$
 C) $x^5 + 1$ D) $x^3 + x^2 + x + 1$
 E) $x^4 + 1$
61. Cuántos factores tiene:
 $P(a; b) = a^2 - 4 + 2ab + b^2$
 A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) es primo
62. Señale un factor primo de:
 $M(a; b; c) = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2)$
 A) $a - b$ B) $b - a$ C) $c^2 - ab$
 D) $c^2 + ab$ E) $abc + 1$
63. Cuántos factores primos presenta:
 $I(x,y) = x^3 + y^3 + 6xy - 8$
 A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5
64. Señale un factor primo de
 $P(a; b; c) = a^2 + b^2 - 4c^2 + 2ab + 3bc + 3ac$
 A) $a + b + 3c$ B) $a + b - c$ C) $a + b + 5c$
 D) $a - b - c$ E) $-a + b - c$
65. Factorice el siguiente polinomio
 $P(a; b) = (a + b)^4 - (a - b)^4 + a^4 + 2a^3b + 2a^2b^2 + 2ab^3 + b^4$
 e indique la suma de coeficientes de un factor primo.
 A) 12 B) 4 C) 8
 D) 10 E) 3
66. Factorice el polinomio
 $P(a; b) = (a + b)^2 + 3(2a^2 + 3ab + b^2) + 2(2a + b)^2 - 4a - 3b - 3$
 e indique un factor primo.
 A) $7a + 4b - 2$ B) $5a + 3b + 3$ C) $2a + 2b + 2$
 D) $5a + 3b - 3$ E) $3a + 2b - 1$
67. Factorice el polinomio:
 $N(x,y) = (x - 1)(x^2 + x + 1) + (y - 1)(y^2 + y + 1) + (x + y)(3xy + 1)$

e indique la suma de coeficientes de un factor primo.

- A) 2 B) 5 C) 6 D) 8 E) 4

68. Luego de factorizar:

$$J(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4) - 3(2x + 3)$$

tenemos como factor primo a:

$$P(x) = ax^2 + bx + 1, \forall x \in \mathbb{R}, P(x) > 0$$

Señale $P(x)$.

- A) $x^2 + x + 1$ B) $x^2 - x + 1$ C) $x^2 - x + 6$
D) $x^2 + x + 5$ E) $x^2 - x + 4$

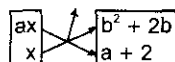
69. Señale un factor primo de:

$$P(x) = 3x^4 + x^3 - 6x - 2$$

- A) $x^3 + 2$ B) $x^2 - 6x + 6$ C) $x^2 - 7x - 2$
D) $3x^2 - x - 1$ E) $x^3 - 2$

70. En el siguiente polinomio, al aplicar el criterio de aspa simple se obtiene el siguiente esquema:

$$P(x) = ax^2 - 2x + c$$



Calcule $a + b + c$; $a, b, c, x \in \mathbb{R}$

- A) -4 B) -1 C) -3
D) -5 E) -2

71. Señale un factor primo de:

$$S(a; b; c) = (a - b)^2 + (b + c)^2 - 2(b - a)(b + c) + (a + c - 2)$$

- A) $a + c + 1$ B) $a + c - 2$ C) $a + c + 2$
D) $a - c + 2$ E) $a - c - 1$

72. Qué relación debe existir entre m y n para que el polinomio:

$$P(x) = mx^4 + (n + 3m)x^3 + (2 + m + 3n)x^2 + (n + 6)x + 2$$

presente un factor primo lineal.

- A) $m = 8n^2$ B) $n = 8m$ C) $m^2 = 8n$
D) $m = n^2$ E) $n^2 = 8m$

73. Sea: $P(x) = x^n + 3x^{n-2} - 4x^2 - 12$
calcule n , si $P(x)$ presenta 3 factores primos cuadráticos.

- A) 2 B) 5 C) 6
D) 8 E) 4

74. Cuántos factores primos tiene:

$$J(x) = (x + 1)(x^2 - 4)(x + 5) - 13$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

75. Después de factorizar, indicar la suma de sus factores primos de: $P(m; n) = m^2 + 3m - n^2 + n + 2$

- A) $2m + 2n + 3$ B) $2m + 3$ C) $2m + n$
D) $2m + 1$ E) $2n + 3$

76. Después de factorizar indique un factor:

$$A(x; y) = x^6y^4 + x^3y^2 - x^2y^2 + 5xy - 6$$

- A) $x^2y^2 - xy - 3$ B) $x^3y^2 + xy + 2$
C) $x^3y^2 - xy - 2$ D) $x^3y^2 - xy + 3$
E) $x^3y^2 - xy + 3$

77. Indique un factor después de factorizar:

$$P(x; y) = x^3 - y^3 + x^2 + xy + y^2$$

- A) $x^3 + xy - y^2$ B) $x^2 + xy - y$ C) $x^2 + xy + y^2$
D) $x^2 - xy + y$ E) $x^2 - xy + y^2$

78. Señale un factor primo de:

$$T(x) = 20x^5 + 31x^3 - 9x$$

- A) $2x + 3$ B) $5x^2 + 3$ C) $5x^2 - 3$
D) $2x + 1$ E) $2x - 3$

79. Señale el número de factores primos de:

$$P(x) = x^6 + 4x^5 + 3x^4 + x^3 + 7x^2 - 6$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

80. Cuántos factores primos tiene: $P(x; y) = x^4y^8 + 4$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

CLAVES

1. B	11. C	21. C	31. D	41. C	51. E	61. C	71. C
2. E	12. B	22. D	32. D	42. A	52. B	62. D	72. E
3. E	13. E	23. A	33. E	43. C	53. B	63. B	73. C
4. D	14. D	24. D	34. C	44. D	54. D	64. B	74. B
5. C	15. D	25. E	35. C	45. D	55. E	65. A	75. B
6. B	16. B	26. C	36. B	46. D	56. E	66. D	76. D
7. D	17. D	27. C	37. C	47. C	57. C	67. D	77. C
8. B	18. A	28. E	38. E	48. C	58. A	68. A	78. D
9. A	19. B	29. B	39. C	49. E	59. C	69. E	79. B
10. C	20. D	30. B	40. A	50. C	60. A	70. C	80. A

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Fracciones algebraicas

10

capítulo

William George Horner nació en Bristol (Inglaterra) el 22 de septiembre de 1789 y murió en Bath (Inglaterra) en 1837. Fue un matemático inglés. A los 14 años se convirtió en maestro, cuatro años después se convirtió en director de la misma escuela en que estudió. En 1809 se trasladó a Bath, donde fundó su propio colegio.

Como investigador solo tiene en su haber una contribución: el llamado algoritmo de Horner para resolver ecuaciones algebraicas, publicado por la Royal Society en 1819. Este método alcanzó cierta popularidad en Inglaterra y Estados Unidos gracias al también matemático De Morgan, que lo utilizó en sus artículos divulgativos, aunque finalmente se

popularizó la regla de Paolo Ruffini, descrito y publicado en 1814, por el cual le fue concedida la medalla de oro por la Italian Mathematical Society for Science.

Horner hizo otras contribuciones matemáticas, como la publicación de una serie de documentos sobre la transformación y resolución de ecuaciones algebraicas, en donde también se aplican técnicas similares a las ecuaciones funcionales. Después de que muriera Horner, su hijo llamado también William Horner mantuvo en funcionamiento la escuela de Bath.



William Horner

Fuente: Wikipedia

◀ MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

Se llama máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas, a la expresión algebraica entera de mayor grado y coeficiente numérico contenida un número exacto de veces en cada una de las expresiones mencionadas.

Ejemplo:

Sean los números 12 y 6:

	Divisores comunes			
12 :	1	2	3	6
6 :	1	2	3	6

El MCD de 12 y 6 es 6.

◀ MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

Se llama mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas, a la mínima expresión algebraica entera y de menor coeficiente que contiene un número entero de veces las expresiones mencionadas.

Ejemplo:

Sean los números 6 y 8.

	Múltiplos comunes		
6 :	24	48	72
8 :	24	48	72

El MCM de 6 y 8 es 24.

Pasos a seguir para calcular el MCD y MCM de dos o más polinomios

1. Se factorizan las expresiones dadas.
2. El MCD se determina considerando solo factores comunes a todas las expresiones pero elevados a su menor exponente.
3. El MCM estará expresado por la multiplicación de los factores comunes a todas las expresiones pero elevados a su mayor exponente luego multiplicado por los no comunes.

Ejemplos:

Sean:

$$A(x) = (x+1)^2(x+2)^3(x-3)$$

$$B(x) = (x+1)^3(x+2)^2$$

$$\text{MCD}(A; B) = (x+1)^2(x+2)^2$$

$$\text{MCM}(A; B) = (x+1)^3(x+2)^3(x-3)$$

$$C(x) = (x+2)(x+3)$$

$$D(x) = (x-1)(x-3)$$

$$\text{MCD}(C; D) = 1$$

$$\text{MCM}(C; D) = (x+2)(x+3)(x-1)(x-3)$$

✓ Propiedades

1. El MCD de dos o más expresiones primas entre sí es la unidad y su MCM el producto de ellas.
2. Solo para dos expresiones o polinomios se cumple que: $A \times B = \text{MCD}(A; B) \text{MCM}(A; B)$

Ejemplos

1. Indicar el MCD y MCM de:

$$F(x) = x^2(x+1) \quad \wedge \quad G(x) = x(x+2)$$

Resolución:

Como $F(x)$ y $G(x)$ están factorizados:

$$\text{MCD}(F; G) = x$$

$$\text{MCM}(F; G) = x^2(x+1)(x+2)$$

2. Dar el MCD y MCM de:

$$A(x; y) = x^3y^5(x-2) \quad \wedge \quad B(x; y) = x^4y^2(y-1)$$

Resolución:

Análogamente:

$$\text{MCD}(A; B) = x^3y^2$$

$$\text{MCM}(A; B) = x^4y^5(x-2)(y-1)$$

3. Dar el MCD y MCM de:

$$P(x) = x^2 - x - 6 \quad \wedge \quad Q(x) = x^2 - 3x - 10$$

Resolución:

Factorizando a cada uno de los trinomios:

$$P(x) = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$$

$$Q(x) = x^2 - 3x - 10 = (x-5)(x+2)$$

$$\text{MCD}(P; Q) = x+2$$

$$\text{MCM}(P; Q) = (x+2)(x-3)(x-5)$$

4. Dar el MCD y MCM de:

$$M(x; y) = x^2 - 2xy - 15y^2$$

$$N(x; y) = x^2 - 7xy - 18y^2$$

Resolución:

Factorizando cada uno de los trinomios:

$$M(x; y) = (x-5y)(x+3y)$$

$$N(x; y) = (x-9y)(x+2y)$$

$$\text{MCD}(M; N) = 1$$

$$\text{MCM}(M; N) = (x-5y)(x+3y)(x-9y)(x+2y)$$

5. Dar el MCD y MCM de:

$$A(x) = x^4 - 1 \quad \wedge \quad B(x) = x^2 + 2x - 3$$

Resolución:

Factorizando cada expresión:

$$A(x) = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$B(x) = (x+3)(x-1)$$

$$\text{MCD}(A; B) = x-1$$

$$\text{MCM}(A; B) = (x-1)(x^2+1)(x+1)(x+3)$$

6. Calcular MCD y MCM de:

$$A(x) = x^5 - ax^4 - a^4x + a^5$$

$$B(x) = x^4 - ax^3 - a^2x^2 + a^3x$$

Resolución:

Factorizando A:

$$A(x) = x^4(x - a) - a^4(x - a) = (x - a)(x^4 - a^4)$$

$$A(x) = (x - a)^2(x + a)(x^2 + a^2)$$

Factorizando B:

$$B(x) = x^2(x - a) - (a^2x)(x - a) = (x - a)(x^3 - a^2x)$$

$$B(x) = x(x - a)^2(x + a)$$

$$\text{MCD}(A; B) = (x - a)^2(x + a)$$

$$\text{MCM}(A; B) = (x - a)^2(x + a)(x^2 + a^2)(x)$$

7. Calcular el MCD y MCM de:

$$A(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

$$B(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

$$C(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

Resolución:

Factorizando cada expresión:

$$A(x) = x^3 + 5x^2 + 8x + 4$$

 Para $x = -1$: $A(-1) = 0$; se anula, entonces tendrá un factor $(x + 1)$.

Por Ruffini:

1	5	8	4	
-1		-1	-4	-4
1	4	4	0	

$$\text{Luego: } A(x) = (x + 1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$A(x) = (x + 1)(x + 2)^2$$

$$B(x) = x^3 + 3x^2 - 4$$

 Para $x = 1$: $B(1) = 0$; se anula, entonces tendrá un factor $(x - 1)$.

Por Ruffini:

1	3	0	-4	
1		1	4	4
1	4	4	0	

$$\text{Luego: } B(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 4)$$

$$B(x) = (x - 1)(x + 2)^2$$

$$C(x) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$$

 Para $x = -2$: $C(x) = 0$; se anula, entonces tendrá un factor $(x + 2)$.

Por Ruffini:

1	6	12	8	
-2		-2	-8	-8
1	4	4	0	

$$\text{Luego: } C(x) = (x + 2)(x^2 + 4x + 4)$$

$$O(x) = (x + 2)(x + 2)^2 = (x + 2)^3$$

$$\therefore \text{MCD}(A; B; C) = (x + 2)^2$$

$$\text{MCM}(A; B; C) = (x + 2)^3(x - 1)(x + 1)$$

8. Calcular el MCD de A, B y C:

$$A(x; y) = x^9y^2 + xy^{10} - 2x^5y^6$$

$$B(x; y) = 3x^4y^3(x^2 + y^2) + x^8y + x^2y^7$$

$$C(x; y) = x^4y - x^3y^3 - xy^5 + x^2y^3$$

Resolución:

Factorizando A:

 Extrayendo factor común: xy^2

$$A(x; y) = xy^2(x^8 - 2x^4y^4 + y^8) = xy^2(x^4 - y^4)^2$$

$$A(x; y) = xy^2(x^2 + y^2)^2(x^2 - y^2)^2$$

$$A(x; y) = xy^2(x^2 + y^2)(x + y)^2(x - y)^2$$

Factorizando B:

Agrupando convenientemente:

$$B(x; y) = 3x^4y^3(x^2 + y^2) + x^2y(x^8 + y^6)$$

$$B(x; y) = 3x^4y^3(x^2 + y^2) + x^2y(x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

 Extrayendo factor común: $x^2y(x^2 + y^2)$

$$B(x; y) = x^2y(x^2 + y^2)(3x^2y^2 + x^4 - x^2y^2 + y^4)$$

$$B(x; y) = x^2y(x^2 + y^2)(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

$$B(x; y) = x^2y(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)^2 = x^2y(x^2 + y^2)^3$$

Factorizando C:

Agrupando en la forma indicada:

$$C(x; y) = x^2y(x^2 + y^2) - xy^3(x^2 + y^2)$$

 Extrayendo factor común: $xy(x^2 + y^2)$

$$C(x; y) = xy(x^2 + y^2)(x - y^2)$$

$$\therefore \text{MCD}(A; B; C) = xy(x^2 + y^2)$$

9. Si el producto de dos expresiones es $(x + 1)^2(x + 2)(x + 5)$ y su MCD es $(x + 2)$, hallar el MCM de las expresiones.

Resolución:

 Sean las expresiones: $A(x)$; $B(x)$

$$\text{Por condición: } A \times B = (x + 1)^2(x + 2)(x + 5)$$

Por propiedad:

$$[\text{MCM}(A; B)][\text{MCD}(A; B)] = (x + 1)^2(x + 2)(x + 5)$$

$$\Rightarrow \text{MCM}(A; B) = (x + 1)^2(x + 5) = (x^2 + 2x + 1)(x + 5)$$

$$\therefore \text{MCM}(A; B) = x^3 + 7x^2 + 11x + 5$$

10. Hallar el MCM de:

$$A = 3(x + 1); \quad B = 2(x^2 - x + 1) \quad \text{y} \quad C = 6(x^3 + 1)$$

Resolución:

En este caso solo falta factorizar C.

$$C = 6(x^3 + 1) = 6(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$\Rightarrow \text{MCD}(A; B; C) = 1$$

$$\therefore \text{MCM}(A; B; C) = 6(x + 1)(x^2 - x + 1)$$

11. Dadas las expresiones algebraicas:

$$A = (x^2 - 4)(x^2y + 3xy) \quad \wedge \quad B = x^4y^2 + 8xy^2$$

 ¿por qué expresiones deberá multiplicarse cada una de ellas para que su MCD sea $x^2y^2(x^2 - 4)$?

Resolución:

Factorizando A:

$$A = (x + 2)(x - 2)xy(x + 3)$$

Factorizando B:

$$B = xy^2(x^3 + 8) = xy^2(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$$

$$\Rightarrow \text{MCD}(A; B) = xy(x + 2)$$

Para que su MCD sea $x^2y^2(x^2 - 4)$, a A habría que multiplicarlo por xy y a B habría que multiplicarlo por $x(x - 2)$.

12. Si $(x - 1)$ es divisor de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ y de $x^3 - 7x + 6$, ¿cuál es su MCD?

Resolución:

Factorizando el primer polinomio:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ 1 & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

$$(x - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

Análogamente con el segundo polinomio:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$(x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x + 3)(x - 2)$$

$$\therefore \text{MCD} = (x - 1)(x - 2)$$

13. Al sumar el MCD de $(x - 1)^5$ y $x^5 - 1$ con el MCD de $(x - 1)^6$ y $x^6 - 1$, se obtiene:

Resolución:

Factorizando $x^5 - 1$, por divisores binómicos:

Para $x = 1$ se anula, entonces tendrá un factor $(x - 1)$.

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow \text{MCD} = (x - 1)$$

El segundo polinomio $x^6 - 1$, puede escribirse:

$$(x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$\Rightarrow \text{MCD} = (x - 1)$$

$$\therefore \text{Suma de los MCD} = 2(x - 1)$$

14. Halla el MCD de:

$$A = x^3 + 3x^2 + 3x + 1; B = x^2 + 2x + 1; C = x - 1$$

Resolución:

$$A = (x + 1)^3; B = (x + 1)^2; C = (x - 1)$$

$$\therefore \text{MCD}(A; B; C) = 1$$

◀ FRACCIONES ALGEBRAICAS

Fracción algebraica es el cociente indicado entre dos expresiones algebraicas racionales en donde al menos en el denominador debe de figurar una letra.

Ejemplos:

$$\frac{x+y}{x-y}; \frac{2}{x}; \frac{x+y}{z}; \frac{a+1}{a+b+c}$$

Clasificación de fracciones

Fracción propia. Se caracteriza porque el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

Ejemplos:

$$\frac{x^3 - 1}{x^4 + 1}; \frac{xy + 2}{x^3 + y^2}$$

Nota

En el caso inverso, donde el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, se dirá que es una fracción impropia.

Ejemplo:
$$\frac{x^5 + x^3}{x^2 + 2}$$

Fracciones equivalentes. Son aquellas que teniendo formas diferentes se caracterizan porque siempre tendrán los mismos valores numéricos; para cualquier valor asignado a sus variables, a excepción de aquellos que hagan cero el denominador.

Ejemplos:

$$\frac{x+3}{x^2+5x+6} < > \frac{1}{x+2}; \forall x \neq -3; -2$$

Para $x = 0$: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Fracciones complejas o compuestas. Se caracterizan porque en su numerador o denominador aparecen otras fracciones algebraicas.

Ejemplo:

$$F = 3 + \frac{x+1}{x + \frac{7}{x - \frac{1+x^2}{x^2-1}}}$$

Fracciones continuas. Es un caso auxiliar de las fracciones complejas, que se caracterizan porque el numerador de cada fracción siempre es la unidad.

Ejemplo:

$$M = 3 + \frac{1}{x - \frac{1}{x + \frac{1}{x+1}}}$$

Fracción irreducible: Son aquellas fracciones que se caracterizan porque en el numerador y denominador aparecen expresiones que no tienen ningún factor común (el numerador y denominador son primos entre sí), es decir, no admiten simplificación.

Ejemplo:

$$\frac{x+2}{x+1}; \frac{2}{x}$$

Signos de una fracción

Toda fracción posee tres signos (signo de la fracción, signo del numerador, signo del denominador); el cambio de dos de estos signos no altera el signo total de la fracción.

Ejemplos:

- $F = +\frac{+a}{+b}$
- $E = -\frac{-m}{-n} = +\frac{-m}{+n} = +\frac{+m}{-n}$
- $(x-a)(x-b)(x-c) = (a-x)(b-x)(x-c)$
- $\frac{(x-a)(x-b)}{x-c} = \frac{(a-x)(b-x)}{x-c}$
- $R = \frac{7}{x-2} + \frac{7}{2-x} = \frac{7}{x-2} - \frac{7}{x-2} = 0$

Observaciones

1. En toda fracción podrán efectuarse tres juegos pares de signos y tendremos como resultado otras fracciones equivalentes.

Ejemplo:

$$-\frac{2-x}{7-x} = +\frac{x-2}{7-x} = +\frac{2-x}{x-7} = -\frac{x-2}{x-7}$$

(1) (2) (3)

2. Si a los componentes de una fracción se les multiplica o divide por una expresión diferente de cero tendremos como resultado otras fracciones equivalentes. Sea:

$$f = \frac{a}{b} = \frac{\frac{am}{bm}}{\frac{a}{m}} = \frac{\frac{a}{m}}{\frac{b}{m}} \quad \text{fracciones equivalentes}$$

Propiedad

Si la fracción: $\frac{mx + ny + p}{rx + sy + t}$

es independiente de sus variables (x e y) o toma siempre un valor constante, entonces se cumplirá:

$$\frac{m}{r} = \frac{n}{s} = \frac{p}{t} = \text{constante}$$

Operaciones con fracciones

- Para sumar o restar fracciones es necesario dar común denominador.

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x-1} - \frac{x-5}{x+4} &= \frac{(x+2)(x+4) - (x-5)(x-1)}{(x-1)(x+4)} \\ &= \frac{x^2+6x+8 - (x^2-6x+5)}{(x-1)(x+4)} \\ &= \frac{x^2+6x+8 - x^2+6x-5}{(x-1)(x+4)} = \frac{12x+3}{(x-1)(x+4)} \end{aligned}$$

- Para multiplicar fracciones, se multiplican numeradores y denominadores entre sí.

Ejemplo:

$$\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x+3}{x-4}\right) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-3x-4}$$

- Para dividir fracciones, se invierte la fracción del divisor y se procede como en la multiplicación.

Ejemplo:

$$\left(\frac{x+1}{x-7}\right) : \left(\frac{x+3}{x-5}\right) = \left(\frac{x+1}{x-7}\right)\left(\frac{x-5}{x+3}\right) = \frac{x^2-4x-5}{x^2-4x-21}$$

Simplificación de fracciones

Simplificar una fracción es transformarla en otra equivalente e irreducible.

Ejemplos:

1. Simplificar:

$$M = \frac{2ax^2 + 2x^3 - 3bx^2 - 2b^2x - 3abx + 3b^2}{2x^2 + 2cx - 3bx - 3bc}$$

Resolución:

Factorizando el numerador y denominador:

$$M = \frac{ax(2x-3b) + x^2(2x-3b) - b^2(2x-3b)}{(2x-3b)(x+c)}$$

$$M = \frac{(2x-3b)(ax+x^2-b^2)}{(2x-3b)(x+c)} \quad \therefore M = \frac{x^2+ax-b^2}{x+c}$$

2. Efectuar:

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$$

Resolución:

Transformando los denominadores de las dos últimas fracciones:

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\ = \frac{a^2(b-c) - b^2(a-c) + c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} \end{aligned}$$

Factorizando el numerador:

$$\begin{aligned} N &= a^2(b-c) - ab^2 + b^2c + ac^2 - bc^2 \\ N &= a^2(b-c) - a(b^2-c^2) + bc(b-c) \\ N &= (b-c)\{a^2 - ab - ac + bc\} \\ N &= (b-c)\{a(a-b) - c(a-b)\} \\ N &= (b-c)(a-b)(a-c) \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\frac{(b-c)(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1$$

3. Reducir:

$$M = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots + \frac{1}{(n+k-1)(n+k)}$$

Resolución:

Como los denominadores dan como diferencia los numeradores, podemos descomponer cada fracción de la siguiente manera:

$$M = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}$$

$$\Rightarrow M = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \quad \therefore M = \frac{k}{(n+k)n}$$

Otra forma de resolución:

Utilizando el criterio de la inducción:

Para 1 fracción: $M = \frac{1}{n(n+1)}$

Para 2 fracciones:

$$M = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+2+n}{n(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n(n+2)}$$

Para 3 fracciones:

$$M = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

$$M = \frac{2}{n(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{3}{n(n+3)}$$

Para k fracciones: $M = \frac{k}{n(n+k)}$

4. Efectuar: $M = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a^2 - b^2)} + \frac{b - 2a}{b - a} + \frac{7a}{3(a+b)}$

Resolución:

Transformando el primer denominador:

$$M = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2}{3(a+b)(a-b)} + \frac{2a-b}{a-b} = \frac{7a}{3(a+b)}$$

Hallando el MCM de los denominadores y efectuando:

$$M = \frac{4ab + 2b^2 - 12a^2 + 6a^2 - 3ab + 6ab - 3b^2 + 7a^2 - 7ab}{3(a+b)(a-b)}$$

Reduciendo en el numerador:

$$M = \frac{a^2 - b^2}{3(a+b)(a-b)} = \frac{(a+b)(a-b)}{3(a+b)(a-b)} \quad \therefore M = \frac{1}{3}$$

5. Si: $ab + bc + ac = 4abc$, dar el equivalente de $E = A + B + C$, donde:

$$A = \frac{(b+c)^2 + (a+c)^2 - (b-c)^2 - (a-c)^2}{(a+b)[(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - (b+c-a)^2 - (c-b-a)^2]}$$

$$B = \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 - (a-b)^2 - (a-c)^2}{(b+c)[(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - (a+b-c)^2 - (a-b-c)^2]}$$

$$C = \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 - (a-b)^2 - (a-c)^2}{(b+c)[(a+b+c)^2 + (a+c-b)^2 - (a+b-c)^2 - (a-b-c)^2]}$$

Resolución:

Agrupando en la forma indicada en la expresión A:

$$A = \frac{(b+c)^2 + (a+c)^2 - (b-c)^2 - (a-c)^2}{(a+b)[(a+b+c)^2 + (a-b+c)^2 - (b+c-a)^2 - (c-b-a)^2]}$$

Por Legendre en el numerador y denominador:

$$A = \frac{4bc + 4ac}{(a+b)[4c(a+b) + 4c(a-b)]} = \frac{4c(b+a)}{(a+b)[4c(a+b+a-b)]}$$

$$\text{Luego: } A = \frac{4c}{4c(2a)} = \frac{1}{2a}$$

Agrupando en forma conveniente en la expresión B:

$$B = \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 - (a-b)^2 - (a-c)^2}{(b+c)[(a+b+c)^2 + (a+b-c)^2 - (a-b+c)^2 - (a-b-c)^2]}$$

Por Legendre en el numerador y denominador:

$$B = \frac{4ab + 4ac}{(b+c)[4a(b+c) + 4a(b-c)]} = \frac{4a(b+c)}{(b+c)[4a(b+c+b-c)]}$$

$$\text{Luego: } B = \frac{1}{2b}$$

Agrupando en forma conveniente en la expresión C:

$$C = \frac{(a+b)^2 + (a+c)^2 - (a-b)^2 - (a-c)^2}{(b+c)[(a+b+c)^2 + (a+c-b)^2 - (a+b-c)^2 - (a-b-c)^2]}$$

Por Legendre en el numerador y denominador:

$$C = \frac{4ab + 4ac}{(b+c)[4a(c+b) + 4a(c-b)]} = \frac{4a(b+c)}{(b+c)[4a](c+b+c-b)}$$

$$\text{Luego: } C = \frac{1}{2c}$$

Reemplazando en la expresión pedida:

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{bc + ac + ab}{abc} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4abc}{abc} \right)$$

$$\therefore E = \frac{1}{2}(4) = 2$$

Descomposición de las fracciones racionales

Dada una fracción racional de una sola variable x , siempre podrá ser reemplazada, dividiendo su numerador por su denominador ordenados ambos según las potencias decrecientes, por una función entera de x (que puede ser nula), y por una fracción racional complementaria, en la cual el grado del numerador será menor que el grado del denominador.

Designaremos esta fracción racional:

$$\frac{f(x)}{F(x)} \quad \dots (1)$$

Se puede suponer siempre que esta fracción es irreducible, es decir que $f(x)$ y $F(x)$ son primos entre sí, y admitiremos además que se conocen las raíces de $F(x) = 0$ que se designarán por $a, b, c, \dots$ y sus grados de multiplicidad por $m, n, \dots$

En este capítulo vamos a tratar de la descomposición de las fracciones racionales de la forma antes dicha en fracciones simples.

Nos preguntamos: ¿es posible siempre expresar una función racional en fracciones simples? Si bien no hemos definido una fracción simple, la respuesta es afirmativa, pero debemos tener presente las siguientes consideraciones:

Recordemos algunos conceptos previos:

1. Un polinomio en la variable x es una expresión de la forma $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$, donde los a_i ($i = 0; \dots; n$) son números reales. El grado de este polinomio es n (mayor exponente), siempre que $a_0 \neq 0$.
2. Todo polinomio puede factorizarse en producto de polinomios cuadráticos o lineales. Esto equivale a decir que las raíces de cualquier polinomio son reales o complejas.
3. El cociente de dos funciones polinomiales se llama función racional. Si f es una función racional, entonces:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \quad \dots(2)$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios. Esta fracción se llama propia si el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$. En otro caso se llama impropia.

4. Toda fracción impropia (función racional) puede expresarse como la suma de un polinomio y una fracción propia (función racional).

Ejemplo:

Determinar qué clase de fracción es $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

Resolución:

Claramente f es impropia y si dividimos x^3 por $x+1$, obtenemos como cociente $x^2 - x + 1$ y como resto -1 . Sabemos que:

$$\text{dividendo} / \text{divisor} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}},$$

$$\text{Luego tenemos que: } \frac{x^3}{x+1} = x^2 - x + 1 + \frac{-1}{x+1}$$

lo cual comprueba que:

fracción propia = polinomio + fracción propia

Ahora, para convertir una fracción propia en fracciones simples se presentan 4 casos, a saber:

Caso 1

El denominador es un producto de factores lineales distintos. Diremos que a cada factor lineal diferente $ax + b$, que aparezca una vez en el denominador de una fracción propia, le corresponde una fracción propia de la forma $\frac{A}{ax+b}$, donde A es una constante que debemos determinar.

En otras palabras y considerando la notación anterior, diremos que si en la fracción propia $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $q(x)$ se expresa como un producto de factores lineales (grado 1) distintos de la forma:

$$q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \dots (a_nx + b_n),$$

Entonces:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \dots + \frac{A_n}{a_nx + b_n} \quad \dots(3)$$

Donde los números a_i , b_i y A_i ($i = 1; 2; \dots; n$) son constantes y debemos encontrar los valores A_i que verifiquen la igualdad (3).

Ejemplo:

$$\text{Descomponer: } \frac{1}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Resolución:

Primero debemos factorizar el denominador:

$$x^3 + x^2 - 2x = x(x-1)(x+2)$$

Luego: $\frac{1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2}$. Esta igualdad debe ser válida para todo x en el dominio de

$$\frac{1}{x^3 + x^2 - 2x}$$

Si multiplicamos por el MCM de los denominadores, obtenemos:

$$1 = A(x-1)(x+2) + B(x+2)x + Cx(x-1) \quad \dots(4)$$

A continuación presentamos un método abreviado que nos permita calcular las constantes A , B y C . Este consiste en asignar valores a x que nos permiten eliminar algunas constantes y calcular más fácilmente otras.

Por ejemplo: si en (4) hacemos $x = 1$, obtenemos $B = \frac{1}{3}$;

si $x = 2$, obtenemos $C = \frac{1}{6}$; si $x = 0$, obtenemos $A = \frac{1}{2}$;

luego:

$$\frac{1}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{-1/2}{x} + \frac{1/3}{x-1} + \frac{1/6}{x+2}$$

Caso 2

El denominador de una fracción propia contiene, factores lineales repetidos $ax + b$, n veces. La descomposición en fracciones parciales contiene términos de la forma:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

Donde A_i ($i = 1; \dots; n$) son constantes por determinar. Esto se produce cuando en la fracción propia:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad Q(x) = d(x-a)^n(x-b)^m \dots (x-k)^c,$$

y por lo menos uno de los exponentes es mayor que 1.

Ejemplo:

$$\text{Descomponer: } \frac{x+3}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+4)}$$

Resolución:

Factorizando al máximo el denominador obtenemos:

$$(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 4) = (x-1)^2(x+2)^2$$

Luego:

$$\frac{x+3}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{(x+2)^2}$$

Multiplicando por $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + 4x + 4)$ obtenemos:

$$x+3 = A(x-1)(x+2)^2 + B(x+2)^2 + C(x+2)(x-1)^2 + D(x-1)^2$$

El método no abreviado consiste en igualar los coeficientes de las potencias de x y resolver el sistema de ecuaciones que se obtiene, pero por supuesto optaremos por el abreviado que es más rápido y fácil.

Si $x = 1$; $B = \frac{4}{9}$; si $x = -2$; $D = \frac{1}{9}$. Como no hay otro

valor que permita eliminar las constantes y poder calcular otra, le asignamos a x , 2 valores cualesquiera para producir un sistema de ecuaciones, considerando que ya tenemos los valores de B y D .

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow 3 = -4A + 4B + 2C + D$$

Reemplazando los valores de B y D , obtenemos:

$$-36A + 18C = 10$$

De igual modo, si $x = -1$, obtenemos:

$$-18A + 36C = 10$$

Juntando ambas ecuaciones obtenemos un sistema de ecuaciones en dos variables, donde $C = \frac{5}{27}$ y $A = -\frac{5}{27}$.
Luego:

$$\frac{x+3}{(x^2-2x+1)(x^2+4x+4)} = \frac{-5/27}{x-1} + \frac{4/9}{(x-1)^2} + \frac{5/27}{x+2} + \frac{1/9}{(x+2)^2}$$

Caso 3

En este caso trabajaremos con factores cuadráticos diferentes, entonces a cada factor cuadrático irreducible $ax^2 + bx + c$, que aparezca una vez en el denominador de una fracción propia, le corresponde una fracción propia de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Donde A y B son constantes por determinar.

Recuerda que factor irreducible $ax^2 + bx + c$, significa que no se puede factorizar en los reales, o que sus raíces son complejas.

Ejemplo:

Descomponer: $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}$

Resolución:

Observemos que los factores del denominador son irreducibles, por lo tanto:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}, \text{ nos conduce a:}$$

$$1 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1)$$

El método más general para determinar las constantes consiste en igualar los respectivos coeficientes de los polinomios; en este caso:

$$1 = (A+C)x^3 + (B+D)x^2 + (2A+C)x + 2B+D$$

Igualando los coeficientes respectivos tenemos:

$$A + C = 0$$

$$2A + C = 0$$

$$B + D = 0$$

$$2B + D = 1$$

Cuya solución es: $C = 0$; $D = -1$; $B = 1$; $A = 0$.

Otra forma de resolverlo sería:

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow 1 = B(2) + D(1)$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow 1 = (B+A)(3) + (C+D)(2)$$

$$\text{Si } x = -1 \Rightarrow 1 = (-A+B)(3) + (-C+D)(2)$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow 1 = (2A+B)(6) + (2C+D)(5)$$

Resolviendo el sistema:

$$1 = 2B + D$$

$$1 = 3(B+A) + 2(C+D)$$

$$1 = 3(-A+B) + 2(-C+D)$$

$$1 = 6(2A+B) + 5(2C+D)$$

obtenemos: $A = 0$; $C = 0$; $B = 1$; $D = -1$.

Por lo tanto, la fracción se convierte en:

$$\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$$

Caso 4

Este caso es similar al anterior excepto que los factores cuadráticos irreducibles se repiten.

A cada factor cuadrático irreducible $(ax^2 + bx + c)^m$, con m entero mayor que 1, le corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots + \frac{A_mx+B_m}{(ax^2+bx+c)^m}$$

Donde los A_i y B_i ($i = 1; 2; \dots; n$) son constantes que debemos determinar.

Ejemplo:

Descomponer: $\frac{x^3}{(x-1)(x^2+x+1)^2}$

Resolución:

$F(x)$ está descompuesta en factores de primer y segundo grado, y las raíces de segundo grado son imaginarias conjugadas, así que tenemos:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)^2} + \frac{Dx+E}{(x^2+x+1)}$$

Multiplicando por $F(x)$ ambos miembros:

$$x^3 = A(x^2+x+1)^2 + (Bx+C)(x-1) + (Dx+E)(x-1)(x^2+x+1)$$

Desarrollando y agrupando:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x^3 = A & x^4 + 2A & x^3 + 3A & x^2 + 2A & x + A \\ & & +B & -B & \\ & & & +C & -C \\ D & & & -D & \\ & +E & & & -E \end{array}$$

De donde el sistema de ecuaciones será:

$$A + D = 0$$

$$2A + E = 1$$

$$3A + B = 0$$

$$2A - B + C - D = 0$$

$$A - C - E = 0$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$A = \frac{1}{9}, B = \frac{1}{3}, C = -\frac{2}{3}, D = -\frac{1}{9}, E = \frac{7}{9}$$

Y la descomposición será:

$$\frac{x^3}{(x-1)(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{9(x-1)} - \frac{x+2}{3(x^2+x+1)^2} - \frac{x-7}{9(x^2+x+1)}$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Simplificar: $\frac{x^3 + 4x^2 - 21x}{x^3 - 9x}$

Resolución:

Factorizando numerador y denominador:

$$\frac{x(x^2 + 4x - 21)}{x(x^2 - 9)} = \frac{x(x+7)(x-3)}{x(x+3)(x-3)} = \frac{x+7}{x+3}$$

2. Simplificar: $\frac{2ax + ay - 4bx - 2by}{ax - 4a - 2bx + 8b}$

Resolución:

Factorizando numerador y denominador:

$$\frac{a(2x+y) - 2b(2x+y)}{a(x-4) - 2b(x-4)} = \frac{(2x+y)(a-2b)}{(x-4)(a-2b)} = \frac{2x+y}{x-4}$$

3. Simplificar: $\frac{xy}{3x^2y - 3xy^2}$

Resolución:

Factorizando en este caso solo el denominador:

$$\frac{xy}{3xy(x-y)} = \frac{1}{3(x-y)}$$

4. Simplificar: $\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

Resolución:

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = x+1$$

5. Simplificar: $\frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{(a+c)^2 - (b-d)^2}$

Resolución:

$$\frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{(a+c)^2 - (b-d)^2} = \frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)}{(a+c+b-d)(a+c-b+d)} = \frac{a+b-c+d}{a-b+c+d}$$

6. Simplificar: $\frac{16a^2x - 25x}{12a^3 - 7a^2 - 10a}$

Resolución:

$$\frac{16a^2x - 25x}{a(12a^2 - 7a - 10)} = \frac{x(16a^2 - 25)}{a(4a-5)(3a+2)}$$

$$\frac{x(4a+5)(4a-5)}{a(4a-5)(3a+2)} = \frac{x(4a+5)}{a(3a+2)}$$

7. Simplificar: $\frac{a^3 - 25a}{2a^3 - 8a^2 - 10a}$

Resolución:

$$\frac{a(a^2 - 25)}{2a(a^2 - 4a - 5)} = \frac{a(a+5)(a-5)}{2a(a-5)(a+1)} = \frac{a+5}{2(a+1)}$$

8. Si $a^{-1} - 1$ se divide por $(a-1)$, hallar el cociente.

Resolución:

$$\frac{\frac{1}{a} - 1}{a - 1} = \frac{\frac{1-a}{a}}{a-1} = \frac{1-a}{a(a-1)} = \frac{a-1}{a(a-1)} = -\frac{1}{a}$$

9. Reducir: $\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2(x^3 - x)}{x^4 + x^3 - x - 1}$

Resolución:

Simplificando el segundo sumando:

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2x(x^2 - 1)}{x^3(x+1) - (x+1)}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2x(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^3 - 1)}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2x(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)(x^2 + x + 1)}$$

$$\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{2x}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 1} = 1$$

10. Simplificar: $\frac{a^3 + 3a^2 + 3a + 1}{a^4 - 2a^2 + 1}$

Resolución:

$$\frac{(a+1)^3}{(a^2-1)^2} = \frac{(a+1)^3}{[(a+1)(a-1)]^2} = \frac{(a+1)^3}{(a+1)^2(a-1)^2} = \frac{a+1}{(a-1)^2}$$

11. Reducir: $\frac{a - \frac{ab}{a+b}}{a + \frac{ab}{a-b}}$

Resolución:

Efectuando en el numerador y denominador por separado:

$$\frac{\frac{a^2 + ab - ab}{a+b}}{\frac{a^2 - ab + ab}{a-b}} = \frac{\frac{a^2}{a+b}}{\frac{a^2}{a-b}} = \frac{a-b}{a+b}$$

12. Si: $M = \left(\frac{a^{-2} - b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}}\right)^{-1}$ y $N = \left(\frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-2} + b^{-2}}\right)^{-1}$

hallar MN.

Resolución:

Transformando y reduciendo primero M:

$$M = \left(\frac{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}}{\frac{b+a}{ab}}\right)^{-1} = \frac{b+a}{\frac{b^2 - a^2}{ab}} = \frac{ab(a+b)}{b^2 - a^2}$$

$$M = \frac{ab(a+b)}{(b+a)(b-a)} = \frac{ab}{b-a}$$

Análogamente con N:

$$N = \left(\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}\right)^{-1} = \left(\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b^2 + a^2}{a^2b^2}}\right)^{-1} = \frac{b^2 + a^2}{\frac{b-a}{ab}}$$

$$N = \frac{b^2 + a^2}{ab(b-a)}$$

Se pide: $MN = \left(\frac{ab}{b-a} \right) \left(\frac{b^2 + a^2}{ab(b-a)} \right) = \frac{b^2 + a^2}{(b-a)^2}$

$\therefore MN = \frac{b^2 + a^2}{(a-b)^2}$

13. Simplificar: $\frac{(x-a)^2 + 2(a^2 + x^2) + (x+a)^2}{(x+a)^2 - (x-a)^2}$

y dar como respuesta el valor numérico para:

$x = \sqrt{3} - 1$ y $a = \sqrt{3} + 1$

Resolución:

Efectuando operaciones:

$$\begin{aligned} & \frac{\overbrace{(x-a)^2 + 2(a^2 + x^2) + (x+a)^2}^{\text{Legendre}}}{\underbrace{(x+a)^2 - (x-a)^2}_{\text{Legendre}}} \\ &= \frac{2(a^2 + x^2) + 2(a^2 + x^2)}{4ax} = \frac{4(a^2 + x^2)}{4ax} = \frac{a^2 + x^2}{ax} \end{aligned}$$

Reemplazando los valores numéricos respectivos, se tendrá:

$$\frac{(\sqrt{3} + 1)^2 + (\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{2(\sqrt{3}^2 + 1^2)}{3 - 1} = \frac{2(4)}{2} = 4$$

14. Si $a \cdot b = a^{-1} + b^{-1} + (ab)^{-1} - (a + b)$, hallar:

$(\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2})$

Resolución:

El operador $(\cdot)$ puede interpretarse:

$$a \cdot b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{ab} - (a + b)$$

En nuestro caso:

$a = \sqrt{3} + \sqrt{2}; b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{2}) &= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})} \\ &\quad - (\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \\ &= \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{2}}{3 - 2} + \frac{1}{3 - 2} - 2\sqrt{3} \\ &= 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

15. Si para todo $n \neq 1$, se cumple que:

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{A}{n + 1} + \frac{B}{n - 1}, \text{ calcular: } A + B$$

Resolución:

Efectuando operaciones en el segundo miembro:

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{A(n - 1) + B(n + 1)}{n^2 - 1}$$

De donde:

$1 \equiv An - A + Bn + B$

$1 \equiv (A + B)n + (B - A)$

También el primer miembro puede escribirse:

$(0)n + 1 \equiv (A + B)n + (B - A)$

$\therefore A + B = 0$

16. Si P_1 y P_2 son dos polinomios factorizables, definidos por:

$P_1(x) = ax^2 + 2x - b$

$P_2(x) = ax^2 - 4x + b$

Tal que "a" y "b" son números enteros positivos y

$MCM(P_1; P_2) = x^3 - x^2 - 9x + 9$, hallar el valor de:

$T = b^2 - a$

Resolución:

$P_1(x) = ax^2 + 2x - b; a, b \in \mathbb{Z}^+$

$P_2(x) = ax^2 - 4x + b$

$MCM(P_1; P_2) = x^3 - x^2 - 9x + 9$

$MCM(P_1; P_2) = (x - 1)(x + 3)(x - 3)$

Como: $\frac{P_1 P_2}{4.^\circ} = \underbrace{(MCD)}_{3.^\circ} \underbrace{(MCM)}_{4.^\circ}$

$\Rightarrow$ MCD es de grado 1.

$\Rightarrow P_1$ y P_2 tienen un factor común de 1.º grado

$\Rightarrow P_1 - P_2$ contiene a este

$P_1(x) = P_2(x) - 6x - 2b = 6(x - \frac{b}{3})$

Como $b \in \mathbb{Z}^+$, entonces:

$x - \frac{b}{3} \equiv x - 1 \vee x - \frac{b}{3} \equiv x - 3$

$b = 3 \quad \vee \quad b = 9$

$b = 3: P_1(x) = ax^2 + 2x - 3$

$P_2(x) = ax^2 - 4x + 3$

Contienen al factor $(x - 1) \Rightarrow a = 1$

$b = 9: P_1(x) = ax^2 + 2x - 9$

$P_2(x) = ax^2 - 4x + 9$

Contienen al factor $(x - 3)$; pero esto no es posible, pues:

$P_1(3) = 9a + 6 - 9 = 0 \Rightarrow a = 1/3; a \notin \mathbb{Z}^+$

$\therefore T = b^2 - a = 3^2 - 1 = 8$

17. Si P y Q son dos polinomios factorizables, definidos por:

$P(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 14x + 8$

$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 21x + 12$

hallar la suma de los coeficientes del MCD(P ; Q).

Resolución:

Factorizando cada polinomio:

$P(x) = x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 14x + 8$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \times & 3x & 4 & \text{Falta: } 6x^2 \\ x^2 & \times & 2x & 2 & 6x^2 \end{array}$$

$\Rightarrow P(x) = (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 2x + 2)$

$Q(x) = x^4 + 6x^3 + 16x^2 + 21x + 12$

$$\begin{array}{ccc} x^2 & \times & 3x & 4 & \text{Falta: } 7x^2 \\ x^2 & \times & 3x & 3 & 9x^2 \end{array}$$

$\Rightarrow Q(x) = (x^2 + 3x + 4)(x^2 + 3x + 3)$

Luego: $MCD(P; Q) = x^2 + 3x + 4$

$\therefore \Sigma \text{coef.}(MCD) = 8$

18. Si P y Q son polinomios factorizables, definidos por:

$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

$Q(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$

hallar el término independiente del MCD(P ; Q).

Resolución:

Factorizando cada polinomio:

$$P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$$

$$P(x) = x^2(x-3) - (x-3) = (x-3)(x^2-1)$$

$$\Rightarrow P(x) = (x-3)(x+1)(x-1)$$

$$Q(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$$

$$\begin{array}{r|rrrr} x & 1 & -1 & -5 & -3 \\ & \downarrow & & & \\ x & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x+1)(x^2-2x-3)$$

$$\begin{array}{r} x & -3 \\ x & 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q(x) = (x+1)^2(x-3)$$

$$\text{Luego: MCD}(P; Q) = (x+1)(x-3)$$

$$\therefore \text{TI}(\text{MCD}) = \text{MCD}(0) = -3$$

19. Determinar cuál (o cuáles) de las siguientes proposiciones son correctas:

- I. Si P y Q son polinomios definidos por:

$$P(x) = (x-1)^2(x+3)^4 \wedge Q(x) = (x-1)^3(x+3)^2;$$

$$\text{entonces el MCD}(P; Q) = (x-1)^2(x+3)^2$$

- II. Si $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ es un polinomio factorizable, entonces $(x+1)$ es un factor.

- III. $(x^{155} - a^{93}) \div (x^5 - a^3)$ origina un cociente notable.

Resolución:

- i. Si $P(x) = (x-1)^2(x+3)^4 \wedge Q(x) = (x-1)^3(x+3)^2$, entonces: $\text{MCD}(P; Q) = (x-1)^2(x+3)^2$ (V)

- II. $P(x) = x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2-1)(x^2-4)$

$$P(x) = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

$$\Rightarrow x+1 \text{ es un factor (primo).} \quad (\text{V})$$

- III. $\frac{x^{155} - a^{93}}{x^5 - a^3}$ no origina CN, pues $\frac{155}{5} \neq \frac{93}{6}$ (F)

$\therefore$ Son correctas: I y II

20. Si: $P(x) = ax^2 - 4x + b$; $Q(x) = ax^2 + 2x - b \wedge \text{MCD}(P; Q) = x^3 - x^2 - 9x + 9$, calcular: $T = a + b$

Resolución:

$$\text{MCD}(P; Q) = x^3 - x^2 - 9x + 9$$

$$\text{MCD}(P; Q) = (x-1)(x+3)(x-3)$$

$$P(x) = ax^2 - 4x + b = (x-1)(x-3)$$

$$Q(x) = ax^2 + 2x - b = (x-1)(x+3)$$

$$\Rightarrow a = 1 \wedge b = 3$$

$$\therefore T = a + b = 4$$

21. Determine al MCD para los polinomios:

$$P(x) = x^4 + 1$$

$$Q(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + x$$

$$H(x) = x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 4x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$$

Dar como respuesta el coeficiente irracional del MCD.

Resolución:

 Factorizando en $\mathbb{R}$:

$$P(x) = x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$$

$$P(x) = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2$$

$$P(x) = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$Q(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 + x = x(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$H(x) = x^4 - 2\sqrt{2}x^3 + 4x^2 - 2\sqrt{2}x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 & -\sqrt{2}x & 1 \\ x^2 & -\sqrt{2}x & 1 \end{array}$$

$$H(x) = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)^2$$

$$\text{MCD}(P; Q; H) = x^2 - \sqrt{2}x + 1$$

$$\therefore \text{El coeficiente irracional: } -\sqrt{2}$$

22. Sean los polinomios: $P(x) = Ax^2 - x - B \wedge Q(x) = Ax^2 - 5x + B$, con valores de A y B enteros positivos. Si el $\text{MCM}(P; Q) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$, hallar el valor de: $T = 3B + 6A$

Resolución:

$$P(x) = Ax^2 - x - B; A, B \in \mathbb{Z}^+$$

$$Q(x) = Ax^2 - 5x + B$$

$$\text{MCM}(P; Q) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

$$\text{MCM}(P; Q) = (x-3)(x+2)(x-2)$$

De donde:

$$P(x) = Ax^2 - x - B = (x-3)(x+2)$$

$$Q(x) = Ax^2 - 5x + B = (x-3)(x-2)$$

$$\text{Luego: } A = 1 \wedge B = 6$$

$$\therefore T = 3B + 6A = 18 + 6 = 24$$

23. Dar la suma de los coeficientes del MCM de los polinomios.

$$P(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1$$

$$Q(x) = (x^2 + x + 1)^3(x+1)$$

Resolución:

Factorizando cada polinomio:

$$P(x) = x^4 - x^2 - 2x - 1 = x^4 - (x^2 + 2x + 1)$$

$$P(x) = x^4 - (x+1)^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1)$$

$$Q(x) = (x^2 + x + 1)^3(x+1)$$

$$\Rightarrow \text{MCM}(P; Q) = (x^2 + x + 1)^3(x^2 - x - 1)(x+1)$$

La suma de coeficientes del MCM es:

$$\text{MCM}(1) = (3)^3(-1)(2) = -54$$

24. Si P y Q son dos polinomios factorizables, definidos por:

$$P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 9$$

$$Q(x) = 10x^3 - 9x^2 + 17x - 6$$

hallar el coeficiente de mayor valor absoluto del $\text{MCD}(P; Q)$.

Resolución:

Factorizando cada polinomio:

$$P(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 3x - 9$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 & -x & 3 \\ x^2 & 0x & -3 \end{array} \quad \text{falta: } 0x^2$$

$$\Rightarrow P(x) = (2x^2 - x + 3)(x^2 - 3)$$

$$Q(x) = 10x^3 - 9x^2 + 17x - 6$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 10 & -9 & 17 & -6 \\
 5 & \downarrow & 4 & -2 & 6 \\
 \hline
 & 10 & -5 & 15 & 0 \\
 \hline
 :5 & 2 & -1 & 3 &
 \end{array}$$

$$\Rightarrow Q(x) = (2x - 5)(2x^2 - x + 3)$$

$$\text{Luego: } \text{MCD}(P; Q) = 2x^2 - x + 3$$

$\therefore$ El coeficiente de mayor valor absoluto es 3.

25. Si P, Q y R son tres polinomios factorizables, definidos por:

$$P(x; y) = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$$

$$Q(x; y) = 3x^3 + 5x^2y + xy^2 - y^3$$

$$R(x; y) = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4$$

hallar el $\text{MCD}(P; Q; R)$.

Resolución:

Factorizando cada polinomio:

$$P(x; y) = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$$

$$\Rightarrow P(x; y) = x(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = x(x + y)^3$$

$$Q(x; y) = 3x^3 + 5x^2y + xy^2 - y^3$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 -y & 3 & 5y & y^2 & -y^3 \\
 & \downarrow & -3y & -2y^2 & y^3 \\
 \hline
 & 3 & 2y & -y^2 & 0
 \end{array}$$

$$Q(x; y) = (x + y)(3x^2 + 2xy - y^2)$$

$$\Rightarrow Q(x; y) = (x + y)^2(3x - y)$$

$$R(x; y) = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4$$

$$R(x; y) = x(x^3 + y^3) + y(x^3 + y^3)$$

$$R(x; y) = (x + y)(x^3 + y^3)$$

$$\Rightarrow R(x; y) = (x + y)^2(x^2 - xy + y^2)$$

$$\therefore \text{MCD}(P; Q; R) = (x + y)^2$$

26. Si el producto de dos polinomios es $x^4 - 18x^2 + 81$ y el cociente de su MCM y MCD es $x^2 - 6x + 9$, hallar el MCD de dichos polinomios.

Resolución:

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ los polinomios:

$$P(x)Q(x) = x^4 - 18x^2 + 81$$

$$\frac{\text{MCM}(P; Q)}{\text{MCD}(P; Q)} = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$$

Por propiedad:

$$P(x)Q(x) = \text{MCD}(P; Q) \times \text{MCM}(P; Q)$$

$$\Rightarrow \text{MCD}(P; Q) \times \text{MCM}(P; Q) = x^4 - 18x^2 + 81$$

$$\Rightarrow \text{MCD}(P; Q) \times \text{MCM}(P; Q) = (x + 3)^2(x - 3)^2$$

$$\text{Pero: } \text{MCM}(P; Q) = (x - 3)^2 \text{MCD}(P; Q)$$

Reemplazando:

$$\text{MCD}(P; Q)[(x - 3)^2 \text{MCD}(P; Q)] = (x + 3)^2(x - 3)^2$$

$$\Rightarrow [\text{MCD}(P; Q)]^2 = (x + 3)^2$$

$$\therefore \text{MCD}(P; Q) = x + 3$$

27. El MCM y el MCD de dos polinomios son $(a - b)$ y $(a^4 - ab^3 + a^3b - b^4)$. Si uno de los polinomios es $a^2 - b^2$, determinar el otro polinomio.

Resolución:

Sean los polinomios: P y Q

$$\text{MCD}(P; Q) = a - b, \text{MCM}(P; Q) = a^4 - ab^3 + a^3b - b^4$$

$$\Rightarrow \text{MCM} = (a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Por propiedad: } PQ = [\text{MCD}(P; Q)][\text{MCM}(P; Q)]$$

Sea: $P(a; b) = a^2 - b^2$, reemplazando:

$$(a^2 - b^2)Q = (a - b)(a + b)(a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\Rightarrow Q(a; b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore Q(a; b) = a^3 - b^3$$

28. Si los polinomios:

$$P(x) = 6x^4 + 4x^3 + 5x^2 + mx + n$$

$$R(x) = 2mx^3 + 2nx^2 + px - q$$

admiten como MCD a $2x^2 + 2x + 1$, hallar un divisor de $R(x)$.

Resolución:

MCD es factor de P y R.

$$\Rightarrow \frac{P}{\text{MCD}} \text{ es una división exacta.}$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 6 & 4 & 5 & m & n \\
 -2 & \swarrow & -6 & -3 & & \\
 -1 & & -2 & \frac{2}{4} & 1 & \\
 \hline
 & 3 & -1 & 2 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\text{De donde: } \frac{P}{\text{MCD}} = 3x^2 - x + 2$$

También: $\frac{R}{\text{MCD}}$ es una división exacta, donde:

$$R(x) = 6x^3 + 4x^2 + px - q$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 6 & 4 & p & -q \\
 -2 & \swarrow & -6 & -3 & \\
 -1 & & -2 & & \\
 \hline
 & 3 & -1 & 0 & 0
 \end{array}$$

$$\Rightarrow R(x) = (2x^2 + 2x + 1)(3x - 1)$$

$$\therefore \text{Un divisor de R es: } 3x - 1$$

29. Si el MCD de los polinomios:

$$F(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + a \wedge G(x) = x^3 + x^2 + b$$

$$\text{es } x^2 - x + 2; \text{ determinar: } E = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Resolución:

$$F(x) = 2x^3 - x^2 + 3x + a$$

$$G(x) = x^3 + x^2 + b$$

$$\text{MCD}(F; G) = x^2 - x + 2$$

Como MCD es factor de F y G

$$\Rightarrow F(x) = (x^2 - x + 2)q_1(x)$$

$$G(x) = (x^2 - x + 2)q_2(x)$$

$$\Rightarrow F(x) = (x^2 - x + 2)(2x + \frac{a}{2})$$

$$\frac{a}{2}x^2 - 2x^2 = -x^2 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow G(x) = (x^2 - x + 2)(x + \frac{b}{2})$$

$$\frac{b}{2}x^2 - x^2 = x^2 \Rightarrow b = 4$$

$$\therefore E = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

30. Reducir la siguiente expresión:

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + x} - \frac{x^2 + 2}{2x^2 - x - 1} + \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

Resolución:

Factorizando los denominadores, resulta:

$$A = \frac{x^2 + x + 1}{x(2x + 1)} - \frac{x^2 + 2}{(2x + 1)(x - 1)} + \frac{2x - 1}{x(x - 1)}$$

Se obtiene como MCM de las tres fracciones:

$$x(2x + 1)(x - 1)$$

$$A = \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x^2 + 2) + (2x + 1)(2x - 1)}{x(2x + 1)(x - 1)}$$

Efectuando operaciones y reduciendo:

$$A = \frac{x^3 - 1 - x^3 - 2x + 4x^2 - 1}{x(2x + 1)(x - 1)}$$

$$A = \frac{4x^2 - 2x - 2}{x(2x + 1)(x - 1)} = \frac{2(2x^2 - x - 1)}{x(2x^2 - x - 1)} = \frac{2}{x}$$

$$\therefore A = \frac{2}{x}$$

31. Obtener la suma de las fracciones:

$$R = \frac{2x + 4}{x^2 + 2x - 3} + \frac{1}{x^2 + 4x + 3} + \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

Resolución:

Factorizando y buscando el MCM de los denominadores:

$$R = \frac{2x + 4}{(x + 3)(x - 1)} + \frac{1}{(x + 1)(x + 3)} + \frac{x + 2}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(x + 1)(2x + 4) + (x - 1) + (x + 3)(x + 2)}{(x + 3)(x + 1)(x - 1)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{2x^2 + 6x + 4 + x - 1 + x^2 + 5x + 6}{(x + 3)(x + 1)(x - 1)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3x^2 + 12x + 9}{(x + 3)(x + 1)(x - 1)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{3(x + 1)(x + 3)}{(x + 3)(x + 1)(x - 1)} \quad \therefore R = \frac{3}{x - 1}$$

32. De la descomposición parcial mostrada:

$$\frac{8x - 11}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{2x - 1}$$

calcular el valor de $(A + B)$.

Resolución:

Efectuando operaciones e identificando:

$$8x - 11 = A(2x - 1) + B(x + 3)$$

Tomando valor numérico en ambos miembros:

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow -7 = B\left(\frac{7}{2}\right) \Rightarrow B = -2$$

$$x = -3 \Rightarrow -35 = A(-7) \Rightarrow A = 5 \quad \therefore A + B = 3$$

33. Calcular el producto resultante de:

$$P = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)\left(1 + \frac{1}{x+2}\right)\dots\left(1 + \frac{1}{x+n}\right)$$

Resolución:

Efectuando operaciones en cada factor:

$$P = \left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\left(\frac{x+3}{x+2}\right)\dots\left(\frac{x+n}{x+n-1}\right)\left(\frac{x+n-1}{x+n}\right)$$

$$\therefore P = \frac{x+n+1}{x}$$

34. Calcular la suma de la serie de Stirling.

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n^2 + n}$$

Resolución:

Expresando la serie finita del siguiente modo:

$$S = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

De los numeradores, se deduce que:

$$S = \frac{2-1}{1 \times 2} + \frac{3-2}{2 \times 3} + \frac{4-3}{3 \times 4} + \dots + \frac{(n+1)-n}{n(n+1)}$$

Desdoblado cada fracción, se tiene:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \dots - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Luego: } S = 1 - \frac{1}{n+1} \quad \therefore S = \frac{n}{n+1}$$

35. Señale la fracción irreducible:

$$R = \frac{x^3 + (2a + b)x^2 + a(a + 2b)x + a^2b}{x^3 + (a + 2b)x^2 + b(b + 2a)x + ab^2}$$

Resolución:

Efectuando operaciones y factorizando:

$$R = \frac{x^3 + 2ax^2 + bx^2 + a^2x + 2abx + a^2b}{x^3 + ax^2 + 2bx^2 + b^2x + 2abx + ab^2}$$

$$R = \frac{x^2(x + b) + 2ax(x + b) + a^2(x + b)}{x^2(x + a) + 2bx(x + a) + b^2(x + a)}$$

$$R = \frac{(x + b)(x^2 + 2ax + a^2)}{(x + a)(x^2 + 2bx + b^2)} = \frac{(x + b)(x + a)^2}{(x + a)(x + b)^2}$$

$$\therefore R = \frac{x + a}{x + b}$$

36. Reducir la expresión:

$$T = \frac{a^2 + ab + b^2}{(c - a)(c - b)} + \frac{b^2 + bc + c^2}{(a - b)(a - c)} + \frac{c^2 + ca + a^2}{(b - a)(b - c)}$$

Resolución:

Cambiando de signo a las fracciones:

$$T = -\frac{a^2 + ab + b^2}{(c - a)(b - c)} - \frac{b^2 + bc + c^2}{(a - b)(c - a)} - \frac{c^2 + ca + a^2}{(a - b)(b - c)}$$

Como el MCM = $(a - b)(b - c)(c - a)$, se tiene:

$$T = \frac{-[(a - b)(a^2 + ab + b^2) + (b - c)(b^2 + bc + c^2) + (c - a)(c^2 + ca + a^2)]}{(a - b)(b - c)(c - a)}$$

Por diferencia de cubos, resulta:

$$T = \frac{-(a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3)}{(a - b)(b - c)(c - a)} \quad \therefore T = 0$$

**PROBLEMA 1 (UNI 1984 - I)**

Hallar el MCD de las siguientes expresiones:

$$C = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4$$

$$B = 3x^3 + 5x^2y + xy^2 - y^3$$

$$A = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$$

A) $x + y$ B) $x^2 + y^2$ C) $(x + y)^2$

D) $x^2 - y^2$ E) $2x + y$

Resolución:

Factorizando cada una de las expresiones por separado:

$$C = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4 = x(x^3 + y^3) + y(x^3 + y^3)$$

$$C = (x^3 + y^3)(x + y) = C = (x + y)^2(x^2 - xy + y^2)$$

$$B = 3x^3 + 3x^2y + 2x^2y + xy^2 - y^3$$

$$B = 3x^2(x + y) + y(2x^2 + xy - y^2)$$

$$B = 3x^2(x + y) + y(2x - y)(x + y)$$

$$B = (x + y)(3x^2 + 2xy - y^2) = (x + y)^2(3x - y)$$

$$A = x(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = x(x + y)^3$$

$$\therefore \text{MCD}(A, B, C) = (x + y)^2$$

Clave: C**PROBLEMA 2 (UNI 1987)**

Hallar el MCD de la siguiente expresión:

$$a^{-1}x^{n-1}; b^{-1}x^{n-2}; c^{-1}x^{n-3}$$

A) $abcx^n$ B) $x^n/(abc)$ C) x^{n-3}

D) x^{n-2} E) x^{n-1}

Resolución:Por teoría el MCD será: x^{n-3} **Clave: C****PROBLEMA 3 (UNI 1988)**

Hallar el MCD de:

I. $5x^3 - 5x^2 + 2x - 2$

II. $2x^3 + 2x^2 - 2x - 2$

III. $x^4 + x^3 - x^2 - x$

A) $x^2 - 1$ B) $x - 2$ C) $x - 3$

D) $x - 1$ E) $x^2 + 1$

Resolución:

Factorizando el primer polinomio:

$$5x^2(x - 1) + 2(x - 1) = (x - 1)(5x^2 + 2) \quad \dots(I)$$

Lo mismo con el segundo:

$$2x^2(x + 1) - 2(x + 1) = 2(x + 1)(x^2 - 1)$$

$$2x^2(x + 1) - 2(x + 1) = 2(x + 1)^2(x - 1) \quad \dots(II)$$

Y con el tercero:

$$x^3(x + 1) - x(x + 1) = x(x + 1)(x^2 - 1)$$

$$x^3(x + 1) - x(x + 1) = x(x + 1)^2(x - 1) \quad \dots(III)$$

De I, II y III, se concluye que el MCD = $x - 1$ **Clave: D****PROBLEMA 4 (UNI 1987)**Si: $\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{A}{n + 1} + \frac{B}{n - 1}$, entonces:

A) $A + B = 0 \wedge B - A = 1$

B) $A + B = 0 \wedge A - B = 1$

C) $A + B = 1 \wedge B - A = 0$

D) $A + B = 1 \wedge A - B = 1$

E) $A + B = 1 \wedge B - A = -1$

Resolución:

Efectuando en el segundo miembro y transformando en el primero, se tendrá:

$$\frac{1}{(n + 1)(n - 1)} < \frac{A(n - 1) + B(n + 1)}{(n + 1)(n - 1)}; n \neq -1; 1$$

Entonces: $A(n - 1) + B(n + 1) < 1$

Dando valores adecuados:

Para $n = 1 \Rightarrow B = 1/2$

Para $n = -1 \Rightarrow A = -1/2$

Luego: $A + B = 0 \wedge B - A = 1$

Clave: A**PROBLEMA 5 (UNI 1988)**

$$\text{Si: } A = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) \left(\frac{x^2+1}{2a^2-2b} \right) : \frac{2x}{a^2-b}$$

$$B = \frac{x-1}{x+2 - \frac{x^2+2}{x - \frac{x-2}{x+1}}}$$

calcular: $A + B$

A) $x - \frac{1}{2}$ B) $\frac{x-1}{2}$ C) $x + \frac{1}{2}$

D) $x + 1$ E) $x - 1$

Resolución:

Simplificando:

$$A = \left[\frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{x^2 - 1} \right] \left[\frac{x^2 + 1}{2(a^2 - b)} \right] \left(\frac{a^2 - b}{2x} \right)$$

$$A = \left[\frac{4x}{2(x^2 + 1)} \right] \left(\frac{x^2 + 1}{4x} \right) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

$$B = \frac{x+1}{x+2 - \frac{(x^2+2)(x+1)}{x^2+2}} \Rightarrow B = x - 1$$

$$\therefore A + B = x - \frac{1}{2}$$

Clave: A



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Reducir:

$$M = \frac{a^2 - (b-c)^2}{(a+c)^2 - b^2} + \frac{b^2 - (a-c)^2}{(b+a)^2 - c^2} + \frac{c^2 - (a-b)^2}{(b+c)^2 - a^2}$$

- A) 1 B) -1 C) $a+b+c$
D) $a-b+c$ E) $1/2$

2. Efectuar:

$$C = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 - b^2} + \frac{a^2 + 3b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{b^2 - a^2}$$

- A) $a-b$ B) 1 C) 2
D) 3 E) $a+b$

3. Reducir:
- $\frac{\left(\frac{9}{6}\right) - \left(\frac{8}{6}\right)}{\left(\frac{8}{5}\right)}$

- A) 1 B) -1 C) 2 D) -2 E) $1/2$

4. Hallar el MCD de:

$$P(x) = x^3 - 1 \quad \wedge \quad Q(x) = x^4 + x^2 + 1$$

- A) $x^2 + x + 1$ B) $x^2 + 1$ C) $x - 1$
D) $x^2 - x + 1$ E) $x^2 - 1$

5. Hallar el número de factores primos en que se descompone el MCM de los polinomios:

$$P(x) = x^2 - 3x + 3$$

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6$$

$$R(x) = x^2 - 4x + 3$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

6. Hallar la suma de coeficientes de MCM de:

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 24 \quad \wedge \quad x^3 + 2x^2 - 13x + 10$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

7. Simplificar:
- $\left(\frac{a^4 - 27a}{a^2 + 7a - 30}\right) \left(\frac{a^2 + 20a + 100}{a^3 + 3a^2 + 9a}\right) \div \frac{a^2 - 100}{a - 3}$

- A) $\frac{a+3}{a-10}$ B) $\frac{a-3}{a+10}$ C) $\frac{a-3}{a+3}$
D) $\frac{a-3}{a-10}$ E) 1

8. Si el MCD de:

$$x^4 + 2x^3 - px^2 + qx + r \quad \wedge \quad x^3 + 7x^2 - qx + 20$$

es $(x^2 + 3x + 5)$, hallar pqr.

- A) -340 B) 340 C) 680
D) -680 E) 170

9. El producto de dos polinomios es
- $(x^2 - 1)^2$
- y el cociente de su MCM y MCD es
- $(x-1)^2$
- . Calcular el MCD.

- A) $x + 1$ B) $x^2 + 1$ C) $-(x+1)$ D) $x - 1$
E) $-(x-1)$

10. Hallar el MCM de:

$$P(x; y; z) = x^4 y^5 z \quad \wedge \quad Q(x; y; w) = x^2 y^2 w$$

- A) $x^4 y^5 zw$ B) $x^2 y^2 zw$ C) xy
D) $x^2 y^2$ E) $xyzw$

11. El producto de dos polinomios es
- $(x^6 - 2x^3 + 1)$
- y el cociente de su MCM y su MCD es
- $(x-1)^2$
- . Hallar el MCD.

- A) $x^2 - x + 1$ B) $x^2 + x - 1$ C) $x^2 + x + 1$
D) $-x^2 - x + 1$ E) $-x^2 + x + 1$

12. Hallar la suma de coeficientes del MCM de:

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 24 \quad \wedge \quad x^3 + 2x^2 - 13x + 10$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

13. Efectuar:
- $\frac{b^{-1} + (ab)^{-1}}{1 + (ab)^{-1}} + \frac{b+1}{b+a^{-1}} - 1$
- . Dar como respuesta el numerador.

- A) 2b B) 2a C) $ab + 10$
D) $ab - 1$ E) 17

14. Efectuar:
- $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} - \frac{2x-5}{x^2-5x+6}$

- A) $x - 2$ B) $x - 3$ C) 0
D) 1 E) $x^2 - 5x + 6$

15. Efectuar:
- $\frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{x^3+1} - \frac{x^2+x+3}{x^4+x^2+1}$

- A) $x + 2$ B) $x + 1$ C) $x - 1$
D) $(x+1)^{-1}$ E) $(x-1)^{-1}$

16. Hallar el MCM de:

$$P(x) = x^2 - 2x - 15$$

$$Q(x) = x^2 - 25$$

$$R(x) = 4ax^2 + 40ax + 100a$$

- A) $(x+3)(x-5)$ B) $4a(x+3)(x-5)(x+5)^2$
C) $4a(x+3)(x+5)$ D) $(x+3)(x-5)(x+5)$
E) $4(x+3)(x+5)(x-5)$

17. Encontrar el MCD de los polinomios:

$$A(x) = x^4 - 3x^2 + 2 \quad \wedge \quad B(x) = x^4 + x^3 - x - 1$$

- A) $x^2 - 1$ B) $x^2 + 1$ C) $x + 1$
D) $x - 1$ E) $x^2 + x - 1$

18. Hallar el MCD de las siguientes expresiones:

$$a^{-1}x^{n-1}; \quad b^{-1}x^{n-2}; \quad c^{-1}x^{n-3}$$

- A) $abcx^n$ B) $\frac{x^n}{abc}$ C) x^{n-3}
D) x^{n-2} E) x^{n-1}

19. Encontrar el MCD de los polinomios:

$$R(x) = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$S(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$$

$$T(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$A) x^2 - x - 1 \quad B) x^2 + x - 1 \quad C) x^2 - x - 2$$

$$D) x^2 + x + 2 \quad E) x - 1$$

20. Hallar el MCD de los polinomios:

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5 \quad Q(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$$

$$A) (x^2 + 2) \quad B) (x^2 + 3) \quad C) (x^2 - 1)$$

$$D) (x^2 + 4) \quad E) (x^2 - 8)$$

21. Calcular el valor de la expresión:
- $\frac{a+2m}{a-2m} + \frac{a+2n}{a-2n}$
- ;

$$\text{cuando: } a = \frac{4mn}{m+n}$$

$$A) 1 \quad B) 0 \quad C) 4mn$$

$$D) m+n \quad E) 2$$

22. El producto de dos polinomios es
- $(x^2 - 1)^2$
- y el cociente de su MCM y MCD es
- $(x - 1)^2$
- . Calcular el MCD.

$$A) x + 1 \quad B) x^2 + 1 \quad C) -(x + 1)$$

$$D) x - 1 \quad E) -(x - 1)$$

23. Si:
- $x = \frac{a+1}{ab+1} \wedge y = \frac{ab+a}{ab+1}$
- , calcular:
- $\frac{x+y-1}{x-y+1}$

$$A) 0 \quad B) a \quad C) 1$$

$$D) ab \quad E) ab + 1$$

24. Calcular el valor de
- $(a^2 + b^2)$
- si se sabe que la fracción:

$$\frac{3ax^5 + (a+2b)y^4 + 9z^9}{2ax^5 + 4y^4 + (4a-b)z^9}$$

es independiente de sus variables (x, y, z) .

$$A) 2 \quad B) 16 \quad C) 8$$

$$D) 24 \quad E) 12$$

25. El MCD de:

$$x^4 + 2x^3 - mx^2 + nx + p \quad \wedge \quad x^3 + 7x^2 - nx + 20$$

es $(x^2 + 3x + 5)$, hallar: $m + n + p$

$$A) 40 \quad B) -40 \quad C) -35$$

$$D) 35 \quad E) 50$$

26. Hallar el MCD y MCM de:

$$P = 3x^3 + x^2 - 8x + 4 \quad \wedge \quad Q = 3x^3 + 7x^2 - 4$$

e indicar el producto de sus factores no comunes.

$$A) 3x - 2 \quad B) 2x - 1 \quad C) 2x + 1$$

$$D) x^2 - 1 \quad E) x^2 + 1$$

27. Si el VN de la expresión:
- $\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \left(\frac{1 - \frac{x+y}{x-y}}{1 + \frac{x-y}{x+y}}\right)$
- es 2,

hallar la relación entre x e y .

$$A) x - y = 0 \quad B) x - y = 1$$

$$C) 2x + y = 0 \quad D) 3x - y = 2$$

$$E) x + y = 1$$

28. Hallar el MCD de:
- $P(x) = x^3 - 1 \quad Q(x) = x^4 + x^2 + 1$

$$A) x^2 + x + 1 \quad B) x^2 + 1 \quad C) x - 1$$

$$D) x^2 - x + 1 \quad E) x^2 - 1$$

29. Calcular el valor de:
- $\frac{a^n}{2na^n - 2nx} + \frac{b^n}{2nb^n - 2nx}$

$$\text{para } x = \frac{a^n + b^n}{2}$$

$$A) n \quad B) 2/n \quad C) -2/n$$

$$D) 1/n \quad E) 0$$

30. Hallar el MCD de los polinomios:

$$P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \quad \wedge \quad Q(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$A) x - 1 \quad B) x + 1 \quad C) x - 2$$

$$D) x - 5 \quad E) x + 5$$

31. Dado el polinomio
- $P(x) = x^2 - 2x + 1$
- , si

$$\text{MCM}[P(x); Q(x)] \text{MCD}[P(x); Q(x)] = 2x^5 + x^3 + 2x^2 + ax + b$$

calcular la suma de coeficientes de $Q(x)$.

$$A) 24 \quad B) 25 \quad C) 20$$

$$D) 10 \quad E) 14$$

32. Luego de simplificar:
- $\frac{2x^5 + x^4 + 7x^2 - 3}{x^4 + 3x - 2}$

señalar la suma de los términos lineales del numerador y denominador.

$$A) x \quad B) 2x \quad C) 3x$$

$$D) 4x \quad E) -x$$

33. Hallar el equivalente reducido de:

$$\frac{1 + n^3}{n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 1} - \frac{n^2 + 2n - 1 - 2n^3}{n^3 + 1}$$

$$A) n^3 + 1 \quad B) n^3 + 3 \quad C) 2n^3$$

$$D) 2 \quad E) 2n^3 + 1$$

34. Reduzca

$$\frac{1}{1 + a^{n-m} + a^{p-m}} + \frac{1}{1 + a^{m-n} + a^{p-n}} + \frac{1}{1 + a^{m-p} + a^{n-p}}$$

$$A) 1 + a \quad B) 3 \quad C) a^m$$

$$D) a \quad E) 1$$

35. Indicar el valor reducido de:

$$P(x) = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} +$$

$$\frac{(x-a)(x-b)(x-d)}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{(x-a)(x-c)(x-d)}{(b-a)(b-c)(b-d)}$$

$$A) x - a - b - c - d \quad B) (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

$$C) x + a + b + c + d \quad D) 1$$

$$E) a + b + c + d$$

36. Hallar:
- $m^2 + n^2 + p^2$
- , si las expresiones:

$$\frac{n}{x-2} + \frac{p}{x-3} + \frac{m}{x-1} \quad \wedge \quad \frac{x^2 - 10x + 13}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

tienen los mismos valores numéricos, $\forall x \neq 1; 2; 3$.

- A) 1 B) 29 C) 5
D) 7 E) 24

37. Hallar una de las fracciones parciales e irreducibles de: $\frac{3x^2 + x - 2}{(1 - 2x)(x - 2)^2}$.

- A) $\frac{1}{(x - 2)^2}$ B) $\frac{5}{(x - 2)^2}$ C) $\frac{-5}{1 - 2x}$
D) $-\frac{5}{3(x - 2)}$ E) $\frac{4}{3(x - 2)}$

38. Para que la fracción: $\frac{(\alpha - 2)x + (\theta - 2\alpha + 1)y + 4\theta}{5x + 2y + 12}$ sea independiente de x e y :

- A) es conveniente que el valor de α sea igual al valor de θ .
B) precisamos conocer los valores de α y θ , con lo que se hace nulo el numerador.
C) tenemos que escoger los valores de α y θ por tanteo, ya que es una fracción de 4 variables.
D) los valores de α y θ tienen que ser $1/3$ y (-1) respectivamente.
E) la suma de los valores de α y θ sea 3; 2 respectivamente.

39. Si las constantes A, B, C y D son los numeradores de las fracciones parciales en que puede ser descompuesta la fracción: $f(x) = \frac{4x^3 - x^2 - 3x - 2}{x^2(1 + x)^2}$

Hallar: $4A + 4B + 2C + D$

- A) 2 B) -2 C) 1
D) -1 E) 0

40. Hallar el MCD de los siguientes polinomios:

$$P(x, y) = x^4 + xy^3 + x^3y + y^4$$

$$R(x, y) = 3x^3 + 5x^2y + xy^2 - y^3$$

$$Q(x, y) = x^4 + 3x^3y + 3x^2y^2 + xy^3$$

- A) $x + y$ B) $x^2 + y^2$ C) $(x + y)^2$
D) $x^2 - y^2$ E) $2x + y$

41. Si el MCD de los polinomios:

$$P(x) = (x^2 - 2x + 1)^4(x^2 + 3x + 2)^8$$

$$Q(x) = (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)^4(x + 2)^8$$

es $(ax^2 + bx + c)^n$; $a > 0$, hallar: $abc + n$

- A) -2 B) -1 C) 2
D) 6 E) 10

42. Indicar si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:

- I. Si el polinomio $P(x)$ es divisible en formas separadas por los polinomios: $P_1(x); P_2(x); P_3(x); \dots; P_n(x)$ entonces el polinomio $P(x)$ es divisible por $[P_1(x)P_2(x) \dots P_n(x)]$
II. El MCD de dos o más polinomios es divisible por dichos polinomios.

III. El MCM de dos o más polinomios es un polinomio que divide exactamente a los polinomios mencionados.

- A) VVV B) VVF C) FVF
D) FFV E) FFF

43. ¿Cuántos factores algebraicos tienen el MCM de los siguientes polinomios?

$$P(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^5$$

$$Q(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^7$$

$$F(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{11}$$

- A) 63 B) 15 C) 81
D) 31 E) 243

44. Sabiendo que:

$$(a - b)(a - c) + (b - c)(b - a) + (c - a)(c - b) = 2(a + b + c)^2$$

donde: $abc \neq 0$, hallar el valor de:

$$\frac{\frac{a + 3b + c}{ac} + \frac{b + 3c + a}{ab} + \frac{c + 3a + b}{bc}}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}$$

- A) -1 B) -4 C) -6
D) -13 E) -15

45. A partir de: $\frac{a^4 + b^2c^2}{a} = \frac{b^4 + a^2c^2}{b} = \frac{c^4 + a^2b^2}{c} = -abc$

$$\text{reducir: } \left(\frac{a^6 + b^6}{a^3 + b^3} \right) \left(\frac{b^6 + c^6}{b^3 + c^3} \right) \left(\frac{c^6 + a^6}{c^3 + a^3} \right)$$

- A) abc B) $-(abc)^3$ C) 1
D) $(abc)^3$ E) $-abc$

46. Reducir: $\frac{1 + \frac{a - b}{a + b}}{1 + \frac{a + b}{a - b}}$. Dar como respuesta la suma

del numerador y el denominador.

- A) 1 B) 0 C) 2a
D) 2b E) 2

47. Simplificar: $[(x - 1)^{-1} - 2(x^2 - 1)^{-1}](x + 1)$

- A) x B) x^2 C) x^3
D) $1/x$ E) 1

48. Dada la expresión: $F(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 3} + \frac{1}{x^2 - 8x + 15}$ determinar el verdadero valor para $x = 3$.

- A) $1/2$ B) $-1/2$ C) 4
D) -2 E) 2

49. Reducir: $F = \frac{2}{2y + y^2} + \frac{y}{4 + 2y} - \frac{1}{y} - \frac{1}{2}$, e indicar el numerador.

- A) 1 B) 2 C) $2 + y$
D) -2 E) $-4y$

50. Simplificar: $F = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x-1}}}$. Indicar el numerador.

- A) x B) x^2 C) $x^2 - 1$ D) $2x - 1$ E) $x - 1$

51. Reducir: $A = \frac{2}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 4 + 4x} + \frac{1}{x^2 + 4 - 4x}$.
Dar como respuesta la raíz cuadrada del numerador.

- A) x B) $2x$ C) $3x$
D) $2x^2$ E) $3x^2$

52. Si $\frac{3}{x+4} + \frac{2}{x+5} \equiv \frac{ax+b}{(x+4)(x+5)}$, calcular ab .

- A) 112 B) 113 C) 114
D) 115 E) 116

53. Simplificar: $R = \frac{\frac{2x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x-1}}{\frac{2x}{4x^2-1} - \frac{1}{2x-1}}$

- A) $-8x$ B) $8x$ C) x
D) 2 E) $2x$

54. Calcular el VN de: $F = \frac{1 - \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+2}}$, para: $x = \sqrt{2}$

- A) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ B) -2 C) -3
D) $\sqrt{2}$ E) 1

55. Simplificar: $[x - 2(x+2x)^{-1}] \left[\frac{x^2}{(x+2)} \right]^{-1}$

- A) -1 B) 1 C) $1/x$
D) $2/x$ E) $-2/x$

56. Simplificar: $R = \left(\frac{4x^2 + 12x + 9}{2x^2 - x - 6} \right) \div \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^2 - 2x} \right)$

- A) 1 B) 3 C) $x + 1$
D) $x - 3$ E) 2

57. Hallar el equivalente de: $S = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b-a}}{\frac{1}{b} + \frac{1}{a-b}}$; $a \neq b$

- A) $-b/a$ B) $-a/b$ C) $-a^2/b^2$
D) $-b^2/a^2$ E) $1/ab$

58. Simplificar: $T = \frac{a^2(a-b) + ab(a-b)}{a^2(a^2 - b^2)}$

- A) 1 B) $1/b$ C) $1/a$
D) a/b E) b/a

59. Al descomponer en fracciones parciales se obtiene:

$$\frac{2x+8}{x^2+2x-3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1}$$

Calcular el valor de A y B.

- A) $A = 1$ B) $A = 1/2$ C) $A = -1/2$
D) $A = 1$ E) $A = 0$
B) $B = 2$ B) $B = 2$ B) $B = 5/2$
B) $B = 1$ B) $B = 5/2$

$$a - \frac{b}{1 - \frac{a}{a+b}}$$

60. Simplificar: $P = \frac{a - \frac{b}{1 - \frac{a}{a+b}}}{1 + \frac{b}{a-b}}$. Dar el denominador de la fracción simplificada.

- A) a B) b C) ab
D) $a + b$ E) $a - b$

61. Calcular el MCM de:

$$P(a; b) = a^2 - b^2$$

$$Q(a; b) = a^2 - ab - 2b^2$$

$$R(a; b) = a^2 - 4ab + 4b^2$$

- A) $(a-b)^2$ B) $(a+b)^3$ C) $(a^2 - b^2)^2$
D) $(a^2 - b^2)^3$ E) $(a-b)^3$

62. Dado los polinomios:

$$P(x) = x^3 + 1 + 3x + 3x^2 \wedge Q(x) = x^2 - 1 + x^3 - x$$

indicar: $MCM[P(x); Q(x)]$

- A) $(x+1)^2$ B) $(x+1)^3$
C) $(x+1)^2(x-1)$ D) $(x+1)^3(x-1)$
E) $x-1$

63. Si el MCM de dos polinomios es: $6x^4 + 5x^3 + 2mx - 3n$; y uno de los polinomios es: $2x^2 + x + 3$; hallar $m + n$.

- A) -1 B) -3 C) 4
D) 5 E) -6

64. Reducir: $\frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - 16} - \frac{5}{x - 4}$

- A) $\frac{x}{x-4}$ B) $\frac{x-4}{x}$ C) $\frac{x+4}{x-4}$
D) 0 E) $\frac{1}{x-4}$

65. Reducir: $\frac{2a^2 - 10a}{a^2 - 25} + \frac{a^2 + 16a + 15}{a^2 + 6a + 5}$

- A) 2 B) 4 C) 3 D) 5 E) 6

66. Efectuar: $\left(\frac{6x^2 + x - 2}{x+3} \right) \div \left(\frac{2x^2 - 7x + 3}{x^2 - 9} \right)$

- A) $3x - 2$ B) $x + 3$ C) $x - 3$
D) $3x + 2$ E) 1

$$x + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}$$

67. Simplificar: $E = \frac{x + \frac{1}{x - \frac{1}{x}}}{x - 1 + \frac{1}{x+1}}$

- A) $\frac{1}{x^2 - x}$ B) $\frac{1}{x+1}$ C) $\frac{x}{x-1}$
D) $\frac{x}{x^2 + 1}$ E) $\frac{x}{x^2 - 1}$

68. Efectuar:

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - x - 1} + \frac{x^2 - 4}{2x^2 + 5x + 2}$$

- A) $\frac{2x}{x-1}$ B) 2 C) x
D) 1 E) 0

69. Simplificar:

$$\left(\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}\right)\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x + 2}\right)$$

- A) $x + 1$ B) $\frac{1}{x+2}$ C) $x + 2$
D) $\frac{1}{x-2}$ E) $\frac{1}{x+3}$

70. Simplificar:

$$(x^2 - 1)\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-1} - 1\right)$$

- A) x B) -x C) $x^2 - 1$
D) $x^2 + 1$ E) 1

71. Efectuar:

$$\left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-5}{x+4}\right)(x^2 + 3x - 4)$$

- A) $12x + 3$ B) $12x$ C) $12x - 3$
D) 3 E) 0

72. Efectuar:

$$M = \frac{x+y}{xy^{-1}+1} + \frac{x+y}{yx^{-1}+1} + \left(\frac{-1}{x+y}\right)^{-1}$$

- A) x B) y C) xy
D) $x + y$ E) 0

73. Reducir:

$$\frac{x^3}{x^2 - y^2} + \frac{y^3}{y^2 - x^2} + \frac{xy}{x+y}$$

- A) x B) y C) $x + y$
D) $x - y$ E) 0

74. Simplificar:

$$\frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 5x + 6} - \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 6x + 8} - \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 7x + 12} + \frac{x^2 + 8x + 15}{x^2 + 7x + 10}$$

- A) -1 B) 1 C) -2
D) 2 E) 0

75. Efectuar:

$$\left(\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x^2-1}{2x^2+2}\right)$$

- A) $x - 1$ B) $x + 1$ C) x
D) 1 E) 0

76. Efectuar:

$$\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} - \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} - \frac{4}{x^2 - 1}$$

- A) $\frac{4}{x-1}$ B) $\frac{4}{x+1}$ C) $\frac{4}{x+2}$
D) $\frac{x+1}{x-2}$ E) $\frac{1}{x}$

77. Simplificar:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{1}{m+1}} + 1}$$

- A) $\frac{3m+2}{2m+1}$ B) $\frac{2m+1}{3m+2}$ C) $\frac{2m+3}{3m+1}$
D) $\frac{2m+3}{3m+2}$ E) $\frac{3m+2}{2m+3}$

 78. Si: $b(x - y) = y(a - b)$

$$\text{Simplificar: } \left(\frac{a^3 + 2b^3}{ab^2}\right)\left(\frac{xy^2}{x^3 + 2y^3}\right)$$

- A) -1 B) $\frac{a}{b}$ C) $\frac{x}{y}$
D) $\frac{ax}{by}$ E) 1

79. Simplificar:

$$\frac{1}{2x-4} - \frac{x+10}{2x^2-8} - \frac{1}{x+2}$$

- A) $\frac{1}{x-2}$ B) $\frac{2}{x-2}$ C) $\frac{x^2}{2-x}$
D) $\frac{1}{2-x}$ E) $\frac{x}{2-x}$

80. Efectuar:

$$\frac{1 - a^2}{(1 + ax + a + x)(1 + ax - a - x)}$$

- A) 1 B) $\frac{1}{1-x}$ C) $\frac{1}{1+x}$
D) $\frac{1}{1-x^2}$ E) $\frac{1}{1+x^2}$

CLAVES

1. A	11. C	21. E	31. B	41. D	51. B	61. C	71. A
2. B	12. A	22. A	32. B	42. E	52. D	62. D	72. E
3. A	13. B	23. B	33. D	43. A	53. B	63. C	73. C
4. A	14. C	24. C	34. E	44. D	54. B	64. A	74. B
5. C	15. D	25. C	35. D	45. D	55. B	65. C	75. D
6. A	16. B	26. D	36. B	46. C	56. A	66. D	76. B
7. A	17. A	27. C	37. D	47. E	57. C	67. C	77. B
8. C	18. C	28. A	38. D	48. B	58. C	68. D	78. E
9. A	19. C	29. D	39. B	49. E	59. C	69. B	79. D
10. A	20. C	30. A	40. C	50. D	60. A	70. D	80. D

Potenciación Binomio de Newton

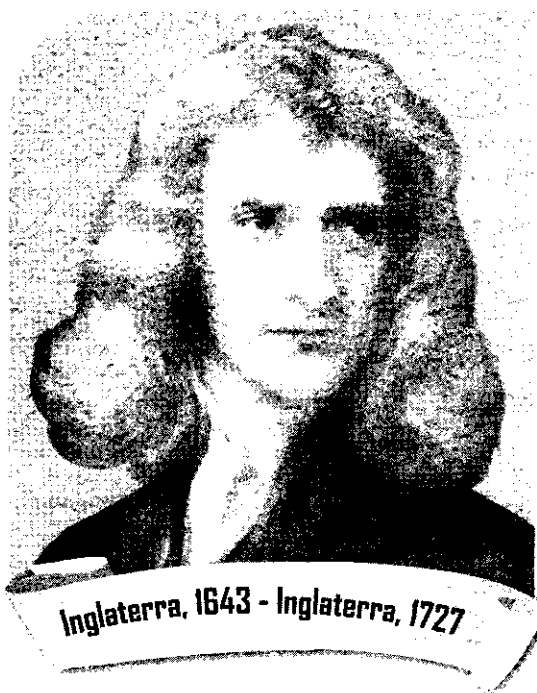
11

capítulo

Isaac Newton nació en Woolsthorpe (Lincolnshire) el 4 de enero de 1643 y murió en Kensington (Londres) el 31 de marzo de 1727. Fue un físico, filósofo, teólogo, inventor, alquimista y matemático inglés. Es autor de *Philosophiæ naturalis principia mathematica*, más conocidos como los Principia, donde describe la ley de la gravitación universal y estableció las bases de la mecánica clásica mediante las leyes que llevan su nombre. Entre sus otros descubrimientos científicos destacan los trabajos sobre la naturaleza de la luz y la óptica (que se presentan principalmente en su obra *Opticks*) y el desarrollo del cálculo matemático.

Newton comparte con Gottfried Leibniz el crédito por el desarrollo del cálculo integral y diferencial, que utilizó para formular sus leyes de la física. También contribuyó en otras áreas de la matemática, desarrollando el teorema del binomio y las fórmulas de Newton-Cotes. Desde finales de 1664 trabajó intensamente en diferentes problemas matemáticos. Abordó entonces el teorema del binomio, a partir de los trabajos de John Wallis y desarrolló un método propio denominado cálculo de fluxiones. Fue respetado durante toda su vida como ningún otro científico, y prueba de ello fueron los diversos cargos con que se le honró.

Fuente: Wikipedia



Isaac Newton

◀ FACTORIAL DE UN NÚMERO ENTERO Y POSITIVO

Se llama así al producto que resulta de multiplicar todos los números enteros y positivos desde la unidad hasta el número considerado. Solo existe el factorial de cantidades enteras y positivas y su representación es la siguiente:

$$n! : [n] \cdot [n-1] \cdot [n-2] \cdot \dots \cdot [1]$$

n factorial o factorial de n.

Por definición:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n; n \in \mathbb{N}$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

$$50! = 50 \times 49 \times 48 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

$$(2n+7)! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n+7)$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\dots 3 \times 2 \times 1$$

$$(2n-4)! = (2n-4)(2n-5)\dots 3 \times 2 \times 1, (2n-4) \in \mathbb{N}$$

$$(4n+1)! = (4n+1)(4n)\dots 3 \times 2 \times 1, (4n-1) \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)! = (a+b)(a+b-1)\dots 3 \times 2 \times 1, (a+b) \in \mathbb{N}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)! = \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b}-1\right) \left(\frac{a}{b}-2\right) \dots 3 \times 2 \times 1, a = b$$

$$ab! = ab(ab-1)(ab-2)\dots 3 \times 2 \times 1, (ab) \in \mathbb{N}$$

Propiedades:

$$1. \quad n! \exists \Leftrightarrow n \in \mathbb{Z}^+$$

$$2. \quad \text{Por definición} \quad \text{por convención} \\ 1! = 1 \quad 0! = 1$$

$$\text{consecuencia: } a! = 1 \Rightarrow a = 1 \vee a = 0$$

Ejemplo:

$$(2x-3)! = 1$$

$$\text{Entonces: } 2x-3 = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$2x-3 = 0 \Rightarrow x = 3/2$$

$$3. \quad a! = b! \Rightarrow a = b$$

Ejemplo:

$$\text{Resolver: } (x^2 - x)! = 720$$

Resolución:

$$(x^2 - x)! = 720 = 6! \Rightarrow x^2 - x = 6$$

$$\text{Luego: } x = 3 \vee x = -2$$

$$4. \quad \text{Todo factorial mayor contiene por lo menos un factorial menor.}$$

Ejemplos:

$$\bullet \quad n! = (n-1)!n = (n-2)!(n-1)n$$

$$\bullet \quad (2n-3)! = (2n-3)(2n-4)(2n-5)(2n-6)!$$

$$\bullet \quad (a+2)! = (a+2)(a+1)a!$$

También:

$$\bullet \quad 20 \times 19 \times 18 \times 17! = 20!$$

$$\bullet \quad 12 \times 11! = 12!$$

$$5. \quad n \times n! = (n+1)! - n!$$

Demostración:

$$(n+1)! - n! = n \times n!$$

$$(n+1)n! - n! = n \times n!$$

$$n!(n+1-1) = n \times n!$$

$$n!(n) = n \times n!$$

Ejemplos:

$$5 \times 5! = 6! - 5!$$

$$13 \times 13! = 14! - 13!$$

◀ COFACTORIAL O SEMIFACTORIAL

Se define:

$$a!! \begin{cases} 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times a & (\text{si } a \text{ es impar}) \\ 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times a & (\text{si } a \text{ es par}) \end{cases}$$

Ejemplos:

$$7!! = (3 \times 5 \times 7)$$

$$6!! = (2 \times 4 \times 6)$$

Propiedades

Propiedades:

$$1. \quad (2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$$

$$(2n)!! = 2^n \times n!$$

Ejemplo:

$$8!! = 2^4 \times 4!$$

$$2. \quad \text{Si } (2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)$$

$$\text{y } (2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)$$

$$\Rightarrow (2n)!!(2n-1)!! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (2n-1)(2n)$$

$$\therefore (2n)!!(2n-1)!! = (2n)!$$

Importante: $a!! \neq (a!)!$

$$\text{Porque: } 3!! = 1 \times 3 \wedge (3!)! = 6!$$

Ejemplos:

$$1. \quad \text{Hallar el valor de } x \text{ en: } \frac{(x+7)!(x+5)!}{(x+5)! + (x+6)!} = 11!$$

Resolución:

Escribiendo el denominador en función de $(x+5)!$

$$\frac{(x+7)!(x+5)!}{(x+5)! + (x+6)(x+5)!} = 11!$$

$$\frac{(x+5)!(x+7)!}{(x+5)! + [1 \times (x+6)]} = 11! \Rightarrow \frac{(x+7)!}{(x+7)} = 11!$$

$$\Rightarrow \frac{(x+6)!(x+7)}{(x+7)!} = 11! \Rightarrow (x+6)! = 11!$$

$$\Rightarrow x+6 = 11 \quad \therefore x = 5$$

$$2. \quad \text{Hallar } n \text{ en: } \frac{(n+3)!(n+4)!}{(n+3)! + (n+4)!} = 120 \frac{(n+4)}{(n+5)}$$

Resolución:

Transformando la expresión:

$$\frac{(n+3)!(n+4)!}{(n+3)! + (1 \times (n+4))} = 5! \frac{(n+4)}{(n+5)}$$

$$\Rightarrow (n+4)! = 5!(n+4) \Rightarrow (n+4)(n+3)! = (n+4)5! \\ \Rightarrow n+3=5 \quad \therefore n=2$$

3. Hallar a en: $\frac{(1+a)!}{6+a!} = 20$

Resolución:

La expresión se puede escribir como:

$$(1+a)! = 120 + 20a!$$

Hacemos: $a! = m$

Reemplazando: $(1+m)m = 120 + 20m$

Entonces: $m^2 - 19m - 120 = 0$

$$\begin{array}{r} m \quad -24 \\ m \quad 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow (m-24)(m+5) = 0$$

$$\text{Si: } m = 24 \Rightarrow a! = 24 = 4! \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Si: } m + 5 = 0 \Rightarrow m = -5 \Rightarrow a! = -5 \text{ (imposible)}$$

$$\therefore \text{Única solución: } a = 4$$

4. Hallar x en:

$$(x-1)(x-2)! + x(x-1)! + (x+1)x! = 864$$

Resolución:

La expresión se puede escribir como:

$$(x-1)(x-2)! + x(x-1)(x-2)! + (x+1)x(x-1)(x-2)! = 864$$

Factorizando:

$$(x-2)![(x-1) + x(x-1) + (x+1)x(x-1)] = 864$$

$$(x-2)!(x-1)[x^2 + 2x + 1] = 864$$

$$(x-2)!(x-1)(x+1)^2 = 864$$

Descomponiendo el segundo miembro:

$$(x-1)!(x+1)^2 = 24(36) = 4!(6)^2$$

$$\text{Igualando: } x-1=4 \Rightarrow x=5$$

$$x+1=6 \Rightarrow x=5$$

$$\therefore x=5$$

5. Hallar el equivalente de la raíz cuadrada de:

$$A = \frac{(n+2)!}{(n-2)!} + 1$$

Resolución:

Transformando $(n+2)!$ en función de $(n-2)!$:

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)!$$

En el problema:

$$A = \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} + 1$$

$$\Rightarrow A = (n+2)(n+1)n(n-1) + 1$$

Agrupando en la forma indicada y efectuando.

$$A = (n^2 + n - 2)(n^2 + n) + 1 = (n^2 + n)^2 - 2(n^2 + n) + 1$$

$$A = (n^2 + n - 1)^2$$

$$\therefore \text{Se pide } \sqrt{A} = n^2 + n - 1$$

6. Hallar n en: $4096 = \frac{[2(n-3)!]}{(n-3)!(2n-7)!}$

Resolución:

La expresión puede escribirse:

$$4096 = \frac{(2n-6)!}{(n-3)![1 \times 3 \times 5 \dots (2n-7)]}$$

Multiplicando numerador y denominador por:

$$[2 \times 4 \times \dots \times (2n-6)]$$

$$\frac{(2n-6)! [2 \times 4 \times 6 \times \dots (2n-6)]}{(n-3)![1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \dots (2n-7)(2n-6)]} = 4096$$

$$\frac{(2n-6)!}{(n-3)!(2n-6)!} = 4096$$

$(n-3)$ veces

$$\frac{[2 \times 2 \dots 2] \times [1 \times 2 \times 3 \times 4 \dots (n-3)]}{(n-3)!} = 4096$$

$$\frac{2^{n-3}(n-3)!}{(n-3)!} = 4096 \Rightarrow 2^{n-3} = 2^{12} \Rightarrow n-3 = 12$$

$$\therefore n = 15$$

7. Reducir: $N = \frac{[(3!)! + 2]! - [(3!) + 1]!}{[(3!)! - 1]! + (6)! + [(3!)! + 1]!}$

Resolución:

Haciendo: $(3!)! = 6! = a$

$$N = \frac{(a+2)! - (a+1)!}{(a-1)! + a! + (a+1)!}$$

Escribiendo la fracción en función de $(a-1)!$

$$N = \frac{(a+2)(a+1)a(a-1)! - (a+1)a(a-1)!}{(a-1)! + a(a-1)! + (a+1)a(a-1)!}$$

$$N = \frac{(a+1)a(a-1)!(a+1)}{(a-1)!(a^2 + 2a + 1)} = \frac{(a+1)^2 a(a-1)!}{(a-1)!(a+1)^2}$$

$$\Rightarrow N = a \quad \therefore N = 6! = 720$$

8. Hallar x en: $\frac{(x-4)! + (x-3)! + (x-2)!}{(x^2 - 7x + 10)(x^2 - 6x + 8)} = 24$

Resolución:

Escribiendo toda la expresión en función del factorial del número menor $(x-2)!$ en el numerador y factorizando en el denominador:

$$\frac{(x-4)! + (x-3)(x-4)! + (x-2)(x-3)(x-4)!}{(x-5)(x-2)(x-4)(x-2)} = 4!$$

$$\frac{(x-4)! [1 + x - 3 + x^2 - 5x + 6]}{(x-2)^2(x-4)(x-5)} = (4)!$$

$$\frac{(x-4)!(x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2(x-4)(x-5)} = 4!$$

$$\frac{(x-4)(x-5)(x-6)!(x-2)^2}{(x-2)^2(x-4)(x-5)} = 4!$$

$$\Rightarrow (x-6)! = 4! \Rightarrow x-6 = 4 \quad \therefore x = 10$$

ANÁLISIS COMBINATORIO

Parte del Álgebra que estudia a los grupos, ya sea por el número de integrantes que lo conforman o por el orden en que están dispuestos y como se diferencian unos de otros.

Este tipo de agrupaciones se estudiarán en dos conceptos bien definidos: permutaciones y combinaciones.

Principio de la multiplicación

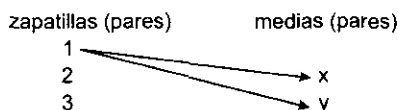
Si un evento puede realizarse de n_1 maneras diferentes y si continuando el procedimiento se puede pasar o realizar otro segundo procedimiento de n_2 maneras diferentes y así sucesivamente. El número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado estará expresado por:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \dots$$

Ejemplo:

Una persona tiene 3 pares de zapatillas y 2 pares de medias. ¿de cuántas formas diferentes puede colocárselas?

Resolución:



La primera zapatilla puede usarla con las medias x o y (2 maneras diferentes), igual la segunda y la tercera, es decir, en total habrán:

$$3 \times 2 = 6 \text{ formas diferentes de usarlas.}$$

Principio de la adición

Si un evento (1) puede realizarse de n_1 maneras o formas diferentes y otro evento (2) puede realizarse de n_2 maneras diferentes; pero no puede pasarse del evento (1) al evento (2). Entonces el total de formas diferentes que puede realizarse el evento (1) o (2) estará dado por: $n_1 + n_2$

Ejemplo:

Si para ir al cine una persona puede tomar 2 colectivos o 3 ómnibus. ¿De cuántas formas diferentes podría viajar para cumplir su objetivo?

Resolución:

Puede tomar uno de los 2 colectivos de 2 formas diferentes o uno de los 3 ómnibus de 3 formas diferentes. En total de: $2 + 3 = 5$ formas diferentes.

Variaciones

Se llama variaciones, coordinaciones o regias de n maneras tomados de k en k a los diferentes grupos que se puedan formar con k elementos de tal manera que un grupo se diferencia de otro en un elemento o en el orden de sus elementos.

Ejemplos:

- Sean los elementos a, b, c, d. Entonces las variaciones de 4 elementos tomados de 2 en 2 serán:

ab	ac	ad	bc	bd	cd
ba	ca	da	cb	db	dc

Como se observa ab, ba son grupos diferentes.

Notación: se denota de la siguiente manera: V_n^k , y se lee variaciones de n elementos tomados de k en k .

- ¿Cuántas banderas bicolors diferentes pueden formarse con los colores amarillo, negro y blanco?

Resolución:

Sea el conjunto: {amarillo, negro, blanco} de donde los bicolors diferentes se pueden disponer así: amarillo - negro; amarillo - blanco; negro - blanco; blanco - amarillo; blanco - negro; negro - amarillo

∴ El total de banderas diferentes que pueden formarse es 6.

$$\text{Es decir: } V_2^3 = 6 \quad \text{o} \quad V_2^3 = 3 \times 2$$

En general:

$$V_r^n = \overbrace{n(n-1)(n-2)\dots}^{\text{"r" factores}}$$

O también:

$$V_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

- En un campeonato de 10 equipos, un periódico deportivo ofrece un premio al que acierte la clasificación final de los 3 primeros equipos. ¿Cuántas soluciones debe enviar un aficionado para que asegure el premio?

Resolución:

Sea abc el equipo ganador, en ese sentido primero, segundo y tercer lugar; bac es otro grupo, porque en este caso b es el primero, a el segundo y c el tercero, como se observa (abc) y (bac) son grupos diferentes con los mismos elementos, por lo tanto será:

$$V_3^{10} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \times 8 \times 9 \times 10}{7!}$$

$$\therefore V_3^{10} = 720 \text{ soluciones}$$

Variaciones con repetición

Son aquellas cuyos elementos pueden repetirse una o varias veces, se representa por VR_k^n número mayor de VR_k^n .

$$\text{Formula: } VR_k^n = n^k$$

Ejemplos:

- ¿Cuántos números de 4 cifras existen?

Resolución:

Sean los números $\overline{abcd}$ en que bcd pueden valer (0; 1; 2; ...; 9) y "a" solo (1; 2; 3; ...; 9); los números serán de la forma $1bcd, 2bcd, 3bcd, \dots, 9bcd$. Con bcd se puede hacer las variaciones con repetición de 10 objetos tomados de 3 en 3.

$$V_3^{10} = 10^3 = 1000$$

∴ En total será $9 \times 1000 = 9000$ números

- Hallar el número de boletos distintos posibles en una jornada de las apuestas mutuas de fútbol en que se juegan 14 partidos.

Resolución:

Entiéndase que en un partido de fútbol existen 3 posibilidades:

Si el equipo 1 gana, se marcará el 1.

Si el equipo 2 gana, se marcará el 2.

Si ambos empatan, se marcará el x.

Analizando, observa que se trata de variaciones con repetición de los elementos 1; 2 y x, tomados 14 a 14, es decir, el número de posibilidades para los boletos a emitirse estará dado por:

$$V_k^n = n^k$$

∴ Para nuestro caso: $V_{14}^3 = 3^{14} = 4\,782\,969$ boletos.

Permutaciones

Se llama permutaciones de n elementos a los diferentes grupos que se pueden formar con todos los elementos, de tal manera que un grupo se diferencia del otro en el orden de sus elementos.

Ejemplo:

Sean los elementos a, b, c, entonces las permutaciones de 3 elementos serán: abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Notación: se le denota de la siguiente manera: P_n , y se lee permutaciones de n elementos.

Ejemplos:

1. ¿De cuántas formas diferentes pueden sentarse Juan y Carlos en una carpeta de dos asientos?

Resolución:

Las formas pueden ser Juan y Carlos o Carlos y Juan en ese orden, es decir, 2.

Pero: $2 = 1 \times 2 = 2!$

∴ $P_2 = 2!$

2. ¿De cuántas formas diferentes pueden colocarse las letras a, b, c?

Resolución:

Sea el conjunto a, b, c, los diferentes grupos de tres elementos que se puedan formar son: abc, bca, cba, cab, acb y bac.

En total son 6 las formas diferentes en que pueden colocarse: $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

De los ejemplos 1 y 2, puede deducirse y se demuestra que las permutaciones de n elementos tomados todos a la vez estarán dados por:

$$P_n = n!$$

3. ¿De cuántas formas pueden colocarse los cinco delanteros de un equipo de fútbol si los extremos permanecen invariables?

Resolución:

Assumiendo que los delanteros sean A, B, C, D y E, si tuviesen la disposición que se indica, se observa

que A y E son inamovibles eso significa que solo los tres centrales (B; C y D) son los que pueden cambiar de ubicación, entonces el número total de formas estará expresado por:

∴ $P_3 = 1 \times 2 \times 3 = 6$ formas distintas

4. Con las cifras 0; 1; 2; 4, ¿cuántos números de cinco cifras no repetidas pueden escribirse?

Resolución:

Aquí habría que considerar que el 0 es cifra no significativa si figura como primer numeral, en consecuencia, habría que descartar las posibilidades de la forma: 0abcd

Que son: $P_4 = 4! = 24$

Luego, el total de numerales con cinco cifras no repetidas estará dado por:

$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$

Como se ha observado se restan todos los numerales cuya primera cifra es 0.

En total son 6 las formas diferentes en que pueden colocarse.

∴ $P_3 = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

Permutaciones circulares

Son agrupaciones donde no hay primer ni último elemento por hallarse todos en una línea cerrada se representa P_n^c se demuestra.

$$P_n^c = (n-1)!$$

Ejemplo:

¿De cuántas formas se pueden disponer 5 muchachos para formar una rueda?

Resolución:

$P_5^c = (5-1)! = 4! = 24$ maneras.

Permutaciones con repetición

El número de permutaciones de n elementos con la condición de que en todas, los elementos $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$ entran, respectivamente, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ veces es:

$$P_{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}^n = \frac{n!}{a_1! a_2! a_3! \dots a_k!}$$

Ejemplo:

Hallar el número de permutaciones distintas que se pueden formar con las letras de la palabra COMPUTADORA.

Resolución:

Hay 2 letras A y O; hay una letra: C, M, P, U, T, D, R, total 11 letras, luego:

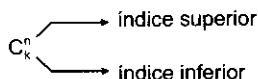
$$P_{2,2}^{11} = \frac{11!}{2!2!} = 9\,979\,200$$

Combinaciones

Se llama combinaciones de n elementos tomados de k en k al número de maneras en que se pueda agrupar los

n elementos en grupos de k elementos cada uno de tal manera que cada grupo se diferencie por lo menos en un elemento.

Número combinatorio:



Se lee: combinaciones de n elementos tomados de k en k .

Ejemplo:

Hallar el número de maneras en que se pueden agrupar 4 elementos a, b, c, d en grupos de 2, de manera que cada grupo se diferencie en un elemento.

Resolución:

Sea el conjunto = a, b, c, d .

Los grupos serán: ab, ac, ad, bc, bd, cd .

$$C_2^4 = 6$$

De donde en: $C_2^4 = 6$

Tratemos de expresarlo en función de 4 y 2 :

$$C_2^4 = 3 \times 2 \times 1 = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4} = \frac{4!}{2 \times 2} \Rightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2! \times 2!}$$

De aquí se tiene como consecuencia la siguiente relación:

Fórmula matemática:

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

donde: $n, k \in \mathbb{N}$
 $n \geq k$

$$C_2^5 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!2!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

$$C_2^{30} = \frac{30!}{28!2!} = \frac{30 \times 29 \times 28!}{28!2!} = 15 \times 29 = 435$$

Forma simplificada

$$C_k^n = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$C_k^n = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)(n-k)!}{(1 \times 2 \times 3 \dots k)(n-k)!}$$

$$C_k^n = \frac{\text{k factores}}{1 \times 2 \times 3 \dots k}$$

$$C_2^4 = \frac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$$

$$C_3^{50} = \frac{50 \times 49 \times 48}{1 \times 2 \times 3} = 25 \times 49 \times 16$$

$$C_4^7 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 35$$

Ejemplo:

¿De cuántas maneras se puede escoger una comisión de 4 personas de un grupo de 7 personas?

Resolución:

$$C_4^7 = \frac{7!}{3!4!} = \frac{4! \times 5 \times 6 \times 7}{6 \times 4!} = 35 \text{ maneras}$$

Combinaciones con repetición

Se define: $CR_k^n = C_k^{n+k-1}$

Ejemplo:

¿Cuántos productos diferentes, cada uno de tres factores podrán obtenerse con los cuatro factores primos 2; 3; 5; 7?

Resolución:

Según el enunciado, nada se opone a que en los factores primos de cada producto haya dos o tres factores iguales.

Dos productos solo podrán ser diferentes cuando tengan factores distintos, luego los diferentes productos serán las combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 3 en 3.

$$CR_3^4 = C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

Estos productos son:

$$\begin{array}{lll} 2 \times 2 \times 2 = 8 & 2 \times 3 \times 3 = 18 & 2 \times 5 \times 7 = 70 \\ 2 \times 2 \times 3 = 12 & 2 \times 3 \times 5 = 30 & 2 \times 7 \times 7 = 98 \\ 2 \times 2 \times 5 = 20 & 2 \times 3 \times 7 = 42 & 3 \times 3 \times 3 = 27 \\ 2 \times 2 \times 7 = 28 & 2 \times 5 \times 5 = 50 & 3 \times 3 \times 5 = 45 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3 \times 3 \times 7 = 63 & 5 \times 5 \times 5 = 125 \\ 3 \times 5 \times 5 = 75 & 5 \times 5 \times 7 = 175 \\ 3 \times 5 \times 7 = 105 & 5 \times 7 \times 7 = 245 \\ 3 \times 7 \times 7 = 147 & 7 \times 7 \times 7 = 343 \end{array}$$

Coficiente binómico $\left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$

$$\text{Se define } \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right) = \frac{\text{k factores}}{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)} = \frac{n!}{1 \times 2 \times 3 \dots k}$$

Donde: $n \in \mathbb{R} \wedge k \in \mathbb{Z}^+$

Nota

Solo cuando $n \in \mathbb{N}$: $C_k^n = \left(\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right)$

Ejemplos:

$$C_3^7 = \left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)_4 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{24} = -\frac{5}{128}$$

$$\left(-2\right)_3 = \frac{(-2)(-2-1)(-4)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{-2 \times 3 \times 4}{1 \times 2 \times 3} = -4$$

Propiedades de los números combinatorios

1. C_k^n existe si y solo si $n \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z} \wedge n \geq k$
2. $C_k^n = C_{n-k}^n$ (combinaciones complementarias)

Ejemplos:

- $C_4^7 = C_3^7$
 - $C_{x-1}^{x-8} = C_7^{x-8}$
 - $C_n^n = C_{n-n}^n = C_0^n = 1$
3. $C_n^n = C_{n-n}^n = C_0^n = 1$
 4. $C_1^n = n$
 5. $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$

Ejemplos:

- $C_7^{10} + C_8^{10} = C_8^{11}$
 - $C_5^9 + C_4^9 = C_5^{10}$
6. Degradación de índices

a) $C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$

Ejemplos:

• $C_6^9 = \frac{9}{6} C_5^8$

• $C_5^{x-3} = \frac{x+3}{5} C_4^{x+2}$

b) $C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$

Ejemplo:

• $C_5^9 = \frac{9-6+1}{6} C_4^9 = \frac{2}{3} C_4^9$

c) $C_k^n = \frac{n}{n-k} C_{k-1}^{n-1}$

Ejemplo:

• $C_4^9 = \frac{9}{9-4} C_4^8 = \frac{9}{5} C_4^8$

7. Si: $C_a^n = C_b^n$, entonces: $a = b \vee a + b = n$

Ejemplos:

1. Reducir: $F = \underbrace{C_{99}^{100} + C_{100}^{200} + C_{101}^{300} + \dots + C_1^{10\,000}}_{100 \text{ sumandos}}$

Resolución:

Utilizando la propiedad 2 (combinaciones complementarias): $C_k^n = C_{n-k}^n$

La expresión puede escribirse:

$$F = C_1^{100} + C_1^{200} + C_1^{300} + \dots + C_1^{10\,000}$$

Por la propiedad 4: $C_1^n = n$

$$F = 100 + 200 + 300 + \dots + 10\,000$$

$$F = 100(1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

$$F = \frac{100(100)(100+1)}{2}$$

$$\therefore F = 505\,000$$

2. Si: $C_1^5 + C_3^8 + C_5^8 + C_7^{10} + \dots + C_{17}^{20} = k$, calcular el valor de: $S = C_{18}^{21} + C_{18}^{19} + \dots + C_8^{11} + C_6^9 + C_4^7 + C_2^5$

Resolución:

Sumando las dos expresiones se tendrá:

$$S + k = \underbrace{C_1^5 + C_2^5 + C_3^5 + C_4^5 + C_5^5 + \dots + C_{17}^{20} + C_{18}^{21}}_{C_2^{22}}$$

$$\underbrace{C_3^7 + C_4^7 + \dots}_{C_4^{22}}$$

$$\underbrace{C_4^8 + \dots}_{C_{18}^{22}}$$

$$\therefore S = C_{18}^{22} - k$$

3. Reducir:

$$E = 1 + x + \frac{x(x+1)}{2!} + \frac{x(x+1)(x+2)}{3!} + \dots + \frac{x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)}{n!}$$

Resolución:

Cada sumando representa a un número combinatorio; es decir:

$$E = \underbrace{C_0^x + C_1^x + C_2^{x+1} + C_3^{x+2} + C_4^{x+3} + \dots + C_n^{x+n-1}}_{C_1^{x+1}}$$

$$\underbrace{C_2^{x+2} + \dots}_{C^{x+n}}$$

$$\therefore E = C_n^{x+n}$$

4. Calcular n en:

$$C_{n-1}^{m-1} + C_n^{m-1} = \frac{1}{3}(C_{2n-7}^{m+2} - C_{n-2}^{m-1} - C_{n+1}^{m-1})$$

$$\text{si: } 3n - 6 \neq m + 2$$

Resolución:

Efectuando y agrupando convenientemente:

$$\underbrace{C_{n-2}^{m-1} + C_{n-1}^{m-1}}_{C_{n-1}^m} + 2 \underbrace{[C_{n-1}^{m-1} + C_n^{m-1}]}_{2C_n^m} + \underbrace{[C_{n+1}^{m-1} + C_{n+1}^{m-1}]}_{C_{n+1}^{m+2}} = C_{2n-7}^{m+2}$$

$$C_{n-1}^m + 2C_n^m + C_{n+1}^{m+2} = C_{2n-7}^{m+2}$$

$$\text{Desdoblado: } 2C_n^m = C_n^m + C_n^m$$

$$C_{n-1}^m + C_n^m + C_n^m + C_{n+1}^{m+2} = C_{2n-7}^{m+2}$$

Por propiedad: $C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$; se tendrá:

$$\underbrace{C_{n-1}^{m+1} + C_n^{m+1}}_{C_{n+1}^{m+2}} = C_{2n-7}^{m+2}$$

$$C_{n+1}^{m+2} = C_{2n-7}^{m+2}$$

De donde por propiedad:

$$\bullet n + 1 = 2n - 7 \Rightarrow n = 8$$

$$\bullet n + 1 + 2n - 7 = m + 2 \Rightarrow 3n - 6 = m + 2$$

(No puede ser por la condición del problema)

5. Hallar el menor valor que debe tomar n para que la expresión: $A = \frac{C_1^n}{C_0^n} + \frac{C_2^n}{C_1^n} + \frac{C_3^n}{C_2^n}$, sea un entero positivo.

Resolución:

Transformando los numeradores a través de la forma práctica; al igual que el denominador (en los 2 primeros se utilizan propiedades).

$$A = \frac{n}{1} + \frac{\frac{n(n-1)}{1 \times 2}}{n} + \frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}}{\frac{n(n-1)}{1 \times 2}}$$

$$A = n + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} = \frac{11n-7}{6} \Rightarrow A = \frac{11n-7}{6} \in \mathbb{Z}^+$$

De donde para que la expresión sea entera:

$$11n - 7 = 6$$

De los conjuntos de valores que puede tomar el menor es 48, es decir: $11n - 7 = 48$

$$\therefore n = 5$$

6. Calcular n a partir de:

$$\frac{nC_0^n}{C_0^n} + \frac{2(n-1)C_2^n}{C_1^n} + \frac{3(n-2)C_3^n}{C_2^n} + \dots + \frac{nC_n^n}{C_{n-1}^n} = 204$$

Resolución:

Aplicando la propiedad:

$$C_n^m = \frac{m-n+1}{n} C_{n-1}^m$$

$$\frac{\frac{n(n-1+1)}{1} C_0^n}{C_0^n} + \frac{2(n-1) \frac{(n-2+1)}{2} C_1^n}{C_1^n} + \frac{3(n-2) \frac{(n-3+1)}{3} C_2^n}{C_2^n} + \dots + \frac{n \frac{(n-n+1)}{n} C_{n-1}^n}{C_{n-1}^n} = 204$$

$$n^2 + (n-1)^2 + (n-2)^2 + \dots + 3^2 + 2^2 + 1^2 = 204$$

$$\text{Se sabe que: } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 204$$

$$\Rightarrow n(n+1)(2n+1) = 8 \times 9 \times 17$$

Dándole una forma adecuada al segundo miembro:

$$n(n+1)(2n+1) = 8(8+1)(2 \times 8 + 1)$$

$$\text{Se tendrá: } n = 8$$

7. Resolver: $C_{y-1}^x = C_y^x \dots (I)$

$$4C_y^x = 5C_{y-2}^x \dots (II)$$

Resolución:

En la primera igualdad, transformando el segundo miembro utilizando la propiedad:

$$C_y^x = \frac{x-y+1}{y} C_{y-1}^x \Rightarrow 1 = \frac{x-y+1}{y}$$

$$\Rightarrow y = x - y + 1 \Rightarrow 2y = x + 1 \dots (1)$$

En (II) utilizando la propiedad 2 veces consecutivas en el primer miembro:

$$4C_y^x = 5C_{y-2}^x \Rightarrow 4 \frac{(x-y+1)}{y} C_{y-1}^x = 5C_{y-2}^x$$

$$\frac{4(x-y+1)}{y} \left[\frac{x-y+1+1}{y-1} \right] C_{y-2}^x = 5C_{y-2}^x$$

$$\frac{4(x-y+1)}{y} \left[\frac{x-y+2}{y-1} \right] = 5 \dots (2)$$

$$(1) \text{ en } (2): \frac{y+1}{y-1} = \frac{5}{4} \Rightarrow y = 9$$

$$\text{En } (1): x = 17$$

◀ BINOMIO DE NEWTON**Desarrollo del binomio de Newton con exponente natural ($n \in \mathbb{N}$)**

Sabemos:

- $(x+a)^1 = (x+a) = C_0^1 x + C_1^1 a$
- $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 = C_0^2 x^2 + C_1^2 xa + C_2^2 a^2$
- $(x+a)^3 = x^3 + 3xa^2 + 3x^2a + a^3$
 $(x+a)^3 = C_0^3 x^3 + C_1^3 x^2a + C_2^3 xa^2 + C_3^3 a^3$
- $(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$
 $(x+a)^4 = C_0^4 x^4 + C_1^4 x^3a + C_2^4 x^2a^2 + C_3^4 xa^3 + C_4^4 a^4$
 $\vdots$

En general:

$$(x+a)^n =$$

$$C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + \dots + C_{n-1}^n x a^{n-1} + C_n^n a^n$$

Forma práctica del desarrollo de un binomio

$$(x+a)^4 = x^4 + 4x^3a + 6x^2a^2 + 4xa^3 + a^4$$

$$(x+a)^5 = x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

Donde los coeficientes se calculan con la relación:

$$\text{Coef. de un término cualquiera} = \frac{\left(\begin{array}{c} \text{Exp. de la } 1^{\text{a}} \text{ base} \\ \text{término anterior} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \text{Coef. del} \\ \text{término anterior} \end{array} \right)}{\text{(número de términos que le precedan)}}$$

Triángulo de Pascal o Tartaglia

Es un triángulo formado por los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton. Así tendremos que:

$$\begin{array}{l} (x+a)^0 = 1 \\ (x+a)^1 = 1 \quad 1 \\ (x+a)^2 = 1 \quad 2 \quad 1 \\ (x+a)^3 = 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\ (x+a)^4 = 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\ (x+a)^5 = 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\ (x+a)^6 = 1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 \\ (x+a)^7 = 1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

Es recomendable utilizarlo para potencias menores o iguales a 10.

Cálculo del término general

En el desarrollo general:

$$(x+a)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{n-1}a + C_2^n x^{n-2}a^2 + \dots + C_n^n$$

Se tiene:

$$t_1 = C_0^n x^n a^0$$

$$t_2 = C_1^n x^{n-1} a$$

$$\begin{aligned} t_3 &= C_2^n x^{n-2} a^2 \\ &\vdots \\ t_{78} &= C_{77}^n x^{n-77} a^{77} \end{aligned}$$

En general:

$$t_{k-1} = C_k^n x^{n-k} a^k \quad (\text{fórmula del término general})$$

Ejemplos:

1. En $(x + a)^{500}$, calcular t_{401}

Resolución:

$$t_{401} = t_{400+1} = C_{400}^{500} x^{500-400} a^{400} = C_{400}^{500} x^{100} a^{400}$$

2. En $(x^3 + y^5)^{75}$, calcular t_{21}

Resolución:

$$t_{21} = t_{20+1} = C_{20}^{75} (x^3)^{75-20} (y^5)^{20} = C_{20}^{75} x^{165} y^{100}$$

Leyes del desarrollo del binomio

- El número de términos del desarrollo estará expresado por el exponente binómico aumentado en la unidad.
- El polinomio desarrollo se caracteriza por ser completo y ordenado respecto a sus bases (en forma descendente respecto a la primera y ascendente respecto a la segunda). Además de ser homogéneo.
- Si la base es el binomio suma, los términos del desarrollo serán positivos todos; pero si es el binomio diferencia serán alternados (positivos los de lugar impar y negativos los de lugar par).
- Solo cuando el exponente del binomio sea par existirá un número impar de términos; y en consecuencia habrá un solo término central que tendrá la propiedad de tener los exponentes de sus bases respectivamente iguales.
- Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos serán respectivamente iguales (por combinaciones complementarias).
- La suma de coeficientes de $(x + a)^n$ estará dada por: $C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_n^n = 2^n$

De donde:

Suma de los lugares impares:

$$C_0^n + C_2^n + C_4^n + \dots + C_{n-1}^n = 2^{n-1}$$

Suma de los lugares pares:

$$C_1^n + C_3^n + C_5^n + \dots + C_n^n = 2^{n-1}$$

Suma de coeficientes de $(x - a)^n = 0$

7. Sabemos que:

- Término de lugar $(k + 1)$ contado de izquierda a derecha normalmente esta dada por:

$$t_{k+1} = C_k^n x^{n-k} a^k = t_{k+1}$$

- Término de lugar $(k + 1)$ contado de derecha a izquierda, es decir a partir del extremo final:

$$t_{k-1} = C_k^n a^{n-k} x^k = t_{k-1}$$

8. Cálculo de la posición del término central (n exponente del binomio).

- Cuando n es par ($\exists$ un solo término central)

$$t_c = t_{\frac{n+1}{2}}$$

- Cuando n es impar ($\exists$ dos términos centrales)

$$t_c = \left\{ t_{\frac{n+1}{2}} \right\}$$

9. El número de términos de $(a + b + c)^n$ es:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

En general, si se tuviera: $(a + b + c + d + \dots + m)^n$
 r términos

$$\text{Número de términos} = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!}$$

10. En $(x^\alpha + a^\beta)^n$

$$\Sigma \text{ exponentes} = (\alpha + \beta) \frac{n(n+1)}{2}$$

Formula del término máximo de un binomio de newton para determinados valores de x y a

Para calcular el término, debe cumplir la siguiente relación:

$$\left(\frac{n-k+1}{k} \right) \left(\frac{a}{x} \right) > 1$$

siendo el t_{k+1} el máximo.

Ejemplo:

Hallar el lugar que ocupa el término de máximo valor en el siguiente desarrollo $(3 + 2x)^{15}$ cuando $x = \frac{7}{2}$

Resolución:

$$\left(\frac{15-k+1}{k} \right) \left(\frac{2x}{3} \right) > 1 \Rightarrow \left(\frac{16-k}{k} \right) \left(\frac{2 \times 7/2}{3} \right) > 1$$

$$7(16-k) > 3k$$

$$k < \frac{112}{10} \Rightarrow k < 11 \frac{2}{10}$$

Como nos interesa el máximo valor, este satisface para el mayor valor entero de k , es decir $k = 11$. Entonces el término máximo será $k + 1 = 12$.

$\therefore$ El término de máximo valor ocupa el lugar 12.

Ejemplos:

1. En el desarrollo $(5 + 2x^3)^n$ el coeficiente del término que contiene a x^{33} es 15 veces el coeficiente del término que contiene a x^{36} . Hallar el valor de n .

Resolución:

Cualquier término del desarrollo estará expresado por: $t_{k+1} = C_k^n (5)^{n-k} (2x^3)^k = C_k^n 5^{n-k} 2^k x^{3k}$

El coeficiente será: $C_k^n 5^{n-k} 2^k$

Por dato: $3k = 33 \Rightarrow k = 11$

Luego el coeficiente será: $C_{11}^n 5^{n-11} 2^{11}$... (1)

También por dato: $3k = 36 \Rightarrow k = 12$

Luego el coeficiente será: $C_{12}^n 5^{n-12} 2^{12}$... (2)

De (1) y (2) por dato:

$$C_{11}^n 5^{n-11} 2^{11} = 15 C_{12}^n 5^{n-12} 2^{12}$$

$$C_{11}^n = 6 C_{12}^n$$

Degradando el índice inferior del segundo miembro:

$$C_{11}^n = 6 \left(\frac{n-12+1}{12} \right) C_{11}^n \Rightarrow 2 = n-11$$

$$\therefore n = 13$$

2. Hallar el término independiente del desarrollo de:

$$\left(x^2 - \frac{1}{x^{2/3}} \right)^{13}$$

Resolución:

Cualquier término del desarrollo estará expresado por:

$$t_{k+1} = C_k^{13} (x^2)^{13-k} (x^{-2/3})^k$$

$$t_{k+1} = C_k^{13} x^{26-2k-\frac{2}{3}k} \quad \dots (I)$$

Para que sea término independiente:

$$26 - 2k - \frac{2}{3}k = 0 \Rightarrow k = 6$$

$$\text{En (I): } C_6^{13} = \frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

$$\therefore C_6^{13} = 1716$$

3. Calcular el coeficiente del término del desarrollo del binomio $(1+x)^{20}$ que es el doble del coeficiente del término anterior.

Resolución:

$$\text{Del problema: } t_{k+1} = C_k^{20} (1)^{20-k} x^k = C_k^{20} x^k$$

$$\text{También: } t_k = t_{(k-1)+1} = C_{k-1}^{20} (1)^{20-k-1} x^{k-1} = C_{k-1}^{20} x^{k-1}$$

$$\text{Por dato: } C_k^{20} = 2 C_{k-1}^{20}$$

$$\frac{20-k+1}{k} C_{k-1}^{20} = 2 C_{k-1}^{20} \rightarrow k = 7$$

$$C_{k-1}^{20} = C_6^{20} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

$$C_6^{20} = 38\,760 \quad \therefore C_7^{20} = 77\,520$$

4. Determinar x en $\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$ sabiendo que en el desarrollo del binomio la relación entre el séptimo término contando desde el principio y el séptimo término desde el final vale $1/6$.

Resolución:

El séptimo término contado del principio es:

$$t_7 = t_{6+1} = C_6^x (2^{1/3})^{x-6} (3^{-1/3})^6 = C_6^x 2^{(x-6)/3} (3)^{-2}$$

El séptimo término contado del extremo final será:

$$t_7 \text{ final: } t_{6-1 \text{ final}} = C_6^x (3^{-1/3})^{x-6} (2^{1/3})^6 = C_6^x 3^{-(x-6)/3} (2)^2$$

$$\text{Por dato: } \frac{C_6^x 2^{(x-6)/3} (3)^{-2}}{C_6^x 3^{-(x-6)/3} (2)^2} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6^{(x-12)/3} = 6^{-1}$$

$$\text{Luego: } \frac{x-12}{3} = -1 \quad \therefore x = 9$$

5. Si un término del desarrollo:

$$B(x) = \left[\left(x^4 + \frac{1}{x^4} \right)^4 - \left(x^4 - \frac{1}{x^4} \right)^4 \right]^m \text{ es } 3 \times 2^{13}.$$

Calcular m .

Resolución:

Efectuando la expresión que hace de base:

$$\left(x^4 + \frac{1}{x^4} \right)^4 - \left(x^4 - \frac{1}{x^4} \right)^4 = 8x^4 \left(\frac{1}{x^4} \right) \left(x^8 + \frac{1}{x^8} \right)$$

Entonces:

$$B(x) = \left[8 \left(x^8 + \frac{1}{x^8} \right) \right]^m = 8^m (x^8 + x^{-8})^m$$

De donde:

$$t_{k+1} = C_k^m (x^8)^m - k (x^{-8})^k = C_k^m x^{8m-k} (8)^m$$

$$t_{k+1} = 8^m C_k^m x^{8m-16k}$$

$$\text{Pero: } 8^m C_k^m = 3 \times 2^{13} \quad \dots (I)$$

$$\text{Por condición: } 8m - 16k = 0 \Rightarrow k = \frac{m}{2}$$

$$\text{Reemplazando en (I): } 8^m C_{m/2}^m = 3 \times 2^{13}$$

$$\text{Por inspección: } m = \{2; 4; 6; 8\}$$

$$\text{Para } m = 4; \text{ se tendrá: } 2^{12} \times 2 \times 3 = 3 \times 2^{13}$$

$$\therefore m = 4$$

6. Determinar $(a+b)$ en la expansión de:

$$B(x, y) = \left[\frac{4x^{2a}}{y^{b-5}} - \frac{y^b}{2x^2} \right]^b \text{ de modo que admita un}$$

solo término central cuya parte literal sea $x^{24} y^{15}$.

Resolución:

Por propiedad:

$$t_c = t_{\left(\frac{b}{2}+1\right)} = C_{\frac{b}{2}}^b \left(\frac{4x^{2a}}{y^{b-5}} \right)^{b/2} \left(\frac{-y^b}{2x^2} \right)^{b/2}$$

$$t_c = C_{\frac{b}{2}}^b (-2)^{b/2} (x^{2(a-1)} y^5)^{b/2}$$

$$t_c = C_{b/2}^b (-2)^{b/2} x^{(a-1)b} y^{5b/2}$$

$$\text{Por dato: } x^{24} y^{15} = x^{(a-1)b} y^{5b/2}$$

Luego:

$$\bullet \frac{5b}{2} = 15 \Rightarrow b = 6$$

$$\bullet (a-1)b = 24 \rightarrow a = 5$$

$$\therefore a + b = 11$$

7. Hallar el número de términos irracionales y racionales que tendrá el desarrollo de: $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^{-1}})^{42}$

Resolución:

Sabemos que las expresiones algebraicas se clasifican en:

$$EA \begin{cases} \text{Racionales (z)} \begin{cases} \text{Enteros (x}^3, y^2, z^5) \\ \text{Fraccionarios (x}^{-5}, y^{-3}, z^{-4}) \end{cases} \\ \text{Irracionales} \Rightarrow (x^{1/3}, \sqrt[5]{x}, \sqrt[3]{y^2}) \end{cases}$$

Primero se calcula el número de términos racionales y los irracionales por diferencia:

Cualquier término del desarrollo estará expresado por:

$$t_{k-1} = C_k^{42} (\sqrt{x})^{42-k} (3\sqrt{x^{-1}})^k = C_k^{42} x^{21-\frac{5}{6}k}$$

Donde: $0 \leq k \leq 42$

Calculando el número de términos racionales:

$$21 - \frac{5}{6}k \in \mathbb{Z}; \text{ luego: } k = 6$$

Para ello el exponente debe ser entero:

$$k = \{0; 6; 12; 18; 24; 30; 36; 42\}$$

Entonces habrá 8 términos racionales.

Luego:

$$\left(\begin{matrix} \text{N.º de términos} \\ \text{irracionales} \end{matrix} \right) = \left(\begin{matrix} \text{N.º total de} \\ \text{términos} \end{matrix} \right) - \left(\begin{matrix} \text{N.º de términos} \\ \text{racionales} \end{matrix} \right)$$

Reemplazando:

$$\therefore \text{ n.º de términos irracionales: } 43 - 8 = 35$$

8. Hallar el coeficiente de xy^4z^3 en el desarrollo de $(x - 2y + 2z)^8$

Resolución:

Agrupando el trinomio y dándole una forma binómica: $t_{p+1} = C_p^8 (x - 2y)^{8-p} (2z)^p$

Luego, cualquier término del desarrollo estará expresado por:

$$t_{p+1} = C_p^8 2^p (x - 2y)^{8-p} z^p$$

La única forma que esta expresión contenga a z^3 ocurrirá si $p = 3$.

$$t_4 = C_3^8 2^3 (x - 2y)^5 z^3$$

Para el binomio $(x - 2y)^5$ en su desarrollo, cualquier término estará expresado por:

$$t_{m+1} = C_m^5 2^m x^{5-m} (-2y)^m z^3$$

Analizando para que esta expresión contenga a y^4 : $m = 4$

$$\text{Finalmente se tendrá: } t_{m+1} = C_4^5 2^4 x^{5-4} y^4 z^3$$

$\therefore$ El coeficiente será:

$$C_3^8 2^3 C_4^5 = 280 \times 128 = 35\,840$$

9. Hallar n en:

$$\frac{C_0^n + 2C_1^n + 5C_2^n + 7C_3^n + \dots + (2n+1)C_n^n}{C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + 4C_4^n + \dots + nC_n^n} = \frac{45}{22}$$

Resolución:

Del denominador:

$$D = C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + 4C_4^n + \dots + nC_n^n = n \times 2^{n-1}$$

Degradando los índices:

$$D = 1\left(\frac{n}{1}\right)C_0^{n-1} + 2\frac{n}{2}C_1^{n-1} + 3\frac{n}{3}C_2^{n-1} + 4\frac{n}{4}C_3^{n-1} + \dots + n\frac{n}{n}C_n^{n-1}$$

$$D = n(C_0^{n-1} + C_1^{n-1} + C_2^{n-1} + C_3^{n-1} + \dots + C_n^{n-1}) = n2^{n-1}$$

Del numerador:

$$N = C_0^n + (1+2)C_1^n + (1+4)C_2^n + (1+6)C_3^n + \dots + (1+2n)C_n^n$$

$$N = C_0^n + C_1^n + C_2^n + C_3^n + C_4^n + \dots + C_n^n + 2[C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + 4C_4^n + \dots + nC_n^n]$$

$$N = 2^n + 2n \times 2^{n-1} = 2^n + 2^n \times n$$

Reemplazando en la expresión dada se tendrá:

$$\frac{2^n + n2^n}{n2^{n-1}} = \frac{2^n(n+1)}{2^n(n \times 2^{-1})} = \frac{2+2n}{n} = \frac{45}{22}$$

$$\therefore n = 44$$

$$10. \text{ Reducir: } S = \frac{C_0^n}{1} + \frac{C_1^n}{2} + \frac{C_2^n}{3} + \frac{C_3^n}{4} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$$

Resolución:

$$(n+1)S = \frac{(n+1)}{1}C_0^n + \frac{(n+1)}{2}C_1^n + \frac{(n+1)}{3}C_2^n + \frac{(n+1)}{4}C_3^n + \dots + \frac{(n+1)}{n+1}C_n^n$$

$$(n+1)S = C_0^{n+1} + C_1^{n+1} + C_2^{n+1} + C_3^{n+1} + \dots + C_n^{n+1} - 1$$

$$\therefore S = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Formula de Leibniz ($n \in \mathbb{N}$)

Se utiliza para determinar el coeficiente de un término cualquiera en el desarrollo de un binomio elevado a un exponente natural.

Si queremos calcular el coeficiente de $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3}$, estará expresado por:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k)^n = \frac{\sum n! (x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_k^{a_k})}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3! + \dots + \alpha_k!}$$

$$\text{Donde } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_k = n$$

Ejemplos:

1. Calcular el coeficiente de x^6 en el desarrollo de: $(1 + 2x - x^2)^5$

Resolución:

El coeficiente estará dado por:

$$\Sigma \frac{5!}{a!b!c!} (1)^a (2x)^b (-x^2)^c$$

$$\text{Donde: } a + b + c = 5$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{array}$$

$$\frac{5!}{2!(0)!1(3)!} (1)^2 (2x)^0 (-x^2)^3 + \frac{5!}{1!2!2!} (1)^1 (2x)^2 (-x^2)^2 + \frac{5!}{0!4!1!} (1)^0 (2x)^4 (-x^2)^1 = 30x^6$$

∴ Coeficiente = 30

2. Calcular el coeficiente de x^5 en el desarrollo de:
 $(1 - 3x - 2x^2 + 6x^3)^{2/3}$

Resolución:

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{a!b!c!} (-3x)^a (-2x^2)^b (6x^3)^c$$

Donde: $a + b + c = k$

Pero: $a + b + c = k$

$$0 \ 0 \ 1 \ 1$$

$$1 \ 1 \ 0 \ 2$$

$$3 \ 0 \ 0 \ 3$$

para que resulte x^5 .

El coeficiente será:

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{2}{3}\right)(-3)^0(2)^1(6)}{0!0!1!} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)(-3)^1(-2)^1(6)^0}{1!1!0!} \\ & + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)(-3)^2(-2)^0(6)^0}{3!0!0!} \\ & = \left(\frac{2}{3}\right) \times 6 + \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)(-2) + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)(-27)}{6} \\ & \therefore 4 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Binomio de newton ($n \notin \mathbb{N}$)

Para estos casos se usa el coeficiente binómico:

$$(x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \dots$$

Donde deberá tenerse en cuenta las observaciones siguientes:

1. El desarrollo de $(x + a)^n$ es una serie de un número ilimitado de términos.
2. Es necesario tener el binomio en la forma: $(1 + b)^n$

Ejemplos:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$$

$$(x + a)^n = x^n \left(1 + \frac{a}{x}\right)^n; \quad -1 < \frac{a}{x} < 1$$

3. Si x es pequeño se puede considerar:

$$(1 \pm x)^m < 1 \therefore (mx)$$

Demostración:

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots$$

$$(1 + x)^n = \frac{1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \dots}{2!}$$

Si x es pequeño:

$$\frac{n(n-1)x^2}{2!} \approx 0 \quad \text{y} \quad \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} \approx 0$$

$$\therefore (1 + x)^n \approx 1 + nx$$

Ejemplo:

Calcular $\sqrt[3]{28}$

Resolución:

$$\text{Como: } \sqrt[3]{28} = 28^{1/3}$$

$$\text{Escribiendo: } 28 = 27 + 1$$

$$\begin{aligned} (27 + 1)^{1/3} & \approx \left[27\left(1 + \frac{1}{27}\right)\right]^{-1/3} \approx 3\left(1 + \frac{1}{27}\right)^{1/3} \\ & \approx 3\left(1 + \frac{1}{81}\right) \approx \frac{82}{27} \approx 3,03 \end{aligned}$$

Cálculo del término general

$$\text{Si } (x + a)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}a + \binom{n}{2}x^{n-2}a^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}a^3 + \dots$$

$$\text{Tenemos: } t_1 = \binom{n}{0}x^n$$

$$t_2 = \binom{n}{1}x^{n-1}a$$

$$t_3 = \binom{n}{2}x^{n-2}a^2$$

$$t_4 = \binom{n}{3}x^{n-3}a^3$$

⋮

$$t_{20} = \binom{n}{19}x^{n-19}a^{19}$$

⋮

$$t_{k+1} = \binom{n}{k}x^{n-k}a^k \quad \text{fórmula del término general}$$

Donde: n : exponente del binomio

$(k + 1)$: lugar del término

x : primera base

a : segunda base.

Ejemplos:

1. Hallar el t_{25} en $(x^7 - \sqrt[5]{b^3})^{53}$.

Resolución:

$$t_{25} = \binom{53}{24}(x^7)^{53-24}(\sqrt[5]{b^3})^{24}$$

2. Hallar el séptimo término en $(1 + x)^{1/2}$.

Resolución:

$$t_7 = t_{6+1} = \binom{1/2}{6}(1)^{\frac{1}{2}-6}x^6$$

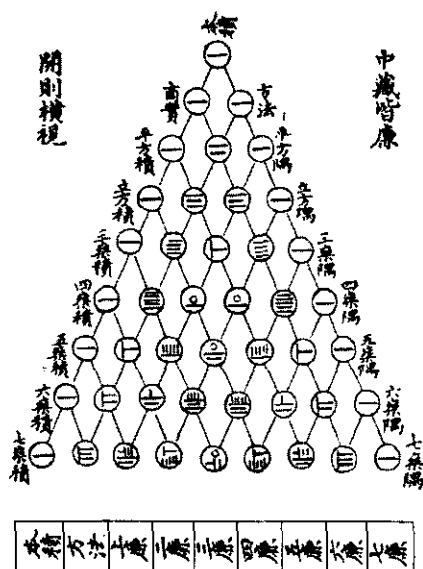
$$\begin{aligned} t_7 & = \frac{1\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)\left(\frac{1}{2}-3\right)\left(\frac{1}{2}-4\right)\left(\frac{1}{2}-5\right)}{6!}x^6 \\ & = \frac{1\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)\left(-\frac{9}{2}\right)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}x^6 \end{aligned}$$

$$t_7 = t_{6-1} = \frac{-21}{1024} x^6$$

◀ EL TRIÁNGULO DE PASCAL O TARTAGLIA

El sistema de tabulación para calcular coeficientes de potencias de binomios o triángulo aritmético, rectángulo de Tartaglia o triángulo de Pascal, es uno de los modelos numéricos más famosos en la historia de la Matemática; tal pareciera inagotable de riquezas matemáticas, ofrece una notable correspondencia entre su simple construcción, los coeficientes del desarrollo del binomio de Newton y los relevantes conceptos de combinaciones y variaciones del análisis combinatorio y el cálculo de probabilidades.

Durante la edad media oriental, en China, el matemático Chia Hsien (1100 d. C.) lo define como sistema de tabulación para calcular coeficientes de binomios. En la obra del matemático chino Chu Shih Chieh (1270 - 1330 d. C.), Ssu - yuan yu - chien (*Espejo precioso de los cuatro elementos*) escrita en 1303, en la primera página aparece un delicado diagrama (ver figura) del triángulo; la obra refiere su estudio a los "cuatro elementos" como las cuatro incógnitas figurativamente llamadas cielo, tierra, hombre y objeto.



Estudia ecuaciones simultáneas, ecuaciones elevadas a exponentes tan altos como el decimocuarto, el algoritmo *fan-fan* (redescubierto por William Horner y Paolo Ruffini en 1819), la suma de series y progresiones geométricas y aritméticas, y una disposición del binomio $(x + y)^n$ con los coeficientes dispuestos hasta la octava potencia, valiéndose para ello el autor del que llama *método celestial* o *método muy antiguo* para calcular las potencias hasta la octava inclusive.

Posteriormente, la Alemania renacentista dará a conocer su contenido al mundo matemático europeo en la segunda mitad del siglo XVI, con el matemático alemán Michael Stifel (1487-1567) y su obra *Arithmetica integra* (1544) considerado como el más importante de los libros de álgebra impresos hasta esa época (aunque algunos años atrás, en 1527, un dibujo del triángulo había aparecido decorando la portada del libro sobre aritmética comercial *Rechnung* del cosmógrafo y matemático alemán Petrus Apianus).

El matemático italiano Niccolo Tartaglia estudia en su obra, que consta de tres volúmenes publicados entre 1556 y 1560, *General trattato di numeri et misure* (*Tratado general sobre el número y la medida*) una disposición numérica similar que llamó Rectángulo aritmético.

El matemático francés Blaise Pascal (1623-1662) es el primero en relacionar rigurosamente los números combinatorios con el Teorema del Binomio (ya en alguna forma conocidos desde el siglo XIV), en un tratado escrito en 1653 y póstumamente publicado en 1665 (que incluía también su muy particular *método de inducción*): *Traité du triangle arithmétique* (*Tratado del triángulo aritmético*), deduciendo nuevas propiedades y aplicaciones del triángulo a la teoría combinatoria y a la teoría de probabilidades. En 1886 el matemático escocés George Chrystal lo denomina *Triángulo de Pascal* en el volumen I de su obra *Álgebra*.

Construcción del triángulo

Se ubican los números en un arreglo triangular con unos (1) en el vértice superior y en los lados adyacentes a dicho vértice. Cada uno de los demás términos resulta de sumar los dos números inmediatamente superiores a su izquierda y a su derecha, en una disposición infinita. Las líneas o filas se enumeran de arriba hacia abajo y los términos, las verticales o columnas y las diagonales, de izquierda a derecha, partiendo de cero y considerando la simetría.

			1						
				1		1			
					1	2	1		
			1	3	3	1			
		1	4	6	4	1			
	1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1			
1	7	21	35	35	21	7	1		

Diagrama del triángulo de Pascal; en él se muestran las ocho primeras filas (de la fila 0 a la fila 7).

Algunas propiedades en el triángulo de Pascal

Las tres propiedades siguientes, son textualmente extraídas del *Traité du triangle arithmétique* de Blaise Pascal y referidas a un particular diagrama con un giro de 45° con respecto al actual.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

- En todo triángulo aritmético, si dos células son contiguas en la misma base, la superior es a la inferior como el número de células desde la superior hasta lo alto de la base es al número de células desde la inferior hasta abajo inclusive.
- En todo triángulo aritmético, la suma de las células desde una fila paralela cualquiera es igual al número de combinaciones del exponente de la fila en el exponente del triángulo; propiedad que lo relaciona con la teoría combinatoria.
- En un juego de dos jugadores, a cada uno de los cuales le falta un cierto número de partidas para terminar el juego. Encontrar mediante el triángulo aritmético el reparto que hay que hacer (si quieren separarse sin jugar), teniendo en cuenta las partidas que le faltan a cada uno.

Resolución: tómese en el triángulo la base en la que haya tantas células como partidas les falte a los dos juntos; a continuación, tómense en esta base tantas células seguidas, comenzando por la primera, como partidas le faltan al primer jugador, y tómese la suma de sus números. Por tanto quedan tantas células como partidas le faltan al otro jugador. Tómese de nuevo la suma de sus números. Estas sumas son la una a la otra como las ventajas reciprocas de los jugadores. Esta particular propiedad, relaciona al triángulo de Pascal con el problema de determinar las apuestas entre dos jugadores que juegan varias partidas.

Las propiedades que se proponen luego hacen referencia al diagrama que se usa en la actualidad y que mostramos a continuación:

				1						fila 0
				1		1				fila 1
			1	2		1				fila 2
		1	3		3		1			fila 3
	1	4		6		4		1		fila 4
	1	5		10		10		5		fila 5
	1	6		15		20		15		fila 6
	1	7		21		35		35		fila 7
1	8		28		56		70		56	fila 8
					⋮					
					⋮					

- El término situado en la fila n y la columna m es el número $\binom{n}{m}$.

- Los unos en el vértice superior (o fila cero) y los lados adyacentes son fácilmente verificables mediante:

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = \binom{0}{0} = 1, \text{ para todo } n \geq 0$$

- Si la simetría bilateral, consecuencia de la relación.

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

que expresa la igualdad de los números colocados simétricamente respecto del eje vertical (eje de simetría del triángulo). Todas las filas son simétricas respecto a dicho eje, pues la propiedad de simetría se conserva al pasar de una fila a otra.

- La enésima fila contiene $n + 1$ términos.
- La diagonal nula da el equivalente en el espacio cero y solo puede concebirse como formada por el punto (el vértice) en el que aparece el número 1.
- La primera diagonal está formada exclusivamente por unos (1).
- La segunda diagonal está formada por los números naturales.
- La tercera diagonal proporciona los números triangulares 1; 3; 6; 10; 15; ... así llamados por ser el cardinal de un conjunto de puntos que componen una disposición triangular con n puntos por lado en el espacio bidimensional. Cada uno de ellos se deduce del número triangular anterior sumándole el número de términos anteriores incluyendo el seleccionado.
- La expresión del enésimo número triangular $\binom{n+1}{2}$ nos dice cuántos términos del triángulo de Pascal contiene sus n primeras filas, desde la cero hasta la $n - 1$.
- La cuarta diagonal contiene los números tetraédricos y piramidales o triángulo-piramidales 1; 4; 10; 20; 35; ... que se obtienen por adición de triángulos sucesivos en el espacio tridimensional.

- El enésimo número tetraédrico está dado por la expresión $\binom{n+2}{3}$ y geoméricamente representa el número de puntos de una red piramidal de base una red triangular de orden n .

- La quinta diagonal 1; 5; 15; 35; 70; ... da el número de puntos que forman disposiciones triangulares en el espacio $(n - 1)$ dimensional.
- La suma de los cuadrados de los números de una fila es igual al número del mismo triángulo.
- La suma de los términos de la enésima fila es equivalente al doble $2n$ de la suma de la siguiente fila $n + 1$.

- La suma de los números de la fila n es 2^n .
- La suma de todos los números situados sobre cualquier diagonal hasta una cierta posición, es el número situado directamente debajo y a la derecha.
- La suma de las diagonales de menor pendiente forman la famosa sucesión de Fibonacci: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ..., propiedad no conocida por Pascal, pues fue descubierta recién a finales del siglo XIX.
- Si se eliminan diagonales del lado izquierdo del triángulo se obtienen sumas parciales de la sucesión de Fibonacci (propiedad descubierta por el matemático Verner E. Hoggatt Jr.): si se eliminan k diagonales, se obtienen las sumas parciales de orden k de la sucesión de Fibonacci.

- La fila n contiene los coeficientes del desarrollo de las potencias enésimas del binomio de Newton $(x + y)^n$, propiedad que relaciona inmediatamente al triángulo de Pascal con la combinación elemental y la teoría de probabilidades. Y la expresión:

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

dada por M. Stifel (1544), permite calcular recursivamente estos coeficientes binomiales.

- Todos los números de la fila n son impares si y solo si $n = 2^r - 1$ para algún entero r .
- Todos los números del interior de la fila n (exceptuando los extremos) son divisibles por n si y solo si n es primo.



PROBLEMAS

1. Si $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ / 3 \binom{10x}{3} - 4196 \binom{5x}{2} = 0\} = \{abc\}$

indicar el valor de: $a + b + c$

Resolución:

$$\text{De } A: 3 \binom{10x}{3} = 4196 \binom{5x}{2}; x \in \mathbb{Z}^+$$

Desarrollando los coeficientes binómicos:

$$\frac{3(10x)(10x-1)(10x-2)}{1 \times 2 \times 3} = \frac{4196(5x)(5x-1)}{1 \times 2}$$

$$2(5x)(10x-1)2(5x-1) = 4196(5x)(5x-1)$$

$$4(10x-1) = 4(1049) \Rightarrow 10x-1 = 1049 \Rightarrow x = 105$$

$$\text{Luego: } A = \{105\} = \{abc\}$$

$$\therefore a + b + c = 6$$

2. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 12 juguetes entre 3 niños, de tal manera que cada niño reciba cuatro juguetes?

Resolución:

N.º de juguetes: 12

- Para el 1.º niño; el N.º de maneras en que se le distribuye los 12 juguetes de tal manera que reciba 4 es: C_4^{12}
- Para el 2.º niño, el N.º de maneras en que se le puede distribuir 8 juguetes de manera que reciba 4 es: C_4^8
- Para el 3.º niño, el N.º de maneras en que se le distribuirá 4 juguetes de manera que reciba 4 es: C_4^4

Por principio de la multiplicación, lo pedido viene dado por: $C_4^{12} \times C_4^8 \times C_4^4$

$$\text{Calculando c/u se tiene: } 495 \times 70 \times 1 = 34\,650$$

3. Si: $C_1^n + C_2^n + C_3^n + \dots + C_{n-1}^n = 30$, hallar el valor de n .

RESUELTOS



Resolución:

Sumamos: C_0^n y C_n^n ($C_0^n = C_n^n = 1$)

$$\Rightarrow \underbrace{C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_{n-1}^n + C_n^n}_{\text{Conocido}} = 30 + C_0^n + C_n^n$$

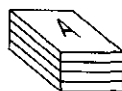
$$\Rightarrow 2^n = 30 + 1 + 1 \Rightarrow 2^n = 2^5 \quad \therefore n = 5$$

4. En un estante hay 4 libros de Aritmética y 5 de Geometría. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden coger 5 libros de modo que 2 sean de Aritmética y 3 de Geometría?

Resolución:

4 libros de A

5 libros de G



• N.º de maneras de escoger 2 libros

de A: C_2^4

• N.º de maneras de escoger 3 libros

de G: C_3^5

Por principio de la multiplicación, el N.º de maneras de escoger 5 libros, donde 2 son de A y 3 de G:

$$C_2^4 \times C_3^5 = 6 \times 10 = 60$$

5. Se quiere seleccionar 5 preguntas de un total de 12, pero 2 de ellos no pueden escogerse a la vez. ¿Cuántas formas existen?

Resolución:

12 preguntas: A, B; C; ...; M

- Si se escoge A y no B $\Rightarrow$ hay que escoger 4 preguntas de las 10 restantes $\Rightarrow$ N.º de formas: C_4^{10}
- Si se escoge B y no A (similar al anterior $\Rightarrow$ N.º de formas: C_4^{10})
- Si no escoge A ni B $\Rightarrow C_5^{10}$

$$\therefore \text{N.º total de formas: } 2C_4^{10} + C_5^{10} = 672$$

6. Si el desarrollo de $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^n$ admite 495 términos, entonces determinar el número de términos que posee el desarrollo de $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{n/2}$:

Resolución:

En el desarrollo de: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^n$

$$N.^\circ \text{ de términos} = C_{n+5-1}^n = 495 \Rightarrow C_{n+4}^n = 495$$

$$\Rightarrow C_{n+4}^n = C_n^{12} \Rightarrow n+4 = 12 \Rightarrow n = 8 \quad \frac{n}{2}$$

En el desarrollo de: $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^{\frac{n}{2}}$

$$N.^\circ \text{ de términos} = C_{\frac{n}{2}+4-1}^{\frac{n}{2}} = C_4^7 = C_3^7$$

$$\therefore N.^\circ \text{ de términos} = \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} = 35$$

7. En el desarrollo de $(a^2 + b - a)^8$, indicar el coeficiente del término de la forma $a^{10}b^k$, donde k es un número par no nulo.

Resolución

Por la fórmula de Leibniz, un término del desarrollo de: $(a^2 + b - a)^8$ será:

$$\frac{8!}{\alpha! k! \beta!} (a^2)^\alpha b^k (-a)^\beta \wedge \alpha + k + \beta = 8$$

$$\Rightarrow \frac{8!}{\alpha! k! \beta!} (-1)^\beta a^{2\alpha - \beta} b^k \wedge \alpha + k + \beta = 8$$

Además: $2\alpha + \beta = 10 \wedge k$ es par; $k \neq 0$

Notar que $\beta \wedge \alpha$ deben ser pares.

- $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 10$ (no puede ser)
- $\alpha = 2 \Rightarrow \beta = 6 \wedge k = 0$ (no puede ser)
- $\alpha = 4 \Rightarrow \beta = 2 \wedge k = 2$

$$\Rightarrow \frac{8!}{4! 2! 2!} (-1)^2 a^{10} b^2 = 420 a^{10} b^2$$

(no hay más posibilidades)

$\therefore$ El coeficiente es: 420

8. Hallar la suma de coeficientes de los cuatro primeros términos del siguiente desarrollo:

$$\frac{1}{1 + 3x + 3x^2 + x^3}$$

Resolución:

$$\frac{1}{1 + 3x + 3x^2 + x^3} = \frac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3}$$

$$= \binom{-3}{0} + \binom{-3}{1}x + \binom{-3}{2}x^2 + \binom{-3}{3}x^3 + \dots$$

Se pide:

$$S = \binom{-3}{0} + \binom{-3}{1} + \binom{-3}{2} + \binom{-3}{3}$$

$$S = 1 + (-3) + \frac{(-3)(-4)}{1 \times 2} + \frac{(-3)(-4)(-5)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\therefore S = 1 - 3 + 6 - 10 = -6$$

9. Determinar el valor del término independiente del desarrollo de la potencia:

$$\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)^5$$

Resolución

Por la fórmula de Leibniz:

$$\frac{5!}{\alpha! \beta! \gamma!} x^\alpha \left(-\frac{1}{x}\right)^\beta (1)^\gamma \wedge \alpha + \beta + \gamma = 5$$

$$\Rightarrow \frac{5!}{\alpha! \beta! \gamma!} (-1)^\beta x^{\alpha - \beta} \wedge \alpha + \beta + \gamma = 5$$

Además, como el término es independiente de x :

$$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta \Rightarrow 2\alpha + \gamma = 5$$

$$\bullet \gamma = 1 \wedge \alpha = 2 \wedge \beta = 2 \Rightarrow \frac{5!}{2! 2! 1!} (-1)^2 = 30$$

$$\bullet \gamma = 3 \wedge \alpha = 1 \wedge \beta = 1 \Rightarrow \frac{5!}{1! 1! 3!} (-1)^1 = -20$$

$$\bullet \gamma = 5 \wedge \alpha = 0 \wedge \beta = 0 \Rightarrow \frac{5!}{0! 0! 5!} (-1)^0 = 1$$

$$\therefore \text{El TI será: } 30 - 20 + 1 = 11$$

10. Dado el polinomio: $\left(\frac{x^6}{4} + \frac{9}{x^2} - 3x^2\right)^{11}$

indicar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

- El número de términos del desarrollo es 11.
- El desarrollo solo tiene un término central.
- La suma de los coeficientes de todos los términos es $\frac{22}{3}$

Resolución:

$$\left(\frac{x^6}{4} + \frac{9}{x^2} - 3x^2\right)^{11} = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{x}\right)^{22}$$

- El desarrollo tiene 23 términos. (F)
- Como $n = 22$ es par, entonces hay un solo término central. (V)
- La suma de coeficientes de todos los términos es para $x = 1$: $\left(\frac{1}{2} - 3\right)^{22} = \left(-\frac{5}{2}\right)^{22}$ (F)

$\therefore$ FVF

11. Si el único término central del desarrollo de $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^n$ es $1120x^4$. Determinar el séptimo término de dicho desarrollo.

Resolución:

Si $\left(x^3 - \frac{2}{x^2}\right)^n$ tiene un único término central, entonces n es par. Dicho término ocupa el lugar: $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$

$$\Rightarrow t_c = t\left(\frac{n}{2} + 1\right) = C_{\frac{n}{2}}^n (x^3)^{\frac{n}{2}} (-2x^{-2})^{\frac{n}{2}}$$

$$\text{Comparando la variable} = x^{2\frac{n}{2} - n}$$

$$\text{Usando el dato: } x^2 \equiv x^4 \Rightarrow n = 8$$

$$\text{El término pedido es: } t_7 = +C_6^8 (x^3)^2 (2x^{-2})^6$$

$$\Rightarrow C_2^8 (2)^6 x^6 = \frac{8 \times 7}{2} \times 64 x^6 \therefore t_7 = 1792 x^6$$

12. Una clínica tiene 25 empleados profesionales, 4 de ellos cirujanos. ¿De cuántas maneras puede for-

marse grupos de tres profesionales donde por lo menos uno de ellos sea cirujano?

Resolución:

El N.º total de maneras en que se pueden agrupar los 25 profesionales en grupos de 3 es C_3^{25} .

El N.º total de maneras en que se puede los profesionales en grupos de 3 sin que participe ningún cirujano es C_3^{21} .

Luego, el N.º de maneras en que puede formarse grupos de 3, donde por lo menos uno de ellos sea cirujano es $C_3^{25} - C_3^{21} = 970$

13. Determinar el coeficiente del término $x^{28}y^{18}$ en el desarrollo de $(x^2 + y^3)^{20}$.

Resolución:

Supongamos que el término en $x^{28}y^{18}$ ocupa lugar $k + 1$.

$$\text{De: } (x^2 + y^3)^{20} \Rightarrow t_{k+1} = C_k^{20} (x^2)^{20-k} (y^3)^k$$

$$\Rightarrow t_{k+1} = C_k^{20} x^{40-2k} y^{3k}$$

$$\text{De aquí: } 40 - 2k = 28 \Rightarrow 3k = 18 \Rightarrow k = 6$$

$$\therefore \text{Coeficiente pedido: } C_6^{20}$$

14. Los exponentes de x en el desarrollo del binomio

$$\left(x^m + \frac{1}{\sqrt[3]{x^m}}\right)^n \text{ van disminuyendo de 8 en 8, el término de lugar 13 es independiente de } x. \text{ Hallar el número de términos de su desarrollo.}$$

El término de lugar 13 es independiente de x . Hallar el número de términos de su desarrollo.

Resolución:

Desarrollando se tiene:

$$(x^m + x^{-\frac{m}{3}})^n = \underbrace{(x^m)^n} + \underbrace{n(x^m)^{n-1}(x^{-\frac{m}{3}})} + \dots$$

$$\text{Exp. de } x \rightarrow mn \quad mn - m - \frac{m}{3}$$

$$\text{Por dato: } mn - (mn - m - \frac{m}{3}) = 8$$

$$\Rightarrow m + \frac{m}{3} = 8 \Rightarrow m = 6$$

$$\text{El binomio es: } (x^6 + x^{-2})^n$$

$$\Rightarrow t_{13} = C_{12}^n (x^6)^{n-12} (x^{-2})^{12} = C_{12}^n x^{6n-96} = T(x)$$

$$\text{De aquí: } 6n - 96 = 0 \Rightarrow n = 16$$

$$\therefore \text{N.º de términos del desarrollo: } 16 + 1 = 17$$

15. Si el término n contado a partir del último término en el desarrollo de $(x^3 + \frac{1}{y^2})^n$ es $px^{18}y^{-2}$, hallar el valor de: $T = np$

Resolución:

$$\text{De: } \left(x^3 + \frac{1}{y^2}\right)^n \Rightarrow t_n = C_{n-1}^n (x^3)^{n-1} (y^{-2})^1$$

$$\text{Luego: } C_{n-1}^n x^{3(n-1)} y^{-2} \equiv px^{18}y^{-2}$$

$$\Rightarrow 3(n-1) = 18 \Rightarrow n = 7$$

$$C_{n-1}^n = C_1^n = n = p \Rightarrow p = 7$$

$$\therefore T = 7 \times 7 = 49$$

16. Si el décimo término del desarrollo del binomio $(x^p + x^q)^n$ es x^{18} , hallar el valor de $(q + n)$.

Resolución:

$$\text{De: } (x^p + x^q)^n \Rightarrow t_{10} = C_9^n (x^p)^{n-9} (x^q)^9$$

$$\text{Por dato: } t_{10} = x^{18} \Rightarrow t_{10} = C_9^n x^{p(n-9) + 9q} \equiv x^{18}$$

$$\text{De aquí: } C_9^n = 1 \Rightarrow n = 9$$

$$p(n-9) + 9q = 18 \Rightarrow q = 2 \quad \therefore q + n = 11$$

17. Determinar el t_{103} del desarrollo de: $(x^3 - \sqrt[3]{y})^{104}$

Resolución:

$$\text{De: } (x^3 - \sqrt[3]{y})^{104}$$

$$\Rightarrow t_{103} = C_{102}^{104} (x^3)^2 (\sqrt[3]{y})^{102} \text{ (lugar impar)}$$

$$\therefore t_{103} = C_{102}^{104} x^6 y^{34}$$

18. En la expansión de $(4x^3 + 3y^2)^n$, la suma de los grados absolutos de todos los términos de su expansión es 275, determinar el valor de n .

Resolución:

Del desarrollo de $(4x^3 + 3y^2)^n$ se tiene:

Σ de grados de todos los términos:

$$5 \left[\frac{n(n+1)}{2} \right] = 275 \text{ (Dato)}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 55 \Rightarrow n(n+1) = 110$$

$$\text{De donde: } n(n+1) = 10 \times 11$$

$$\therefore n = 10$$

19. En el desarrollo del binomio $(1 + y)^{52}$ los coeficientes de los términos de lugares $2m + 1$ y $m + 2$ son iguales. Determinar dichos lugares.

Resolución:

$$\text{De: } (1 + y)^{52}$$

$$t_{2m+1} = C_{2m}^{52} y^{2m}$$

$$t_{m+2} = C_{m+1}^{52} y^{m+1}$$

$$\text{Por condición: } C_{2m}^{52} = C_{m+1}^{52}$$

Posibilidades:

$$\bullet \quad 2m = m + 1 \Rightarrow m = 1 \quad (\text{Incorrecto})$$

Se trataría del mismo término.

$$\bullet \quad 2m + (m + 1) = 52 \Rightarrow m = 17 \quad (\text{Correcto})$$

$$\therefore \text{Los términos son de lugares 35 y 19.}$$

20. Determinar el coeficiente de x^8 en el desarrollo de: $(1 + 3x^2 - 2x^4)^6$

Resolución:

Por la fórmula de Leibniz:

$$\frac{6!}{\alpha! \beta! \gamma!} (1^\alpha)(3x^2)^\beta (-2x^4)^\gamma \wedge \alpha + \beta + \gamma = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6!}{\alpha! \beta! \gamma!} (3)^\beta (-2)^\gamma x^{2(\beta+2\gamma)} \wedge \alpha + \beta + \gamma = 6$$

$$\text{Además: } 2(\beta + 2\gamma) = 8 \Rightarrow \beta + 2\gamma = 4$$

$$\text{Se nota que } \beta \text{ es par } \wedge \beta \leq 4$$

$$\bullet \beta = 0 \wedge \gamma = 2 \wedge \alpha = 4$$

$$\Rightarrow \frac{6!}{4!0!2!}(3)^0(-2)^2x^8 = 60x^8$$

$$\bullet \beta = 2 \wedge \gamma = 1 \wedge \alpha = 3:$$

$$\Rightarrow \frac{6!}{3!2!1!}(3)^2(-2)^1x^8 = -1080x^8$$

$$\bullet \beta = 4 \wedge \gamma = 0 \wedge \alpha = 2:$$

$$\Rightarrow \frac{6!}{2!4!0!}(3)^4(-2)^0x^8 = 1215x^8$$

$\therefore$ El coeficiente de x^8 será: $60 - 1080 + 1215 = 195$

21. A qué exponente se debe elevar el binomio $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)$; si el término de lugar 11 de su expansión es de grado 20.

Resolución:

Supongamos que el exponente sea n : $\left(x^2 + \frac{1}{2x}\right)^n$

$$\text{De aquí: } t_{11} = C_{10}^n (x^2)^n (-10) \left(\frac{1}{2x}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow G(t_{11}) = 2(n - 10) - 10$$

$$\text{Por dato: } 2(n - 10) - 10 = 20$$

$$\therefore n = 25$$

22. Determinar el valor de n en la siguiente igualdad:

$$1 + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!) = 719$$

Resolución:

Tenga en cuenta que: $a! + a(a!) = (a+1)!$

Sumemos 1 a ambos miembros en la igualdad dada, se tendrá:

$$1 + 1 + 2(2!) + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 719 + 1$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

$$\frac{2!}{3!} + \frac{2(2!)}{4!} + 3(3!) + 4(4!) + \dots + n(n!) = 720$$

23. Determinar la suma de los valores de n que verifican la siguiente igualdad: $\frac{n!(n! - 321)}{5(n!) - 9} = 80$

Resolución

$$\text{Hagamos: } n! = x \Rightarrow x(x - 321) = 80(5x - 9)$$

$$\Rightarrow x^2 - 721x + 720 = 0 \Rightarrow (x - 720)(x - 1) = 0$$

De aquí:

$$\text{Si } x = 720 \Rightarrow n! = 720 \Rightarrow n = 6$$

$$\text{Si } x = 1 \Rightarrow n! = 1 \Rightarrow n = 0 \vee n = 1$$

$$\therefore \Sigma \text{ de los valores de } n: 6 + 0 + 1 = 7$$

24. Determinar una expresión equivalente al simplificar:

$$\frac{2^n [(2n)!]^2}{(4n)!! (2n-1)!!}$$

Resolución:

Aplicando en el problema:

$$(4n)!! = 2^{2n}(2n)!$$

$$(2n-1)!! = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

Reemplazando nos queda:

$$\frac{2^n [(2n)!]^2}{2^{2n}(2n)! \times \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}}$$

$$= \frac{2^n (2n)! \times 2^{n-1}(n-1)!}{2^{2n}(2n-1)!}$$

$$= \frac{2^n (2n)(2n-1)! \times 2^{n-1}(n-1)!}{2^{2n}(2n-1)!}$$

$$\therefore \frac{2^n \times 2 \times 2^{n-1} \times n(n-1)!}{2^{2n}} = \frac{2^{2n} \times n!}{2^{2n}} = n!$$

25. Determinar el valor de n en la siguiente igualdad:

$$\frac{[3(3n^2 + 10n + 8)](3n+5)!(3n+4)!}{(3n+5)! - (3n+4)!} = 108!$$

Resolución:

$$\text{Como: } 3n^2 + 10n + 8 = (3n+4)(n+2)$$

Reemplazando:

$$\frac{3(3n+4)(n+2)(3n+5)!(3n+4)!}{(3n+5)(3n+4)! - (3n+4)!} = 108!$$

$$\frac{(3n+4)(3n+6)(3n+5)!(3n+4)!}{(3n+4)!(3n+5-1)} = 108!$$

$$\Rightarrow \frac{(3n+6)(3n+5)!}{(3n+6)!} = 108!$$

$$\Rightarrow \frac{(3n+6)!}{(3n+6)!} = 108! \Rightarrow 3n+6 = 108$$

$$\therefore n = 34$$

26. Determinar el coeficiente de x^{78} en el desarrollo de:

$$\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)^{30}, \text{ dar como respuesta la suma de sus cifras.}$$

Resolución:

Sea $k+1$ el lugar del término que contiene a x^{78} .

$$\text{Entonces: } t_{k+1} = C_k^{30} (x^3)^{30-k} (x^{-1})^k = px^{78}$$

$$\Rightarrow C_k^{30} x^{90-4k} = px^{78} \Rightarrow 90 - 4k = 78 \Rightarrow k = 3$$

Luego, el coeficiente será:

$$p = C_3^{30} = \frac{30 \times 29 \times 28}{1 \times 2 \times 3} = 4060$$

$$\therefore \text{Suma de cifras: } 4 + 6 = 10$$

27. Determinar $n + r$, en:

$$\frac{C_r^n + 3C_{r-1}^n + 3C_{r-2}^n + C_{r-3}^n}{C_{r-1}^n + 2C_{r-2}^n + C_{r-3}^n} = \frac{37-r}{r}$$

Resolución:

Trabajemos por separado con el numerador (N) y denominador (D) de la 1.ª fracción.

Desdoblado se puede escribir:

$$N = C_r^n + C_{r-1}^n + 2C_{r-1}^n + 2C_{r-2}^n + C_{r-2}^n + C_{r-3}^n$$

$$N = C_r^{n-1} + 2C_{r-1}^{n-1} + C_{r-2}^{n-1}$$

$$N = \frac{C_{r-1}^{n+1} + C_{r-1}^{n+1}}{r} + \frac{C_{r-1}^{n+1} + C_{r-1}^{n+1}}{r}$$

$$N = \frac{C_{r-1}^{n+2} + C_{r-1}^{n+2}}{r} = \frac{C_{r-1}^{n+3}}{r}$$

$$D = \frac{C_{r-1}^{n+1} + C_{r-2}^{n+1}}{r} + \frac{C_{r-2}^{n+1} + C_{r-3}^{n+1}}{r}$$

$$D = \frac{C_{r-1}^{n+1}}{r} + \frac{C_{r-2}^{n+1}}{r} \Rightarrow D = \frac{C_{r-1}^{n+2}}{r}$$

Reemplazando:

$$\frac{C_{r-1}^{n+3}}{C_{r-1}^{n+2}} = \frac{37-r}{r} \Rightarrow \frac{n+3}{r} \cdot \frac{C_{r-1}^{n+2}}{C_{r-1}^{n+2}} = \frac{37-r}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{n+3}{r} = \frac{37-r}{r} \quad \therefore n+r=34$$

28. Determinar el valor de $J = 3x + 7y$, si se cumple:

$$C_{y-1}^x = C_y^x; 4C_y^x = 5C_{y-2}^x$$

Resolución:

De $C_{y-1}^x = C_y^x$, única posibilidad:

$$y-1+y=x \Rightarrow x=2y-1 \quad \dots(I)$$

De $4C_y^x = 5C_{y-2}^x$; reemplazando x :

$$4C_y^{2y-1} = 5C_{y-2}^{2y-1}$$

$$\text{De } 4C_y^{2y-1} = 5C_{y-2}^{2y-1}; \text{ degradando:}$$

$$4C_y^{2y-1} = 5 \cdot \frac{y-1}{y+1} C_y^{2y-1}$$

$$\Rightarrow 4(y+1) = 5(y-1) \Rightarrow y=9 \quad \dots(II)$$

$$(II) \text{ en } (I): x=17$$

$$\therefore J = 3(17) + 7(9) = 114$$

29. Determinar el valor de x en el siguiente igualdad:

$$\frac{C_{x+1}^{2x} + C_{x-1}^{2x}}{C_{x+2}^{2x} + C_{x-2}^{2x}} = \frac{19}{16}$$

Resolución:

Por combinaciones complementarias:

$$C_{x+1}^{2x} = C_{x-1}^{2x}; C_{x+2}^{2x} = C_{x-2}^{2x}$$

$$\text{Reemplazando tenemos: } \frac{2C_{x-1}^{2x}}{2C_{x-2}^{2x}} = \frac{19}{16}$$

$$\text{Sabemos que: } C_k^n = \frac{n-k+1}{k} C_{k-1}^n$$

Aplicando en el numerador:

$$\frac{(2x) - (x-1) + 1}{x-1} C_{x-2}^{2x} = \frac{19}{16} \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = \frac{19}{16}$$

$$\therefore x=17$$

30. Se considera una baraja de 20 naipes repartida en cuatro colores, cada color se compone de 5 naipes: as, rey, dama, valet, diez; se denomina mano a todo subconjunto de 5 naipes elegidos de esta baraja. Obtenga $M + N$, si:

M es el número de mano distintas.

N es el número de manos distintas que contienen dos ases.

Resolución:

$$M = N.^\circ \text{ de manos distintas} = C_5^{20}$$

$N.^\circ$ deben contener 2 ases



Son ases
 C_2^4



No son ases
 C_3^{16}

$$\times \quad C_3^{16} = N$$

Por tanto:

$$\frac{M+N}{18864}$$

31. En el desarrollo del binomio $\left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{20}$

¿qué lugar ocupa el término independiente de x ?

Resolución:

$$\text{De: } \left(x^3 - \frac{1}{x}\right)^{20} \text{ con } n=20$$

Sabemos que: $t_{k-1} = C_k^n (x^3)^{n-k} (1/x)^k$

$$\Rightarrow t_{k-1} = C_k^{20} (x^3)^{20-k} (x^{-1})^k \Rightarrow t_{k+1} = C_k^{20} x^{60-4k}$$

Si es término independiente, entonces el exponente de x debe ser cero (0):

$$60 - 4k = 0 \Rightarrow 4k = 60 \Rightarrow k = 15$$

$$\therefore t_{k+1} = t_{16} \Rightarrow \text{lugar } 16$$

32. Hallar el término independiente del desarrollo de:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{10}$$

Resolución:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{10} \Rightarrow n=10$$

$$t_1 = t_{k-1} = C_k^n (x^2)^{n-k} \left(\frac{1}{x^2}\right)^k$$

$$t_1 = t_{k+1} = C_k^n \frac{x^{2n-2k}}{x^{2k}} = C_k^n x^{2n-4k}$$

Si t_{k+1} es independiente

$$\Rightarrow 2n - 4k = 0 \Rightarrow 20 = 4k \Rightarrow k = 5$$

$$\Rightarrow t_1 = C_5^{10} x^{2(10) - 4(5)} = C_5^{10} x^{20-20}$$

$$\therefore t_1 = \left(\frac{10!}{5!5!}\right) = \frac{10!}{5!5!} = 252$$

33. Hallar el octavo término en el desarrollo del binomio $(x^2 + y^{-3})^{10}$.

Resolución:

Sabemos que: $t_{k+1} = C_k^n (x^2)^{n-k} (y^{-3})^k$

$$\text{Si: } k=7; n=10 \Rightarrow t_{7+1} = C_7^{10} (x^2)^{10-7} (y^{-3})^7$$

$$\therefore t_8 = 120x^6y^{-21}$$

34. Los coeficientes de 2^{do} , 3^{er} y 4^{er} términos del desarrollo del binomio $(1+x)^n$ forman una progresión aritmética. La suma de los 10 primeros términos de esa progresión es

Resolución:

Desarrollando el binomio

$$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + C_3^n x^3 + \dots$$

$$\Rightarrow C_1^n; C_2^n; C_3^n \text{ forman una PA}$$

$$\text{Luego: } 2C_2^n = C_1^n + C_3^n; n \geq 3$$

$$\Rightarrow 2 \frac{n(n-1)}{2} = n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\Rightarrow 6(n^2 - n) = 6n + n^3 - 3n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow n^3 - 9n^2 + 14n = 0 \Rightarrow n(n-2)(n-7) = 0 \Rightarrow n = 7$$

Luego, los términos indicados de la PA son:

$$C_1^7 = 7; C_2^7 = 21; C_3^7 = 35$$

$$\Rightarrow a_1 = 7; a_2 = 21; a_3 = 35 \Rightarrow r = 14$$

$$\text{De: } S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r]}{2} \Rightarrow S_{10} = \frac{[2(7) + 9(14)]}{2} \cdot 10$$

$$\therefore S_{10} = 700$$

35. Si el coeficiente del término de grado 14 en el binomio $(x^3 - 3x)^{10}$ es α , resolver: $\alpha x - 3^9 = 0$

Resolución:

$$\text{De: } (x^3 - 3x)^{10}$$

$$t_{k+1} = \binom{10}{k} (x^3)^{10-k} (-3x)^k = \binom{10}{k} (-3)^k x^{30-2k}$$

$$\text{Por dato: } 30 - 2k = 14 \Rightarrow k = 8$$

$$\Rightarrow t_9 = \binom{10}{8} (-3)^8 x^{14} = \alpha x^{14} \Rightarrow \alpha = 45 \times 3^8$$

$$\text{Al resolver: } \alpha x - 3^9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3^9}{\alpha} = \frac{3^9}{45 \times 3^8}$$

$$\therefore x = \frac{1}{15}$$

36. Si en el desarrollo del binomio $\left(\frac{x^a}{y^{b-5}} + \frac{y^b}{x}\right)^b$ tiene solo un término central de la forma $\alpha x^3 y^{15}$, hallar el valor de ab .

Resolución:

El desarrollo del binomio tiene $b+1$ términos, para que tenga término central, entonces b es par.

$$t_{\text{central}} = t_{\frac{b}{2}+1} = C_{\frac{b}{2}}^b \left(\frac{x^a}{y^{b-5}}\right)^{\frac{b}{2}} \left(\frac{y^b}{x}\right)^{\frac{b}{2}}$$

$$t_{\text{central}} = C_{\frac{b}{2}}^b x^{\frac{b}{2}(a-1)} y^{\frac{b}{2} - \frac{b}{2}(b-5)} = \alpha x^3 y^{15}$$

Igualando exponentes:

$$\frac{b^2}{2} - \frac{b}{2}(b-5) = 15 \wedge \frac{b}{2}(a-1) = 3$$

$$b = 6 \wedge 3(a-1) = 3 \Rightarrow a = 2$$

$$\therefore \text{Nos piden: } ab = 6(2) = 12$$

37. Los coeficientes de los términos de lugares 7 y 5 del desarrollo del binomio $(x + y)^{2n}$ son iguales, donde $n \in \mathbb{N}$. Hallar n .

Resolución:

$$\text{De: } (x + y)^{2n}$$

$$\text{Recordar: } t_{k+1} = C_k^{2n} (x)^{2n-k} (y)^k$$

$$\text{De dato: Coef. } t_6 = \text{Coef. } t_7; \text{ Coef. } t_{4+1} = \text{Coef. } t_{6+1}$$

$$\Rightarrow C_4^{2n} = C_6^{2n} \Rightarrow 4 + 6 = 2n \quad \therefore n = 5$$

38. Si $C_{n-5}^{n-2} + C_{n-4}^{n-2} + C_{n-3}^{n-1} = 84$, hallar n .

Resolución:

$$\text{Por propiedad: } C_k^n + C_{k+1}^n = C_{k+1}^{n+1}$$

$$\Rightarrow C_{n-5}^{n-2} + C_{n-4}^{n-2} + C_{n-3}^{n-1} = 84$$

$$\Rightarrow C_{n-4}^{n-2+1} + C_{n-3}^{n-1} = 84 \Rightarrow C_{n-4}^{n-1} + C_{n-3}^{n-1} = 84$$

$$\Rightarrow C_{n-3}^{n-1+1} = 84 \Rightarrow \frac{n!}{3!(n-3)!} = 84 \quad \therefore n = 9$$

39. Determine el valor de x si el tercer y sexto término de $\left(-3x + \frac{2}{3}\right)^7$ suman cero.

Resolución:

$$\text{De: } \left(-3x + \frac{2}{3}\right)^7$$

$$\text{Por dato: } t_3 + t_6 = 0$$

$$\Rightarrow \binom{7}{2} (-3x)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \binom{7}{5} (-3x)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = 0$$

$$\Rightarrow (-3x)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left[(-3x)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] = 0, \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow (-3x)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0 \quad \therefore x = \frac{2}{9}$$

40. En un circo, un payaso tiene a su disposición 5 trajes multicolores diferentes, 6 gorras especiales diferentes y 3 triciclos. ¿De cuántas maneras puede seleccionar su equipo para salir a la función?

Resolución:

En el siguiente gráfico, se representa los elementos que dispone el payaso para su función.

Trajes	Gorras	Triciclos
↓	↓	↓
5	6	3

Como la elección de cada uno es independiente de la elección de los demás, se aplica el principio de la multiplicación:

$$\therefore 5 \times 6 \times 3 = 90$$

41. En un Congreso de estudiantes de ingeniería se está realizando un taller en una sala de exposiciones, donde participan 10 estudiantes, los cuales deben agruparse en 3 grupos: 2 de 3 personas y el último de 4. ¿De cuántas formas se pueden agrupar los 10 estudiantes?

Resolución:

Para formar el primer grupo, se eligen 3 de los 10 posibles, esto es: $C_3^{10} = 120$. En el segundo grupo, se eligen 3 de los 7 restantes, esto es: $C_3^7 = 35$. El último grupo de 4 se forma con los 4 que no han sido elegidos, sólo hay una forma. El total de formas en que se pueden agrupar viene dado:

$$\therefore 120 \times 35 \times 1 = 4200$$

42. En una reunión 10 amigos desean ordenarse para tomarse una foto. Si entre ellos hay una pareja de enamorados que no desea separarse, ¿de cuántas maneras pueden ordenarse?

Resolución:

La pareja de enamorados, A y B, es considerado como un solo elemento, luego con los 8 restantes se tendrá que ordenar 9 elementos; y esto viene dado por $P_9 = 9! = 9!$

A su vez la pareja puede ordenarse como AB o BA, es decir de 2 formas posibles. Por tanto el número total de formas que se pueden ordenar es:

$$9! + 9! = 2 \times 9!$$

43. En una reunión cumbre entre los presidentes de 10 países de América del Sur, el día final de sesiones deciden retratarse para la posteridad. ¿De cuántas maneras pueden disponerse los 10 mandatarios, si los presidentes del Perú y Ecuador por voluntad propia no desean pasar juntos.

Resolución:

La cantidad de formas en que se pueden ubicar los 10 presidentes, sin que el de Perú (P) y Ecuador (E) estén juntos, se calcula restando al total de formas en que se pueden disponer los 10 presidentes ($P_{10} = 10!$), la cantidad de formas en que los presidentes de P y E estén juntos. En este caso, se considera a P y E como un solo elemento, habría 9 y las formas de disponer sería $9!$, pero también se puede tomar el orden E - P, con el cual también habría $9!$ formas. $\therefore$ Luego la cantidad pedida será: $10! - (9! + 9!) = 10 \times 9! - 2 \times 9! = 8 \times 9!$

44. Seis compañeras de la Universidad se encuentran en un evento tecnológico. Determinar, ¿cuántos saludos se intercambian como mínimo, si 2 de ellas están reunidas?

Resolución:

Considerando que cada persona que asiste al evento, saluda a los demás, se calcula la cantidad de formas en que se pueden agrupar de dos en dos, esto es: $C_2^6 = 15$ formas, pero como ya hay 2 reunidas, ellas no se han saludado en el evento.

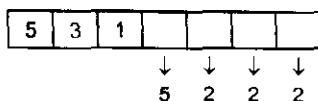
$\therefore$ Como mínimo el número de saludos será:

$$15 - 1 = 14$$

45. La compañía de teléfonos desea averiguar cuántas líneas adicionales puede instalar en la serie 531, si se sabe que hasta el momento no ha usado 2 cifras para las últimas 3 casillas y 5 para la cuarta casilla. Observación: El número telefónico dispone de 7 casillas.

Resolución:

Realizando el gráfico correspondiente a los números telefónicos con 7 caracteres.



Del esquema, la cuarta casilla podrá ser cualquiera de las 5 cifras no utilizadas, y las últimas 3 casillas podrá utilizar las 2 cifras que no se han empleado hasta el momento.

De aquí $5 \times 2 \times 2 \times 2$ nos da la cantidad de números de 4 cifras, existiendo una línea telefónica adicional por cada número de 4 cifras.

$$\therefore \text{n.º de líneas telef. adicionales: } 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 40$$

46. En un programa de concursos en la TV se presenta un juego que consiste en abrir 4 puertas contando con un juego de 7 llaves. ¿Cuántos intentos como máximo dispone un participante para ganar el premio?

Resolución:

Al tratar de abrir la primera puerta, podrá realizar 7 intentos, uno por cada llave que tiene; como se desea el mayor número de intentos posibles entonces la primera puerta se abre con la llave de lugar 7. Para la segunda puerta, tiene 6 llaves posibles (ya no se considera la que abrió la puerta anterior) y podrá realizar 6 intentos como máximo y para este caso abrirá la segunda puerta con la llave de lugar 6, y así sucesivamente.

$\therefore$ El mayor número de intentos será:

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

47. Un turista europeo desea realizar un tour en el Perú. Para tal efecto ha contactado con una agencia de viajes; la cual le ofrece una estadía en 8 ciudades, 5 de la región andina y 3 de la región costera. Pero por el tiempo del que dispone dicho turista solo desea visitar 6 ciudades. ¿De cuántas maneras puede seleccionar dichas ciudades a visitar, si 4 ciudades andinas son punto obligatorio de visita?

Resolución:

El turista puede viajar a 4 o 5 ciudades andinas, luego se tendrá los posibles casos:

- Viaja a 4 ciudades andinas y 2 ciudades costeras.

$$C_4^5 \times C_2^3 = 5 \times 3 = 15$$

- Viaja a 5 ciudades andinas y 1 ciudad costera

$$C_5^5 \times C_1^3 = 1 \times 3 = 3$$

$\therefore$ El total de formas que el turista puede seleccionar las ciudades que va a visitar será: $15 + 3 = 18$

48. En una reunión entre 5 compañeros de colegio que se encuentran después de 10 años de haber egresado, ellos van acompañados de sus respectivas esposas. ¿De cuántas maneras pueden disponerse en una mesa circular si siempre deben estar hombres y mujeres en forma alternada?

Resolución:

Sentando primero a las esposas, alrededor de la mesa circular, se tiene $\frac{5-1}{2} = 2$. Luego,

quedan 5 lugares alternados para que se sienten los varones y esto se realiza de $\underline{5} = 120$.

∴ El total de formas diferentes obtenidas es:
 $24 \times 120 = 2880$

49. Determine una expresión equivalente al simplificar

$$\frac{2^n [(2n)!]^2}{(4n)!(2n-1)!!}$$

Resolución:

- $(2n)!! = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times \dots (2n)$
 De otra forma: $(2n)!! = 2^n(n!)$
- $(2n-1)!! = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \dots (2n-1)$

De otra forma: $(2n-1)!! = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$

- $(4n)!! = 2^{2n}(2n)!$

Reemplazando nos queda:

$$\frac{2^n [(2^n)!]^2}{2^{2n}(2n)! \times \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}} = \frac{2^n(2n!)2^{n-1}(n-1)!}{2^{2n}(2n-1)!}$$

$$\frac{2^n(2n)(2n-1)!2^{n-1}(n-1)!}{2^{2n}(2n-1)!}$$

$$\therefore \frac{2^n(2)2^{n-1}n(n-1)!}{2^{2n}} = \frac{2^{2n}n!}{2^{2n}} = n!$$

50. Cuántos números pares y mayores que 5×10^5 se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si no hay repetición de dígitos?

Resolución:

Dígitos a usar: 1, 2, 3, 4, 5, 6; los números pares mayores que 500 000, que se pueden formar con dichos dígitos, necesariamente tienen que empezar con la cifra 5 o 6.

Es decir, los números son de la forma:

5abcde o 6abcde

Caso (1)

5abcde

Se puede permutar de $4! = 24$ maneras

Por ser par, solo puede tomar 3 valores

$$\Rightarrow \text{Cantidad de n.º: } 1 \times 24 \times 3 = 72$$

Caso (2)

6abcde

Similar al caso (1) Como la 1.ª cifra es par, e puede tomar sólo 2 valores

$$\Rightarrow \text{Cantidad de n.º} = 1 \times 24 \times 2 = 48$$

∴ La cantidad total de n.º pares mayores que 5×10^5 es: $72 + 48 = 120$

51. Salvador ordenará nueve libros en la repisa de su dormitorio. Determine de cuántas maneras los

puede acomodar si la condición es que tres libros específicos jamás deben estar juntos.

Resolución:

El número de formas en que se puede ordenar los libros es: $P_9 = 9!$

El número de formas en que se pueden ordenar los 9 libros de manera que 3 de ellos siempre estén juntos (los 3 hacen como un solo elemento) es:

$P_7 = 7!$, pero entre los 3 se pueden permutar.

$$\Rightarrow \text{n.º total de formas: } 7! \times 3!$$

$$\therefore \text{Lo pedido es: } 9! - 7! \times 3! = 332\,640$$

52. Timoteo se encuentra en el origen de un sistema cartesiano rectangular de ejes OX y OY. Él puede dar solo un paso a la vez, para el norte (N) o para el este (E). Cuántas trayectorias puede recorrer, si da exactamente 4 pasos?

Resolución:

Lo puede realizar de la siguiente manera:

Primer paso 2 formas

Segundo paso 2 formas

Tercer paso 2 formas

Cuarto paso 2 formas

Como: n.º de trayectoria $<>$ n.º de formas

$$\therefore \text{n.º total de trayectorias: } 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

53. Cuántos números de tres dígitos, sin dígitos repetidos, pueden escribirse con los dígitos del conjunto {3; 4; 5; 6; 7; 8}

Resolución:

Dígitos a usar: {3; 4; 5; 6; 7; 8}

Números a formar:

$\overline{abc}$
 $\downarrow \downarrow \downarrow$

n.º de valores que puede tomar $\rightarrow 6\,5\,4$

Cuando "a" toma cualquiera de los 6 valores, entonces, "b" puede tomar cualquiera de los 5 restantes mientras que "c" solo podrá tomar cualquiera de los 4 valores restantes.

$$\therefore \text{Total de n.º de 3 dígitos: } 6 \times 5 \times 4 = 120$$

54. Sobre una mesa se encuentran 10 bolas de las cuales 5 son azules, 3 son blancas y las restantes de color negro. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar dichas bolas en fila?

Resolución:

Este problema corresponde a permutaciones con repetición, nótese que intervienen 10 elementos (5 bolas azules, 3 blancas y 2 negras).

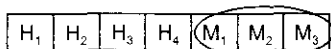
$\Rightarrow$ n.º de maneras diferentes en que se puede colocar dichas bolas en fila es: $\frac{10!}{5!3!2!}$

$$\therefore \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5! \times 6 \times 2} = 2520$$

55. ¿De cuántas formas diferentes se podrían sentar en una fila de 7 asientos, 4 hombres y 3 mujeres, de tal manera que las 3 mujeres siempre estén juntas?

Resolución:

Supongamos la distribución:



Se considera como un solo elemento.

El n.º de maneras en que se pueden sentar, tal que ellas 3 siempre estén juntas, viene dado por:

$$P_5 = 5! = 120$$

Pero entre ellas puede haber intercambio de posiciones y como son 3, entonces, el n.º de maneras de intercambiar asientos entre ellas es: $P_3 = 3! = 6$

∴ Lo pedido viene dado por: $120 \times 6 = 720$

56. Determine el coeficiente del término $x^{28}y^{18}$ en el desarrollo de: $(x^2 + y^3)^{20}$

Resolución:

Supongamos que el término en $x^{28}y^{18}$ ocupa lugar $k + 1$:

$$\text{De: } (x^2 + y^3)^{20}$$

$$\Rightarrow t_{k+1} = C_k^{20} (x^2)^{20-k} (y^3)^k = \frac{C_k^{20}}{\text{Coef.}} x^{40-2k} y^{3k}$$

$$\text{De aquí: } \begin{cases} 40 - 2k = 28 \\ 3k = 18 \end{cases} \Rightarrow k = 6$$

$$\therefore \text{Coef. pedido: } C_6^{20}$$

57. Hallar el término de mayor valor en el desarrollo de $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\right)^{100}$, cuando: $x = 1$

Resolución:

$$\text{Se puede escribir: } \left(\frac{1}{2}\right)^{100} (1+x)^{100}$$

Como todos los términos del desarrollo de $(1+x)^{100}$ estarán multiplicados por $(1/2)^{100}$, bastará calcular el término de mayor valor numérico en $(1+x)^{100}$, teniendo en cuenta lo siguiente: $\frac{t_{k+1}}{t_k} > 1$

$$\text{Luego, de } (1+x)^{100}$$

$$t_{k+1} = C_k^{100} x^k, \quad t_k = C_{k-1}^{100} x^{k-1} \Rightarrow \frac{C_k^{100} x^k}{C_{k-1}^{100} x^{k-1}} > 1$$

$$\text{Degradando: } \frac{100 - k + 1}{k} \times \frac{C_{k-1}^{100} x}{C_{k-1}^{100}} > 1$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow \frac{101 - k}{k} > 1 \Rightarrow k < 50,5$$

Podemos decir que para todo k hasta 50 se cumple que $t_{k+1} > t_k$, por tanto, el término de máximo valor es de lugar 51. Luego, para: $t = 51, x = 1$

$$t_{51} = C_{50}^{100} = \frac{100!}{50! \times 50!}$$

$$\therefore \text{Término de máximo valor} = \frac{100 \times 2^{-100}}{(50)^2}$$

58. Calcular: $C_1^n - 3C_3^n + 9C_5^n - 27C_7^n + \dots; n \in \mathbb{N}$

Resolución:

Teniendo en cuenta la teoría de números complejos. Sabemos que:

$$(1 + \sqrt{3}i)^n = C_0^n + C_1^n(\sqrt{3}i) + C_2^n(\sqrt{3}i)^2 + C_3^n(\sqrt{3}i)^3 + C_4^n(\sqrt{3}i)^4 + C_5^n(\sqrt{3}i)^5 + \dots + C_n^n(\sqrt{3}i)^n$$

$$(1 + \sqrt{3}i)^n = C_0^n + \sqrt{3}i C_1^n - 3C_2^n - 3\sqrt{3}i C_3^n + 9C_4^n + 9\sqrt{3}i C_5^n - 27C_6^n - \sqrt{3}i C_7^n + \dots$$

Agrupando parte real e imaginaria:

$$(1 + \sqrt{3}i)^n = (C_0^n + 3C_2^n + 9C_4^n - 27C_6^n + \dots) + (\sqrt{3}C_1^n - 3\sqrt{3}C_3^n + 9\sqrt{3}C_5^n - 27\sqrt{3}C_7^n + \dots)i \dots (\alpha)$$

Ahora, sea $Z = 1 + \sqrt{3}i$; lo transformemos a forma trigonométrica. Se puede escribir:

$$Z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow Z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

Luego, aplicando la ley de Moivre:

$$Z^n = (1 + \sqrt{3}i)^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}\right)$$

$$Z^n = \left(2^n \cos \frac{n\pi}{3}\right) + \left(2^n \sin \frac{n\pi}{3}\right)i \dots (\beta)$$

De (α) y (β) , igualando partes imaginarias, se tiene:

$$2^n \sin \frac{n\pi}{3} = \sqrt{3}(C_1^n - 3C_3^n + 9C_5^n - 27C_7^n + \dots)$$

De aquí, despejando el paréntesis:

$$\therefore C_1^n - 3C_3^n + 9C_5^n - 27C_7^n + \dots = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}$$

59. Hallar el término independiente de x en el desarrollo de $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{3n}$

Resolución:

Supongamos que el término independiente ocupa el lugar $k + 1$

$$\Rightarrow t_{k+1} = C_k^{3n} x^{3n-k} (-x^{-2})^k$$

$$\text{Reduciendo: } t_{k+1} = C_k^{3n} (-1)^k x^{3n-3k} \dots (\alpha)$$

$$\text{De aquí: } 3n - 3k = 0 \Rightarrow n = k$$

$$\text{En } (\alpha): t_{n+1} = C_n^{3n} (-1)^n \therefore \text{TI de } x: (-1)^n \frac{3n!}{2n! n!}$$

60. Siendo n un número positivo, hallar el valor de

$$T = \frac{1}{4^n} [C_0^{4n} - C_2^{4n} + C_4^{4n} - C_6^{4n} + \dots + C_{4n}^{4n}]$$

Resolución:

Sabemos que:

$$i^2 = -1; i^4 = 1, \text{ además } (1 \pm i)^4 = -4$$

Calculemos los desarrollos siguientes:

$$(1 + i)^{4n} = C_0^{4n} + C_1^{4n}i + C_2^{4n}i^2 + C_3^{4n}i^3 + \dots + C_{4n}^{4n}i^{4n}$$

$$(1 - i)^{4n} = C_0^{4n} - C_1^{4n}i + C_2^{4n}i^2 - C_3^{4n}i^3 + \dots + C_{4n}^{4n}i^{4n}$$

Sumamos miembro a miembro:

$$(1+i)^{4n} + (1-i)^{4n} = 2[C_0^{4n} + C_2^{4n}i^2 + C_4^{4n}i^4 + \dots + C_{4n}^{4n}i^{4n}]$$

$$(1+i)^{4n} + (1-i)^{4n} = 2 \underbrace{[C_0^{4n} - C_2^{4n} + C_4^{4n} - C_6^{4n} + \dots + C_{4n}^{4n}]}_{\text{Llamemos P}}$$

$$(-4)^n + (-4)^n = 2p \Rightarrow 2(-4)^n = 2p$$

$$\text{De aquí: } (-1)^n \times 4^n = p$$

Reemplazando en lo pedido:

$$T = \frac{1}{4^n} [(-1)^n \times 4^n] = (-1)^n \therefore T = (-1)^n$$

61. Hallar el equivalente de:

$$C_1^n x(1-x)^{n-1} + 2C_2^n x^2(1-x)^{n-2} + \dots + nC_n^n x^n$$

Resolución

$$\text{Degradación de índices: } C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$$

Aplicando en el problema:

$$nC_0^{n-1} x(1-x)^{n-1} + nC_1^{n-1} x^2(1-x)^{n-2} + \dots + nC_{n-1}^{n-1} x^n$$

Factorizamos nx y ordenamos:

$$nx[C_0^{n-1}(1-x)^{n-1} + C_1^{n-1}(1-x)^{n-2}x + \dots + C_{n-1}^{n-1}x^{n-1}]$$

Observe que la expresión dentro del corchete es el desarrollo de: $[(1-x) + x]^{n-1}$

$$\Rightarrow nx(1)^{n-1} \therefore nx$$

62. Si los coeficientes binomiales $\binom{4}{x^2-x}$ y $\binom{4}{2x-2}$

equidistan de los extremos en el desarrollo de un binomio elevado a un exponente $n \in \mathbb{N}$. Halle el valor de x .

Resolución:

Si los coeficientes $\binom{4}{x^2-x}$ y $\binom{4}{2x-2}$ equidistan de los extremos en el desarrollo de un binomio. Se

$$\text{cumple que: } (x^2 - x) + (2x - 2) = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \vee x = -3$$

$$\text{Como: } (x^2 - x) \in \mathbb{N} \wedge (2x - 2) \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 2$$

63. En $(2a - a^2)^8$ se cumple que: $\frac{t_6}{t_4} = 1$, además en:

$(2x + (x+7)^{51} + (-7-x)^{51} - 2)^{6n}$ el término independiente es 64. Halle $(a+n)^n$, donde: $a > 0$; $n \in \mathbb{N}$; t_n : término enésimo

Resolución:

$$\text{En } (2a - a^2)^8: \frac{t_6}{t_4} = 1 \Rightarrow t_6 = t_4$$

$$\Rightarrow \binom{8}{5}(2a)^3(-a^2)^5 = \binom{8}{3}(2a)^5(-a^2)^3$$

$$\Rightarrow -8a^{13} = -32a^{11} \forall a > 0 \Rightarrow a = 2$$

$$\text{En: } [2x + (x+7)^{51} + (-7-x)^{51} - 2]^{6n} = [2x - 2]^{6n}$$

$$TI = 64 \Rightarrow (-2)^{6n} = 2^{6n} \Rightarrow 6n = 6 \Rightarrow n = 1$$

$$\therefore (a+n)^n = 3$$

64. En: $\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^8$, halle el término independiente.

Resolución:

$$\text{De: } \left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)^8 \Rightarrow t_{k+1} = C_k^8 (2x^3)^{8-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k$$

$$= C_k^8 2^{8-k} x^{24-4k}$$

$$\Rightarrow TI: 24 - 4k = 0 \Rightarrow k = 6$$

$$\therefore TI = t_7 = C_6^8 2^2 x^0 = 28 \times 4 = 112$$

65. En $\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{56}\right)^{10}$, halle la raíz cuadrada del coeficiente del tercer término.

Resolución:

$$C = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{56}$$

$$C = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}$$

$$\text{En: } \left(x + \frac{7}{8}\right)^{10} \Rightarrow \text{Coef. } t_3 = \binom{10}{2} \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 45 \left(\frac{7}{8}\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{\text{Coef } t_3} = \sqrt{45 \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{21\sqrt{5}}{8}$$

66. Encontrar x , sabiendo que el término central de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8$ es $\left(\frac{8}{4}\right)$, además: $x > 0$

Resolución:

$$\text{En el desarrollo de } \left(x + \frac{1}{x}\right)^8: t_{\text{central}} = \left(\frac{8}{4}\right)$$

$$\text{Pero, como hay 9 términos} \Rightarrow t_{\text{central}} = t_5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^4 = 1 \therefore x = 2$$

67. Un coleccionista de artículos precolombinos ha ido a exponer sus mejores cerámicas Nazca. Dicho coleccionista ha decidido presentar 8 cerámicos de los 10 de su colección. ¿De cuántas maneras puede seleccionarlos, 5/3 de ellos no pueden faltar en la exposición?

Resolución:

Sean los cerámicos A, B y C los que no pueden faltar en la exposición, como se ha decidido presentar 8, entonces quedaría por seleccionar 5 cerámicos de los 7 que quedan; esto viene dado por:

$$\therefore C_5^7 = \frac{7 \times 6}{1 \times 2} = 21$$

68. Un agente vendedor de productos farmacéuticos de primera calidad visita diariamente 5 farmacias en el Centro de Lima. Para no tratar de dar preferencias a uno u otro establecimiento ha decidido alterar el orden de sus visitas. ¿De cuántas maneras puede hacerlo?

Resolución:

La primera farmacia que visite el vendedor, puede ser cualquiera de las 5 indicadas (5 formas de elegir), la segunda solo puede ser elegida de los 4 que han quedado (4 formas a elegir) y así sucesivamente.

$$\therefore P_5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

69. En un simposio organizado por la Municipalidad de Lima participan 4 alcaldes del Cono Norte y 3 alcaldes del Cono Sur, los cuales están ubicados

en una mesa rectangular dando de frente al público asistente. ¿De cuántas maneras pueden disponerse los alcaldes, si los burgomaestres de un mismo Cono no pueden estar separados?

Resolución:

Según el enunciado, los 4 alcaldes del Cono Norte deben sentarse juntos, a la derecha o a la izquierda de los 3 alcaldes del Cono Sur que también están juntos. Habría 2 formas en que pueden ubicarse, pero a su vez, los 4 alcaldes pueden ordenarse de $4! = 24$ formas diferentes y los otros 3 alcaldes se ordenan de $3! = 6$ formas.

∴ El total de formas es: $2 \times 24 \times 6 = 288$

70. Se han matriculados 5 caballeros y 7 señoritas en el curso inicial de Química, en el cual las prácticas se dan en el laboratorio. En dicho laboratorio se deben formar grupos bipersonales, necesariamente formados por un caballero y una señorita. ¿De cuántas maneras pueden seleccionarse dichos grupos si un caballero decide no trabajar con 2 de sus compañeras?

Resolución:

Sea el caballero señalado como A, se presentan los siguientes casos:

- Si A no forma del grupo, se debe elegir un caballero de 4 posibles y una señorita de 7 posibles, esto es: $4 \times 7 = 28$ formas
- Si A forma parte del grupo, falta elegir a la señorita que acompaña a A, pero no elige a 2 de sus compañeras, sólo lo hace de 5 posibles, existiendo 5 formas.

∴ De (a) y (b): $28 + 5 = 33$ es el número total de formas para seleccionar los grupos.

71. Sumar: $5C_0^n + \frac{5^2 C_1^n}{2} + \frac{5^3 C_2^n}{3} + \frac{5^4 C_3^n}{4} + \dots + \frac{5^{n+1} C_n^n}{n+1}$

Resolución:

Multipliquemos y dividamos por $(n+1)$. Además ordenemos convenientemente.

$$\frac{1}{n+1} \left[\frac{n+1}{1} C_0^n \times 5 + \frac{n+1}{2} C_1^n \times 5^2 + \frac{n+1}{3} C_2^n \times 5^3 + \dots + \frac{n+1}{n+1} C_n^n \times 5^{n+1} \right]$$

Aplicando proceso inverso a la degradación de índices se tiene:

$$\frac{1}{n+1} [C_0^{n+1} \times 5 + C_1^{n+1} \times 5^2 + C_2^{n+1} \times 5^3 + \dots + C_n^{n+1} \times 5^{n+1}]$$

Sumamos y restamos: $1 = C_0^{n+1} = C_n^{n+1}$

$$\frac{1}{n+1} [C_0^{n+1} + C_1^{n+1} \times 5 + C_2^{n+1} \times 5^2 + C_3^{n+1} \times 5^3 + \dots + C_n^{n+1} \times 5^{n+1} - C_n^{n+1}]$$

Observe que la expresión en corchete exceptuando el último término, viene a ser el desarrollo de

$(1+5)^{n+1}$; luego nos quedará:

$$\frac{1}{n+1} [(1+5)^{n+1} - C_n^{n+1}] = \frac{6^{n+1} - 1}{n+1}$$

72. Señale el valor del término central en el desarrollo de $(x^{2n} + x^{-2n} + 2)^{2n}$ si se sabe que es equivalente a:

$$\frac{4n}{12-n} \frac{5n-12}{5n-12}$$

Resolución

$$(x^{2n} + x^{-2n} + 2)^{2n} \equiv [(x^n + x^{-n})^2]^{2n} \Rightarrow (x^n + x^{-n})^{4n}$$

Sea t_c es el término central.

$$\text{Lugar de } t_c = \frac{4n}{2} + 1 = 2n + 1$$

$$\text{Luego: } t_c = t_{2n+1} = C_{2n}^{4n} x^0 = \frac{4n}{12-n} \frac{5n-12}{5n-12}$$

$$\text{Por condición: } \frac{4n}{12-n} = \frac{4n}{12-n} \frac{5n-12}{5n-12}$$

$$\Rightarrow 2n = 12 - n \wedge 2n = 5n - 12 \Rightarrow n = 4$$

$$\therefore t_c = C_{2n}^{4n} = C_n^{16}$$

73. Hallar el equivalente de:

$$S = \frac{C_1^n}{3} + \frac{2C_2^n}{3^2} + \frac{3C_3^n}{3^3} + \frac{4C_4^n}{3^4} + \dots + \frac{nC_n^n}{3^n}$$

Resolución:

Degradación de índices: $C_k^n = \frac{n}{k} C_{k-1}^{n-1}$

Aplicando en lo pedido se tendrá:

$$S = \frac{nC_0^{n-1}}{3} + \frac{nC_1^{n-1}}{3^2} + \frac{nC_2^{n-1}}{3^3} + \dots + \frac{nC_{n-1}^{n-1}}{3^n}$$

Extraemos $(n/3)$ y ordenamos así:

$$S = \frac{n}{3} \left[C_0^{n-1} + C_1^{n-1} \left(\frac{1}{3} \right) + C_2^{n-1} \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} \right]$$

La expresión en corchete es el desarrollo de $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore S = \frac{n}{3} \left(\frac{4}{3} \right)^{n-1}$$

74. Hallar $2n$ en: $(C_1^n C_2^n C_3^n \dots C_n^n) (1!2!3! \dots n!)^2 = (40\ 320)^9$

Resolución:

Reduzcamos el primer miembro:

$$\begin{aligned} & (C_1^n C_2^n C_3^n \dots C_n^n) (1!2!3! \dots n!)^2 \\ &= \frac{n!}{(n-1)!1!} \times \frac{n!}{(n-2)!2!} \times \dots \times \frac{n!}{0!n!} \times (1!2!3! \dots n!)^2 \\ &= \frac{(n!)^n}{(n-1)!(n-2)!(n-3)! \dots 1!} \times 1!2!3! \dots (n-1)!n! \\ &\Rightarrow (n!)^n \times n! = (n!)^{n+1} \end{aligned}$$

Luego, tendremos: $(n!)^{n+1} = (40\ 320)^9$

Pero: $40\ 320 = 8! \Rightarrow (n!)^{n+1} = (8!)^9 n = 8$

$$\therefore 2n = 16$$

75. Hallar el término independiente de x en el desarrollo de:

$$\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3x} \right)^9$$

Resolución:

Supongamos que el TI de x ocupa el lugar: $k + 1$

$$\Rightarrow t_{k+1} = C_k^9 \left(\frac{3}{2}x^2\right)^9 \left(-\frac{1}{3x}\right)^k$$

$$\text{De aquí: } t_{k+1} = C_k^9 \left(\frac{3}{2}\right)^9 \left(-\frac{1}{3}\right)^k x^{18-3k} \quad \dots(I)$$

Por ser TI de $x \Rightarrow 18 - 3k = 0 \Rightarrow k = 6$

$$\text{En (I): } t_7 = \text{TI} = C_6^9 \left(\frac{3}{2}\right)^9 \left(-\frac{1}{3}\right)^6$$

$$\Rightarrow \text{TI} = \frac{9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3} \times \frac{3^9}{2^9} \times \frac{1}{3^6} \quad \therefore \text{TI} = \frac{7}{18}$$

76. Sean m, n y p los coeficientes de tres términos consecutivos en la expansión de: $B(x; y) = (x + y)^a$
Hallar: a , si: $m + 2n + p = C_{12}^{30}$

Resolución:

Los coeficientes de los términos en la expresión son los coeficientes binomiales. Si m, n y p son los coeficientes de tres términos consecutivos, entonces supongamos que:

$$m = C_k^a; n = C_{k-1}^a; p = C_{k-2}^a$$

$$\text{Entonces en el dato: } C_k^a + 2C_{k-1}^a + C_{k-2}^a = C_{12}^{30}$$

$$\Rightarrow C_k^a + C_{k-1}^a + C_{k-1}^a + C_{k-2}^a = C_{12}^{30}$$

$$\Rightarrow C_{k-1}^{a+1} + C_{k-2}^{a+1} = C_{12}^{30} \Rightarrow C_{k-2}^{a+2} = C_{12}^{30}$$

$$\text{De donde: } a + 2 = 30 \quad \therefore a = 28$$

77. Con respecto a las proposiciones siguientes, indicar cuáles son verdaderas:

$$\text{I. } 2\overline{n} - (n-1)\overline{n-1} = \overline{n} + \overline{n-1}; n \in \mathbb{Z}^-$$

$$\text{II. } \frac{n}{\overline{n+1}} = \frac{1}{\overline{n}} - \frac{1}{\overline{n+1}}; n \in \mathbb{Z}^-$$

$$\text{III. } \sum_{k=1}^n k\overline{n} = \overline{n+1} - 1$$

Resolución:

$$\text{I. } 2\overline{n} - n\overline{n-1} + \overline{n-1} = 2\overline{n} - \overline{n} + \overline{n-1} = \overline{n} + \overline{n-1} \quad \dots(V)$$

$$\text{II. } \frac{n}{\overline{n+1}} = \frac{n+1-1}{\overline{n+1}} = \frac{n+1}{\overline{n+1}} - \frac{1}{\overline{n+1}} = \frac{1}{\overline{n}} - \frac{1}{\overline{n+1}} \quad \dots(V)$$

$$\text{III. } \sum_{k=1}^n k\overline{k} = \sum_{k=1}^n (\overline{k+1} - \overline{k}) = \overline{2} - \overline{1} + \overline{3} - \overline{2} + \overline{4} - \overline{3} + \dots + \overline{n+1} - \overline{n} = \overline{n+1} - \overline{1} = \overline{n+1} - 1 \quad \dots(V)$$

$\therefore$ Todas son verdaderas.

78. Hallar el equivalente de:

$$T = C_1^n + 3C_3^n + 5C_5^n + 7C_7^n + \dots + nC_n^n$$

Resolución:

De la sumatoria se deduce que n es impar. Aplicando degradación de ambos índices, superior e inferior, en cada número combinatorio, resulta:

$$T = nC_0^{n-1} + nC_2^{n-1} + nC_4^{n-1} + nC_6^{n-1} + \dots + nC_n^{n-1}$$

$$T = n\{C_0^{n-1} + C_2^{n-1} + C_4^{n-1} + C_6^{n-1} + \dots + C_n^{n-1}\}$$

$$\therefore T = n\{2^{n-2}\}$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

**PROBLEMA 1 (UNI 2001 - I)**

En la suma combinatoria

$$S = \binom{n}{2} + \binom{n-1}{2}, \text{ donde } n > 3, n \in \mathbb{N}$$

Al simplificarse se obtiene siempre:

- A) Un número primo B) Un cuadrado perfecto
C) Un número impar D) Un número par
E) Un múltiplo de 4

Resolución:

Del problema:

$$S = \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \frac{1}{2}(n-1)(n+n-2)$$

$$S = (n-1)^2, \text{ es un cuadrado perfecto}$$

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - I)

En un examen un estudiante debe resolver 10 preguntas de las 13 dadas. Si tiene que contestar necesariamente por lo menos 3 de entre las 5 primeras, entonces

el número de maneras en que puede elegir las 10 preguntas es:

- A) 80 B) 220 C) 276
D) 286 E) 316

Resolución:

Del problema:

$$\text{Total} = 13 \begin{cases} 5 \text{ (por lo menos 3)} \\ 8 \text{ (las restantes)} \end{cases}$$

El número de maneras de elegir 10 preguntas será:

$$C_3^5 \times C_7^8 + C_4^5 \times C_6^8 + C_5^5 \times C_5^8 = 276$$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2004 - I)

De 6 números positivos y 5 números negativos se escogen 4 números al azar y se multiplican. Entonces, el número de maneras en que el producto resultará positivo es:

- A) 45 B) 170 C) 330
D) 480 E) 1080

Resolución:

Para que el producto de cuatro números sea positivo, existen tres casos: dos positivos y dos negativos, cuatro positivos y cuatro negativos.

$$1.^{\text{er}} \text{ caso: } C_2^6 \times C_2^5 = 150 \text{ maneras}$$

$$2.^{\text{o}} \text{ caso: } C_4^6 = 15 \text{ maneras}$$

$$3.^{\text{er}} \text{ caso: } C_4^5 = 5 \text{ maneras}$$

$$\text{Total de maneras: } 150 + 15 + 5 = 170$$

Clave: B
PROBLEMA 4 (UNI 2004 - II)

En una exposición en el Museo de Arte de París, se van a colocar en línea 3 cuadros de Picasso, 4 cuadros de Rembrandt y 2 cuadros de Van Gogh. ¿De cuántas maneras puede ser ubicados los cuadros, de modo que los de Rembrandt se encuentren siempre juntos?

- A) 288 B) 1728 C) 2880
D) 17 280 E) 36 288

Resolución:

Tenemos:

$$P_1, P_2, P_3 \Rightarrow 3 \text{ cuadros de Picasso}$$

$$R_1, R_2, R_3, R_4 \Rightarrow 4 \text{ cuadros de Rembrandt}$$

$$V_1, V_2 \Rightarrow 2 \text{ cuadros de Van Gogh}$$

Para que los 4 cuadros de Rembrandt estén juntos, se toma como uno solo. Luego: $P_6 = 6!$

Además los 4 cuadros de Rembrandt pueden permutarse entre ellos: $P_4 = 4!$

$$\text{Finalmente: } n.^{\circ} \text{ de maneras} = 4! \times 6! = 17\,280$$

Clave: D
PROBLEMA 5 (UNI 2005 - I)

Para elaborar un examen de 6 preguntas se dispone de un banco de 5 preguntas fáciles, 4 intermedias y 3 preguntas difíciles. De cuántas formas puede elaborarse dicho examen si el número de preguntas fáciles debe ser estrictamente mayor que las intermedias y el número de estas a su vez mayor o igual que las difíciles.

- A) 30 B) 60 C) 120
D) 180 E) 274

Resolución:

Según el enunciado, disponemos de:

- 5 preguntas fáciles
- 4 preguntas intermedias
- 3 preguntas difíciles

Debemos seleccionar 6 preguntas además se debe cumplir:

N.° Preg. fáciles > N.° Preg. intermedias > N.° Preg. difíciles

- | | | | | |
|-----|---|---|---|---|
| (A) | 5 | 1 | 0 | : $C_5^5 \times C_1^4 \times C_0^3 = 4$ |
| (B) | 4 | 2 | 0 | : $C_4^5 \times C_2^4 \times C_0^3 = 30$ |
| (C) | 4 | 1 | 1 | : $C_4^5 \times C_1^4 \times C_1^3 = 60$ |
| (D) | 3 | 2 | 1 | : $C_3^5 \times C_2^4 \times C_1^3 = 180$ |

Luego, el total de formas para elaborar dicho examen es: $4 + 30 + 60 + 180 = 274$

Clave: E
PROBLEMA 6 (UNI 2012 - I)

El dueño de un concesionario automotriz desea vender todos los autos que le quedan, los cuales son de diferentes modelos, pero en el salón de exhibición entran solo 3 autos, el dueño calcula que existen 210 maneras diferentes de ordenar la exhibición ¿cuántos autos le quedan por vender?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Resolución:

Por condición del problema:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1.^{\circ} & 2.^{\circ} & 3.^{\circ} \\ \hline n & (n-1) & (n-2) \\ \hline \end{array} = 210$$

$$7 \times 6 \times 5$$

$$n = 7 \text{ autos}$$

Clave: D
PROBLEMA 7 (UNI 2013 - II)

Un juego de azar (tipo lotería) consiste en elegir 5 números diferentes de los primeros 30 números naturales. Cada persona que participa en este juego compra 26 jugadas diferentes. Calcule la cantidad mínima de jugadores que se necesita para ganar el juego.

- A) 2349 B) 3915 C) 5481
D) 6264 E) 7047

Resolución:

{1; 2; 3; ...; 30}

E: Cada persona elige 5 números diferentes

Como no interesa el orden, sino el grupo de 5 números distintos; por ejemplo {1; 3; 5; 7; 9} o {2; 4; 10; 20; 25}..., esto se puede hacer de:

$$C_5^{30} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \text{ maneras}$$

Y como cada persona hace 26 jugadas, el número mínimo de personas para asegurar el triunfo es: $\frac{C_5^{30}}{26} = 5481$

Clave: C



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Indicar la suma de los términos máximos del desarrollo de $(a + b)^n$ para: $a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{2}$ y $n = 6$

A) $\frac{40}{27}$ B) $\frac{32}{21}$ C) $\frac{18}{35}$
D) $\frac{50}{19}$ E) N. A.

2. En la expansión de $\left[\sqrt[m]{x^{2(m+n)}} + \sqrt[m]{x^{m-n}} \right]^{36n}$ el término cuyo coeficiente es $2C_{18n-1}^{36n-1}$ contiene a x elevando al exponente $12n$. Hallar el valor de $\left(\frac{m}{n}\right)$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Calcular el valor de k en el desarrollo de: $(1 + \sqrt{3})^{100}$ de manera que el término genérico t_{k+1} , sea al mismo tiempo mayor que los términos anteriores y posteriores en dicho desarrollo.

A) 96 B) 84 C) 72
D) 64 E) 51

4. Hallar el coeficiente máximo del desarrollo de:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x\right)^{10}$$

A) $\frac{40}{9}\left(\frac{2}{7}\right)^7$ B) $\frac{42}{5}\left(\frac{3}{7}\right)^5$ C) $\frac{20}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^7$
D) $\frac{22}{5}\left(\frac{7}{4}\right)^6$ E) N. A.

5. Sumar: $C_0^n + 2C_1^n + 3C_2^n + 4C_3^n + \dots + (n+1)C_n^n$

A) $n2^{n+1}$ B) $(n+2)2^{n-1}$ C) $(n-1)2^n$
D) $(n+1)2^{n-1}$ E) $n2^n$

6. Efectuar: $\frac{C_0^n}{1} + \frac{C_1^n}{2} + \frac{C_2^n}{3} + \frac{C_3^n}{4} + \dots + \frac{C_n^n}{n+1}$

A) $\frac{3^{n-1}-1}{n-1}$ B) $\frac{2^{n-1}+1}{n+1}$ C) $\frac{3^n+1}{n-1}$
D) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ E) $\frac{6^n+1}{n+1}$

7. Sumar: $\frac{2C_0^n}{1} + \frac{2^2C_1^n}{2} + \frac{2^3C_2^n}{3} + \dots + \frac{2^{n+1}C_n^n}{n+1}$

A) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ B) $\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$ C) $\frac{4^n-1}{n+1}$
D) $\frac{5^{n+1}-1}{n-1}$ E) $\frac{6^{n+1}+1}{n-1}$

8. Calcular la suma de: $2C_1^n + 8C_2^n + 24C_3^n + 64C_4^n + \dots$ n sumados

A) $\left(\frac{3n}{2}\right)2^n$ B) $\left(\frac{4n}{3}\right)2^n$ C) $\left(\frac{9n}{2}\right)3^n$
D) $\left(\frac{9n}{4}\right)6^n$ E) $\left(\frac{2n}{3}\right)3^n$

9. Cuántos términos posee el desarrollo de $(x^3 + x^{-n})^n$ Sabiendo que dos de sus términos consecutivos contienen a x^{11} y x , respectivamente.

A) 10 B) 2 C) 8
D) 9 E) N. A.

10. Determinar la suma de los valores de n en $(x^3 - x^{-5})^n$, para los cuales el desarrollo de la expresión anterior admite solamente 8 términos racionales enteros.

A) 40 B) 60 C) 10
D) 30 E) N. A.

11. Señalar el lugar que ocupa el término de máximo valor, al desarrollar $(5 + 3x)^{16}$, cuando: $x = \frac{1}{3}$

A) 7.º B) 4.º C) 9.º
D) 3.º E) 6.º

12. Determinar el coeficiente del término del desarrollo de: $\left(2x^3 - \frac{y^4z^2}{4}\right)^{12}$ en el que los exponentes de x , y , z en ese orden forman una progresión aritmética.

A) 495 B) 201 C) 354
D) 520 E) N. A.

13. Si A , B y C son los coeficientes de tres términos consecutivos del desarrollo de $(a + b)^n$, los cuales cumplen: $A + 2B + C = C_{18}^{40}$. Hallar el número de términos de la expansión del mismo.

A) 39 B) 34 C) 40
D) 44 E) N. A.

14. El coeficiente de x^n en el desarrollo de $(1 - x)^{3n}$ es de la forma: $\frac{(an)!}{(bn)!(cn)!}$. Obtener el valor de $(a + b + c)$, sabiendo que n es par.

A) 8 B) 2 C) 5
D) 10 E) 6

15. Señalar cuántos términos fraccionarios admite la expansión de: $\left(x^6 - 4x^2 + \frac{4}{x^2}\right)^{50}$

- A) 11 B) 2 C) 30
D) 17 E) N. A.
16. En la potencia de $(2 + 3x^2)^n$, el coeficiente de x^{24} es el cuádruplo del coeficiente de x^{22} . Señalar el número de términos de su desarrollo.
A) 20 B) 31 C) 17
D) 44 E) 38
17. Calcular el valor de a en la potencia de: $(\sqrt[3]{x} + y^{2-a})^n$, sabiendo que dos términos consecutivos del desarrollo son de igual grado.
A) 4 B) 0 C) 3
D) 1 E) N. A.
18. Qué valor de n verifica:
 $C_1^n + 2C_2^n + 3C_3^n + \dots + nC_n^n = 11\,264$
A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13
19. Proporcionar el valor de x que verifica:
 $\frac{C_0^x}{1} + \frac{C_1^x}{2} + \frac{C_2^x}{3} + \dots + \frac{C_x^x}{x+1} = \frac{21}{2}$
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5
20. Hallar el valor de α , si en la expansión de $(3 - \alpha\sqrt{x}^n + \alpha\sqrt{y}^{3n-2})$, dos términos cualesquiera presentan igual grado.
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6
21. Al desarrollar $(x^6 - 1)^4(x^4 + x^2 + 1)^{2n}(x^2 - 1)^{2n}$, se obtienen 25 términos. Indicar la suma de los exponentes de su desarrollo.
A) 1080 B) 180 C) 1800
D) 1008 E) 1880
22. Hallar el número de términos que se debe tomar del desarrollo de $(1 - x)^{-2}$ para que la suma de sus coeficientes sea 820.
A) 38 B) 39 C) 40
D) 41 E) 42
23. El valor de x es muy pequeño, de tal modo que su cuadrado y demás potencias superiores pueden despreciarse. Hallar el equivalente de: $\frac{\sqrt[3]{x+8}}{x+1}$
A) $\frac{3 - 17x}{x+1}$ B) $\frac{2 - 23x}{12}$ C) $\frac{24 - 23x}{12}$
D) $\frac{3 - 19x}{12}$ E) N. A.

24. Indicar el coeficiente de x^{23} en la expansión de: $(1 - 2x + 3x^2 - x^4 + x^5)^5$
A) -10 B) 10 C) 1
D) -1 E) N. A.
25. En la expansión de $(1 - 2xy^2 + x^4)^6$, hallar el coeficiente cuya parte literal toma la forma $x^{22}y^4$.
A) 672 B) 512 C) 32
D) 384 E) 482
26. Si el desarrollo de $(1 + x + x^2)^3$ es:
 $a_0 + a_1 + a_2x^2 + \dots + a_mx^m$
determinar el valor que asume: $a_2 + a_5$
A) 5 B) 7 C) 6
D) 8 E) 9
27. Efectuar: $C_n^n + C_{n-1}^{n-1} + C_{n-2}^{n-2} + \dots + C_{n-k}^{n-k}$
A) C_{n-k}^{n-k} B) C_{n-k-1}^{n-k-1} C) C_k^k
D) C_{n-k-1}^{n-k-1} E) C_{k-1}^{k-1}
28. Si $C_0^n, C_1^n, C_2^n, \dots, C_n^n$ son los coeficientes en el desarrollo de $(1 + x)^n$, siendo n un número natural no nulo. Hallar el valor de:
 $C_0^n - 2C_1^n + 3C_2^n - 4C_3^n + \dots + (-1)^n(n+1)C_n^n$
A) -1 B) 0 C) 1
D) -n E) n
29. Efectuar: $S = \sum_{k=1}^{2n} \left(\frac{3}{2}\right)^k \frac{C_{2n-1}^{2n-1}}{k}$
A) $\frac{1}{n} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^n + 1 \right]$ B) $\frac{1}{2n} \left[\left(\frac{25}{4}\right)^n - 1 \right]$ C) $\frac{1}{n} \left[\left(\frac{25}{2}\right)^n - 1 \right]$
D) $\frac{1}{2n} \left[\left(\frac{5}{16}\right)^n + 1 \right]$ E) N. A.
30. Efectuar: $(C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + 3(C_2^n)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$
A) C_{n-1}^{2n-1} B) C_n^{2n} C) C_n^{n+2}
D) C_n^{n-1} E) C_{n+1}^{2n-1}
31. Sumar: $(C_1^n)^2 + 2(C_2^n)^2 + 3(C_3^n)^2 + \dots + n(C_n^n)^2$
A) $\frac{(2n)!}{n!(n-1)!}$ B) $\frac{(2n+1)!}{(n-1)!(n+1)!}$
C) $\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$ D) $\frac{(2n-1)!}{(n-1)!(n+1)!}$
E) $\frac{(2n)!}{n!n!}$
32. Reducir: $C_0^n C_p^m + C_1^n C_{p-1}^m + C_2^n C_{p-2}^m + \dots + C_p^n C_0^m$
A) C_p^{m+n} B) C_{p+1}^{m+n} C) C_{p-1}^{m+n}
D) C_{p-2}^{m+n} E) C_{2p}^{m+n-p}

33. Reducir:

$$C_0^m C_{100}^m + C_1^m C_{99}^{m-1} + C_2^m C_{98}^{m-2} + \dots \quad 101 \text{ términos.}$$

$$\forall m > 100 \wedge m \in \mathbb{Z}^+$$

- A) $2C_{99}^m$ B) $2^m C_{99}^{m+1}$ C) $2^m C_{100}^m$
 D) $2C_{100}^{2m}$ E) $2^m C_{99}^m$

34. Calcular el valor de n , si se sabe que el desarrollo

de $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^n$ contiene solo 15 términos enteros.

- A) 21 B) 22 C) 23
 D) 24 E) 25

35. Hallar la suma de todos los elementos de la distribución triangular con n filas.

		1		
		3	5	
7		9	11	
13	15	17	19	

- A) $\frac{n^2(n+1)}{2}$ B) $\frac{n(n+1)^2(2n+1)}{6}$
 C) $\frac{n^4(n+1)}{2}$ D) $\frac{n^2(n^2+2n+1)}{4}$
 E) $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$

36. Sumar $(C_0^m)^2 + (C_1^m)^2 + \dots + (C_m^m)^2$

- A) m B) $C_{m+2}^{m^2-1}$ C) $\frac{(2m)!}{(m!)^2}$
 D) $\frac{m!}{(m-1)!}$ E) 0

37. Hallar el equivalente de

$$C_2^{n+1} + 2[C_2^n + C_2^{n-1} + \dots + C_2^2]$$

- A) n
 B) $\frac{n(n+1)}{2}$
 C) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 D) $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 E) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1$

38. Determinar para qué valor de n , aparece en el desarrollo de $(\sqrt[4]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[4]{c})^n$ un término de la forma abc

- A) 12 B) 9 C) 16
 D) 8 E) 15

39. La suma de coeficientes del desarrollo:

$[(x^2 + 2xy + y^2)^2]^n$, es 2^{2n} . Hallar el antepenúltimo término.

- A) $271x^3y^{21}$ B) $276x^2y^{22}$ C) $277x^5y^{19}$
 D) $278x^4y^{20}$ E) $280x^6y^{18}$

40. Hallar número de términos del desarrollo: $(x + y + z + w)^3$

- A) 16 B) 20 C) 10
 D) 18 E) 21

41. Si en el desarrollo del binomio $(ax^a + bx^b)^n$, los términos de lugares $(a+3)$ y $(b-1)$ equidistan de los extremos, además la suma de todos los coeficientes es 27, calcular la suma de todos los exponentes de la variable x en su desarrollo.

- A) 20 B) 18 C) 16
 D) 14 E) 15

42. Suponga que se quiere expandir la expresión $(x + y + z)^{17}$, ¿cuál es el coeficiente del término $x^2y^5z^{10}$?

- A) 103,103 B) 240,042 C) 408,408
 D) 671,125 E) 362,362

43. Calcular el coeficiente de x^8 en el desarrollo de: $(1 + x^2 + x^4)^8$

- A) 182 B) 232 C) 266
 D) 320 E) 418

44. Dado el binomio $(x^5 - y^{4n})^8$, en la expansión un término es de la forma $ax^{10}y^{48}$. Hallar el valor de: $a + n$

- A) 27 B) 26 C) 24
 D) 30 E) 20

45. Sea:

$P(x) = (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \dots + (1+x)^{13}$, calcular el coeficiente de x^2 .

- A) 364 B) 365 C) 366
 D) 367 E) 368

46. Indicar verdadero (V) o falso (F) en las proposiciones:

- I. $1! + 2! + 3! = 6!$
 II. $C_4^7 = C_3^7 \Rightarrow x = 4$
 III. $3!! = 720$

- A) FVV B) VFF C) FFV
 D) FVF E) VVF

47. Calcular el valor de n en:

$$\frac{(n+2)! + (n+1)! + n!}{(n+1)! + n!} = 5$$

- A) 3 B) 2 C) 1
 D) 0 E) 4

48. Calcular la suma de los valores de x que verifica la igualdad: $C_3^x = 2x$

- A) 2 B) -3 C) 4
 D) 5 E) 0

49. Efectuar la suma:

$$S = \frac{10! - 9!}{8!} + \frac{9! - 8!}{7!} + \dots + \frac{2! - 1!}{0!}$$

- A) 270 B) 276 C) 285
D) 290 E) 294

50. Calcular el grado absoluto del octavo término en el desarrollo de: $(3x + y^2)^{10}$

- A) 12 B) 17 C) 15
D) 16 E) 13

51. Hallar el término que contiene a x^{75} en el desarrollo de: $\left(x^5 y^3 + \frac{x}{y}\right)^{17}$

- A) $560x^{73}y^{36}$ B) $580x^{73}y^{34}$ C) $610x^{73}y^{32}$
D) $620x^{73}y^{30}$ E) $680x^{73}y^{39}$

52. En el desarrollo del binomio $\left(\sqrt[3]{a^2} - \frac{1}{a}\right)^{15}$, proporcionar el término independiente.

- A) 4004 B) 3003 C) 5005
D) -4004 E) 6006

53. Sea el binomio $\left(\sqrt[3]{xy} + \frac{1}{x}\right)^n$. Si la suma de los coeficientes de los términos primero, segundo y tercero es 46, señalar el número de términos del desarrollo.

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

54. Hallar el término central en la expansión del binomio: $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$

- A) $921x^3$ B) $920x^{-6}$ C) $918x^{-4}$
D) $924x^{-3}$ E) $926x^{-2}$

55. Determinar el número de términos que son fraccionarios en el desarrollo de: $\left(x^6 - 2x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^{50}$

- A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

56. En el desarrollo del binomio $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$, el coeficiente del tercer término es mayor que el coeficiente del segundo término en 44 unidades. Calcular el término que no contiene x .

- A) 150 B) 141 C) 161
D) 165 E) 180

57. Hallar: $S = 3C_1^n - 7C_2^n + 11C_3^n + \dots + (4n - 1)C_n^n$

- A) $2^n n - 2^{n-1} + 1$ B) $2^{n+1}n - 2^n + 1$
C) $2^{n-1} - 2^n n$ D) $2^n n - 2^{n-1}$
E) $2^{n-1} + 2^{n-2} + 1$

58. ¿Qué valor asume n de manera que en el desarrollo de $(x^n + x^{-2})^{17}$, el producto de los términos centrales sea constante?

- A) $1/3$ B) $1/2$ C) 2
D) 4 E) 5

59. Sabiendo que en la expresión:

$$C_0^n a^n; 3C_1^n a^{n-1}; 3^2 C_2^n a^{n-2}; \dots; 3^n C_n^n$$

los términos que ocupan los lugares noveno y décimo tienen coeficientes iguales. Hallar su expresión binómica de origen.

- A) $(a + 3)^{10}$ B) $(a + 3)^{11}$ C) $(a - 3)^{11}$
D) $(a + 3)^{12}$ E) $(a - 3)^{12}$

60. Si se verifica que $\pi^{ix} \leq 3^{\sqrt{5-x} - 0.141592\dots}$, calcular el número de términos del desarrollo de $(a + b + c + d)^x$.

- A) 28 B) 32 C) 56
D) 72 E) 81

61. ¿Cuántos cuadriláteros se pueden formar con 10 rectas?

- A) 210 B) 120 C) 110
D) 96 E) 240

62. Salvador tiene que contestar 8 de diez preguntas en un examen. Si las tres primeras son obligatorias, ¿de cuántas maneras puede escoger las preguntas?

- A) 45 B) 25 C) 21
D) 18 E) 6

63. Determinar el número de planos que se pueden formar con 8 puntos si se tiene que no hay más de tres puntos que sean coplanarios.

- A) 56 B) 72 C) 336
D) 8 E) 24

64. El asta de bandera de un barco tiene tres posiciones en las que pueden colocarse una bandera. Suponiendo que el barco lleva 4 banderas (diferentes) para hacer señales, ¿cuántas señales diferentes pueden hacerse con dos banderas?

- A) 12 B) 24 C) 30
D) 36 E) 72

65. Timoteo tiene que acomodar 6 expedientes uno sobre otro, si hay dos expedientes que no pueden estar en forma consecutiva, ¿de cuántas maneras puede acomodar los expedientes?

- A) 3600 B) 600 C) 540
D) 480 E) 120

66. De un grupo formado por 7 hombres y 4 mujeres hay que escoger 6 personas de forma que entre

- ellas haya no menos de 2 mujeres, ¿de cuántas maneras pueden efectuarse la elección?
- A) 641 B) 115 C) 271
D) 371 E) 420
67. Se quiere seleccionar 5 preguntas de un total de 12, pero 2 de ellas no pueden escogerse a la vez ¿Cuántas formas existen?
- A) 286 B) 60 C) 120
D) 672 E) 720
68. ¿De cuántas formas podemos pedir que nos sirvan un cono de helado con dos bolitas diferentes o iguales, si en la heladería hay 5 sabores: vainilla, lúcum, fresa, chocolate y limón?
- A) 18 B) 15 C) 20 D) 25 E) 75
69. Dos parejas asisten a un almuerzo con otros cuatro amigos solteros. ¿De cuántas maneras se pueden sentar alrededor de una mesa redonda, si los miembros de cada pareja se mantienen vecinos?
- A) 240 B) 120 C) 480
D) 720 E) 2880
70. Hallar el exponente de "a" en el término independiente de x, en el desarrollo de: $\left(x^m + \frac{m\sqrt{a}}{x^n}\right)^{m \cdot n}$
- A) 1 B) 2 C) 4 D) 16 E) 20
71. Hallar el término independiente de x en el desarrollo de: $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$
- A) 7000 B) 7920 C) 4720
D) 8020 E) 5890
72. Hallar el grado absoluto del sexto término en el desarrollo de: $(x + 2y^2)^8$
- A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14
73. Si el único término central del desarrollo de $\left(x + \frac{y}{x}\right)^n$ es de sexto grado, hallar el coeficiente de dicho término central.
- A) 20 B) 15 C) 12
D) 28 E) 22
74. Si el sexto término del desarrollo del binomio $\left(x^n + \frac{n}{x}\right)^n$ es de grado 9, ¿qué lugar ocupa el término de grado 17?
- A) 6.º B) 5.º C) 4.º
D) 8.º E) 9.º
75. En una reunión hay 40 damas y 20 varones. Se desea elegir un presidente, vicepresidente, tesorero y un secretario. La condición es que el tesorero sea una dama y el secretario un varón y nadie puede ocupar más de un cargo. Hallar el número de maneras en que puede elegirse ese grupo directivo.
- A) 2 644 800 B) 2 844 600 C) 2 866 400
D) 3 088 400 E) 3 244 800
76. ¿De cuántas maneras tres argentinos, 4 peruanos, 4 chilenos y 2 bolivianos pueden sentarse, ordenadamente, en una mesa redonda de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?
- A) 3456 B) 6912 C) 20 736
D) 41 472 E) 165 888
77. En un examen, un estudiante debe resolver 10 preguntas de las 13 dadas. Si tiene que contestar necesariamente por lo menos 3 de entre las 5 primeras, hallar el número de maneras en que puede elegir las 10 preguntas.
- A) 80 B) 220 C) 276
D) 285 E) 316
78. ¿Cuántas palabras de seis letras, que contengan dos vocales diferentes y cuatro consonantes distintas, se puede formar con cuatro vocales incluyendo la "e" y seis consonantes incluyendo la "s", de manera que empiecen con "e" y contengan a "s"?
- A) 216 000 B) 3600 C) 7200
E) 9600 D) 10 800

CLAVES

1. A	11. B	21. C	31. D	41. C	51. E	61. A	71. B
2. E	12. A	22. C	32. A	42. C	52. C	62. A	72. D
3. D	13. A	23. C	33. C	43. C	53. C	63. C	73. A
4. A	14. E	24. B	34. D	44. D	54. D	64. D	74. B
5. B	15. E	25. A	35. D	45. A	55. D	65. D	75. A
6. D	16. D	26. E	36. C	46. D	56. D	66. D	76. E
7. B	17. D	27. D	37. C	47. A	57. B	67. D	77. C
8. E	18. C	28. B	38. B	48. D	58. C	68. B	78. B
9. C	19. E	29. B	39. B	49. C	59. B	69. C	
10. B	20. A	30. B	40. B	50. B	60. C	70. A	

Radicación

12

capítulo

Gerolamo Cardano o Girolamo Cardano nació el 24 de septiembre de 1501 y murió el 21 de septiembre de 1576. Fue un médico notable, además de un célebre matemático italiano del Renacimiento, un astrólogo de valía y un estudioso del azar. Este filósofo y destacado enciclopedista, fue autor de una de las primeras autobiografías modernas. En 1520, entró en la Universidad de Pavia y estudió medicina consiguiendo excelentes calificaciones.

En primer lugar, destaca por sus trabajos de Álgebra. En 1539 publicó su libro de aritmética *Practica arithmetica et mensurandi singulares*. Publicó las soluciones a las ecuaciones de tercer y cuarto grado en su *Ars magna*,

datado en 1545. La solución a un caso particular de ecuación cúbica $x^3 + ax = b$ (en notación moderna) le fue comunicada a través de Niccolò Fontana (más conocido como Tartaglia) a quien Cardano había jurado no desvelar el secreto de la resolución; no obstante, Cardano consideró que el juramento había expirado tras obtener información de otras fuentes por lo que polemizó con Tartaglia, a quien además cita. Su libro sobre juegos de azar, *Liber de ludo aleae*, escrito en la década de 1560, pero publicado póstumamente en 1663, constituye el primer tratado serio de probabilidad abordando métodos de cierta efectividad.



Gerolamo Cardano

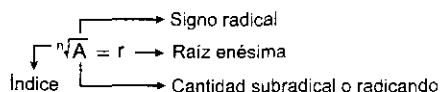
Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Es la operación inversa de la potenciación que se propone hallar una cantidad llamada raíz, tal que elevado a un cierto índice nos reproduzca una cantidad llamada radicando o cantidad subradical.

$$\sqrt[n]{A} = r \Leftrightarrow r^n = A$$

Elementos:



CLASIFICACIÓN

Radicales homogéneos

Se caracterizan por tener el mismo índice.

Ejemplo:

$$\sqrt[5]{3x^2y^3}; \sqrt[5]{7ab^6}$$

Radicales semejantes

Se caracterizan porque además de ser homogéneos tienen la misma cantidad subradical.

Ejemplo:

$$\sqrt[7]{x^2y^4}; \sqrt[7]{y^4x^2}$$

HOMOGENEIZACIÓN DE RADICALES

Para homogeneizar radicales se calcula el MCM de los índices, luego a cada índice se le debe multiplicar por la cantidad necesaria para que sea igual al MCM y para que no se altere a los exponentes del radicando se le debe multiplicar por la misma cantidad.

Ejemplo:

$$C = \frac{\sqrt[5]{y^3x^2} \sqrt[6]{x^4y} \sqrt[10]{x^7y}}{\sqrt[3]{x^2y^5} \sqrt[4]{xy^3}}, \text{ el MCM}(5; 6; 10; 3; 2) = 30$$

$$\text{Luego: } C = \frac{(5 \times 6 \sqrt[3]{y^3x^2 \times 6 \times 4 \times y}) (6 \times 5 \sqrt[4]{x^4y^5 \times 5 \times 3 \times y}) (10 \times 3 \sqrt[2]{x^7y^3 \times 3 \times 10 \times y})}{(3 \times 10 \sqrt[2]{x^2 \times 10 \times y^5 \times 10}) (2 \times 15 \sqrt[3]{x^{15}y^3 \times 15})}$$

$$C = \frac{30 \sqrt[3]{y^{18}x^{12}} \sqrt[30]{x^{20}y^5} \sqrt[30]{x^{21}y^3}}{30 \sqrt[2]{x^{20}y^{50}} \sqrt[30]{x^{15}y^{45}}}$$

$$C = 30 \sqrt[30]{\frac{y^{12}x^{18}x^{20}y^5x^{21}y^3}{x^{20}y^{50}x^{15}y^{45}}} = 30 \sqrt[30]{x^{16}y^{-69}}$$

$$C = 10 \sqrt[6]{x^8y^{-23}} = y^{-2} (10 \sqrt[6]{x^8y^{-3}})$$

VALOR ARITMÉTICO DE UN RADICAL

Es la cantidad real y positiva, tal que elevada al índice del radical nos reproduzca el radicando.

El valor aritmético es único, así: $\sqrt{9} = 3$

VALOR ALGEBRAICO DE UN RADICAL

Es una cantidad de cualquier naturaleza (reales e imaginarios), tal que elevado al índice radical nos reproduzca el radicando.

El valor algebraico de $\sqrt[n]{A}$ tiene n valores y va a ser igual al valor aritmético de $\sqrt[n]{A}$ multiplicado por los n valores de $\sqrt[n]{1}$. Así:

$$\sqrt{25} = \pm 5 \quad \sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2 \\ -1 + \sqrt{-3} \\ -1 - \sqrt{-3} \end{cases}$$

RAÍZ CUADRADA DE POLINOMIOS

Al extraer la raíz cuadrada de un polinomio este debe ser de grado par y debe estar completo y ordenado en forma descendente, de no estar completo se deberá completar con términos que contengan coeficientes iguales a cero.

El procedimiento es el siguiente:

- Se coloca el polinomio debajo del signo radical (ordenado en forma descendente y completo), seguida se agrupan términos de dos en dos comenzando por el término independiente, al realizar esta agrupación siempre sobrará un término.
- A este término sobrante se le extrae su raíz cuadrada y así se obtendrá el primer término de la raíz.
- Con este primer término, primero se forma su duplo, luego se eleva al cuadrado y se pasa con el signo cambiado debajo del primer término del polinomio anulando así dicha columna.
- Inmediatamente después se baja el siguiente grupo de dos, de donde el primer término se divide entre el duplo de la raíz hallada inicialmente, obteniendo así el segundo término de la raíz, inmediatamente se le adiciona el duplo y a toda la expresión se le multiplica por lo mismo pero con el signo cambiado, colocando los resultados debajo del grupo de dos bajado inicialmente.
- En seguida se forma el duplo de la raíz hallada y luego se baja el siguiente grupo de dos, a partir de aquí se sigue el mismo procedimiento enunciado en el paso (4) sucesivamente hasta obtener un resto de grado inferior al de la raíz.

Ejemplos:

- Hallar $\sqrt{P}$, si: $P(x) = 9x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x + 9$

Resolución:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9x^4 - 12x^3 + 22x^2 - 12x + 9} & 3x^2 - 2x + 3 \\ -9x^4 & (6x^2 - 2x)(-2x) \\ \hline -12x^3 + 22x^2 & (6x^2 - 4x + 3)(3) \\ +12x^3 - 4x^2 & \\ \hline 18x^2 - 12x + 9 & \\ -18x^2 + 12x - 9 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{P} = (3x^2 - 2x + 3)$$

2. Hallar $\sqrt{Q}$, si: $Q(x) = 49x^6 + 42x^5 - 61x^4 - 16x^3 - 5$

Resolución:

Extrayendo la raíz cuadrada a los polinomios:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{49x^6 + 42x^5 - 61x^4 - 16x^3 - 5} \quad \begin{array}{l} 7x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \\ (14x^3 + 3x^2)(3x^2) \\ (14x^3 + 6x^2 - 5x)(-5x) \\ (14x^3 + 6x^2 - 10x + 1)(1) \end{array} \\
 -49x^6 \\
 \hline
 0 + 42x^5 - 61x^4 \\
 -42x^5 - 9x^4 \\
 \hline
 0 - 70x^4 - 16x^3 + 0x^2 \\
 + 70x^4 + 30x^3 - 25x^2 \\
 \hline
 0 + 14x^3 - 25x^2 + 0x - 5 \\
 -14x^3 - 6x^2 + 10x - 1 \\
 \hline
 0 - 31x^2 + 10x - 6 \\
 \hline
 r(x)
 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{Q} = 7x^3 + 3x^2 - 5x + 1$$

3. Hallar la raíz cuadrada de:

$$A(x) = x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 13$$

Resolución:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{x^6 + 4x^5 + 10x^4 + 20x^3 + 25x^2 + 13} \quad \begin{array}{l} x^3 + 2x^2 + 3x + 4 \\ (2x^3 + 2x^2)(2x^2) \\ (2x^3 + 4x^2 + 3x)(3x) \\ (2x^3 + 4x^2 + 6x + 4)(4) \end{array} \\
 -x^6 \\
 \hline
 0 + 4x^5 + 10x^4 \\
 -4x^5 - 4x^4 \\
 \hline
 6x^4 + 20x^3 + 25x^2 \\
 -6x^4 - 12x^3 - 9x^2 \\
 \hline
 8x^3 + 16x^2 + 0x + 13 \\
 -8x^3 - 16x^2 - 24x - 16 \\
 \hline
 -24x - 3
 \end{array}$$

$$\therefore \sqrt{A} = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

4. Si el residuo de: $\sqrt{(x+1)^4 + 4(x+1)^3 - 2(x+1)^2 - 11x}$ es equivalente a $(ax + b)$, calcular ab.

Resolución:

Haciendo $x + 1 = a$, se tendrá:

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{a^4 + 4a^3 - 2a^2 - 11a - 1} \\
 -a^4 \\
 \hline
 4a^3 - 2a^2 \\
 -4a^3 - 4a^2 \\
 \hline
 -6a^2 - 11a + 11 \\
 6a^2 + 12a - 9 \\
 \hline
 a + 2
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l} a^2 + 2a - 3 \\ (2a^2 + 2a)(2a) \\ (2a^2 + 4a - 3)(-3) \end{array}$$

$$\Rightarrow r(a) = a + 2$$

$$\Rightarrow r(x) = x + 1 + 2 = x + 3, \text{ pero: } r(x) = ax + b$$

$$\text{Por dato: } ax + b = x + 3 \Rightarrow a = 1 \wedge b = 3$$

$$\therefore ab = 1 \times 3 = 3$$

◀ TRANSFORMACIÓN DE RADICALES DOBLES A SUMA O DIFERENCIA DE RADICALES SIMPLES O SENCILLOS

Primer caso: $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$

$$\text{Asumiendo: } \sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \dots(I)$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad \dots(II)$$

$$\text{Sumando (I) + (II): } \sqrt{A + \sqrt{B}} + \sqrt{A - \sqrt{B}} = 2\sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$$A + \sqrt{B} + A\sqrt{B} + 2\sqrt{A^2 - B} = 4x$$

$$2A + 2\sqrt{A^2 - B} = 4x$$

$$\text{De aquí: } x = \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}; \quad y = \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}$$

$$\text{Sea: } \sqrt{A^2 - B} = C$$

$$\text{Luego: } x = \frac{A + C}{2}; \quad y = \frac{A - C}{2}$$

Reemplazando en (I) y (II):

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

$$\text{Donde: } C = \sqrt{A^2 - B}$$

cuadrado perfecto

Ejemplo:

$$\sqrt{8 + \sqrt{60}}$$

$$C = \sqrt{A^2 - B} = \sqrt{64 - 60} = 2$$

$$\text{Luego: } \sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{\frac{8+2}{2}} + \sqrt{\frac{8-2}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$$

Regla práctica:

$$\sqrt{a + b \pm 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$$

Ejemplos:

$$\bullet \quad \sqrt{7 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$$

$\begin{array}{cc} 4+3 & 4 \times 3 \end{array}$

$$\bullet \quad \sqrt{7 - 2\sqrt{12}} = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$$

$\begin{array}{cc} 4+3 & 4 \times 3 \end{array}$

$$\bullet \quad \sqrt{8 + \sqrt{60}} = \sqrt{8 + 2\sqrt{15}} = \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$\begin{array}{cc} 5+3 & 3 \times 5 \end{array}$

$$\bullet \quad \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{2 - 2\sqrt{\frac{3}{4}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\begin{array}{cc} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \end{array}$

Ejemplos:

1. Obtener un radical doble equivalente a:

$$S = \sqrt{2\sqrt{7} + 4\sqrt{3}} - \sqrt{17 + \sqrt{288}}$$

Resolución:

Escribiendo el segundo radical como raíz cuadrada:

$$\sqrt{2\sqrt{7} + 4\sqrt{3}} - \sqrt{17 + \sqrt{288}}$$

Para aplicar la regla práctica, el radical deberá expresarse como:

$$S = \sqrt{2\sqrt{7} + 2\sqrt{12}} - \sqrt{17 + 2\sqrt{72}} = \sqrt{2(\sqrt{3} + \sqrt{4})} - \sqrt{8 + \sqrt{9}}$$

$\begin{array}{cccc} 3+4 & 3 \times 4 & 8+9 & 8 \times 9 \end{array}$

$$S = \sqrt{2(2 + \sqrt{3})} - \sqrt{2\sqrt{2} + 3}$$

$$S = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = (\sqrt{3} + 1) - (\sqrt{2} + 1) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

$\begin{array}{cccc} 3+1 & 3 \times 1 & 2+1 & 2 \times 1 \end{array}$

Elevando al cuadrado y sacando raíz cuadrada:

$$S = \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{6} + 2)}$$

$$\therefore S = \sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$$

2. Calcular x en:

$$\sqrt{x+44} + 2\sqrt{x-5} + \sqrt{x+59} + 2\sqrt{x-5} = 17$$

Resolución:

Dándole forma a los radicales para aplicar la regla práctica:

$$\underbrace{\sqrt{x+44}}_{\text{Suma}} + 2\underbrace{\sqrt{49(x-5)}}_{\text{Producto}} + \underbrace{\sqrt{x+59}}_{\text{Suma}} + 2\underbrace{\sqrt{64(x-5)}}_{\text{Producto}}$$

$$\sqrt{49} + \sqrt{x-5} + \sqrt{64} + \sqrt{(x-5)} = 17$$

$$7 + 2\sqrt{x-5} + 8 = 17$$

$$2\sqrt{x-5} = 2 \Rightarrow \sqrt{x-5} = 1 \quad \therefore x = 6$$

3. Hallar $(a + b)$ en:

$$\sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{5+2} + \sqrt{5-2}}{\sqrt{5+1} + \sqrt{5-1}} \right] = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Resolución:

Elevando al cuadrado el numerador:

$$N^2 = (\sqrt{5+2} + \sqrt{5-2})^2 = \sqrt{5+2} + \sqrt{5-2} + 2\sqrt{(5+2)(5-2)}$$

$$N^2 = 2\sqrt{5} + 2 = 2(\sqrt{5} + 1) \Rightarrow N = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} + 1}$$

Elevando al cuadrado el denominador:

$$D^2 = (\sqrt{5+1} + \sqrt{5-1})^2 = \sqrt{5+1} + \sqrt{5-1} + 2\sqrt{4}$$

$$D^2 = 2\sqrt{5} + 4 = 2(\sqrt{5} + 2) \Rightarrow D = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} + 2}$$

$$\text{Reemplazando: } \sqrt{2} \left[\frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} + 2}} \right] = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

Multiplicando por el factor racionalizante $(\sqrt{5} - 2)$ en el radicando:

$$\sqrt{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{2} \sqrt{\frac{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{2}(\sqrt{3} - \sqrt{5}) = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{6} - 2\sqrt{5} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow \\ 5+1 & & 5 \times 1 \end{matrix}$$

$$\sqrt{5} - \sqrt{1} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad a = 5 \wedge b = 1$$

$$\therefore a + b = 6$$

4. Transformar en radicales sencillos:

$$Q = \sqrt{x^3 + x^2 + 2 + 2\sqrt{x^5 + x^4 + 1}}$$

Resolución:

$$\text{Sea: } E = x^5 + x^4 + 1$$

Haciendo un artificio se tendrá:

$$E = x^5 + x^4 + 1 + x^2 - x^2$$

Agrupando de la manera indicada.

$$E = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

$$E = x^2(x-1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Efectuando los dos primeros paréntesis y los dos últimos:

$$E = (x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$$

Reemplazando:

$$Q = \underbrace{\sqrt{x^3 + x^2 + 2}}_{\text{Suma}} + 2 \underbrace{\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)}}_{\text{Producto}}$$

$$\therefore Q = \sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^3 - x + 1}$$

Segundo caso: $\sqrt{a + b + c + d} = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$

Donde a, b, c y d serán los datos; x, y, z serán las incógnitas a determinar, esta se hará mediante transformaciones que conduzcan a un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, cuyas soluciones darán (valga la redundancia) los valores de x, y, z .

Ejemplo:

Transformar a radicales simples:

$$\sqrt{12 + \sqrt{84} + \sqrt{24} + \sqrt{56}}$$

Resolución:

$$\text{Sea: } \sqrt{12 + \sqrt{84} + \sqrt{24} + \sqrt{56}}$$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$$12 + \sqrt{84} + \sqrt{24} + \sqrt{56} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$$

$$12 + 2\sqrt{21} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{14} = x + y + z + 2\sqrt{xy} + 2\sqrt{xz} + 2\sqrt{yz}$$

De donde:

$$x + y + z = 12 \quad \dots(I)$$

$$xy = 21 \quad \dots(II)$$

$$xz = 6 \quad \dots(III)$$

$$yz = 14 \quad \dots(IV)$$

Resolviendo (II) (III) y (IV) que verifiquen (I) se tendrá:

$$x = 3; \quad y = 7; \quad z = 2$$

$$\therefore \sqrt{12 + \sqrt{84} + \sqrt{24} + \sqrt{56}} = \sqrt{3} + \sqrt{7} + \sqrt{2}$$

Forma práctica:

$$\sqrt{a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}} = \sqrt{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2} = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{60} + \sqrt{40}} &= \sqrt{10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{15} + 2\sqrt{10}} \\ &\quad \begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3+2+5 & 3 \times 2 & 3 \times 5 & 2 \times 5 \end{matrix} \\ &= \sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sqrt{14 - 2\sqrt{35} - 2\sqrt{14} + 2\sqrt{10}} &= -\sqrt{7} + \sqrt{5} + \sqrt{2} \\ &\quad \begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 7+2+5 & 5 \times 7 & 7 \times 2 & 5 \times 2 \end{matrix} \end{aligned}$$

Tercer caso: $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{B}} = x \pm \sqrt{y}$

Donde: $C = \sqrt[3]{A^2 - B}$ (racional)

Además: $4x^3 - 3Cx - A = 0$; $y = x^2 - C$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} &= x - \sqrt{10} \\ C &= \sqrt[3]{100 - 108} \Rightarrow C = -2 \\ 4x^3 + 6x - 10 &= 0 \Rightarrow x = 1 \\ y &= 1^2 - (-2) \Rightarrow y = 3 \\ \therefore \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} &= 1 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

◀ RACIONALIZACIÓN

Es el proceso que consiste en transformar un denominador (o numerador) irracional, en otro racional a través de un factor denominado factor racionalizante.

Factor racionalizante (F_r)

El factor racionalizante es una expresión irracional, tal que al multiplicar a otra también irracional la convierte en una expresión completamente racional.

Casos que se presentan

Cuando el denominador es un monomio: en estos casos el factor racionalizante estará expresado por otro radical que tenga el mismo índice, pero cuyos exponentes del radicando estarán expresados por la diferencia existente entre el índice original de la raíz y los exponentes que afectan a sus letras.

Ejemplos:

1. Racionalizar: $\frac{A}{\sqrt[7]{a^4b^2}}$

Resolución:

$$\frac{A}{\sqrt[7]{a^4b^2}} = \left(\frac{A}{\sqrt[7]{a^4b^2}} \right) \left(\frac{F_r}{\sqrt[7]{a^3b^5}} \right) = \frac{A(F_r)}{\sqrt[7]{a^7b^7}} = \frac{A(F_r)}{ab}$$

2. Racionalizar: $\frac{A}{\sqrt[8]{x^5y^7y^2}}$

$$\frac{A}{\sqrt[8]{x^5y^7y^2}} = \frac{A}{\sqrt[8]{x^5y^9y^2}} \left(\frac{F_{r1}}{\sqrt[8]{x^3}} \right) \left(\frac{F_{r2}}{\sqrt[8]{x^2y^7}} \right) = \frac{A F_{r1} F_{r2}}{\sqrt[8]{x^8y^9y^9}}$$

∴ La expresión racionalizada es: $\frac{A F_{r1} F_{r2}}{x^2y}$

3. Racionalizar: $\frac{N}{\sqrt[5]{x^{14}y^3}}$

Resolución:

$$\frac{N}{\sqrt[5]{x^{14}y^3}} = \frac{N}{x^2 \sqrt[5]{x^4y^3}} \left(\frac{F_r}{\sqrt[5]{xy^2}} \right) = \frac{N F_r}{x^2 \sqrt[5]{x^5y^5}} = \frac{N F_r}{x^3y}$$

4. Racionalizar: $\frac{3}{\sqrt[5]{54}}$

Resolución:

$$\frac{3}{\sqrt[5]{54}} = \frac{3}{\sqrt[5]{3^3 \times 2}} \left(\frac{\sqrt[5]{3^2 \times 2^4}}{\sqrt[5]{3^2 \times 2^4}} \right) = \frac{3 \sqrt[5]{144}}{3 \times 2} = \frac{\sqrt[5]{144}}{2}$$

5. Racionalizar: $\frac{30}{\sqrt[4]{675}}$

Resolución:

$$\frac{30}{\sqrt[4]{675}} = \frac{30}{\sqrt[4]{5^2 \times 3^3}} \left(\frac{\sqrt[4]{5^2 \times 3}}{\sqrt[4]{5^2 \times 3}} \right) = \frac{30 \sqrt[4]{75}}{5 \times 3} = 2 \sqrt[4]{75}$$

6. Simplificar: $\frac{18}{\sqrt[3]{2}} + \frac{24}{\sqrt[3]{16}}$

Resolución:

Racionalizando cada fracción tendremos:

$$\frac{18}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} + \frac{24}{\sqrt[3]{16}} \times \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{18 \sqrt[3]{4}}{2} + \frac{24 \sqrt[3]{4}}{4} = 15 \sqrt[3]{4}$$

7. Simplificar: $\frac{15}{\sqrt[3]{9}} + \frac{6}{\sqrt[3]{3}}$

Resolución:

De manera similar al anterior:

$$\frac{15 \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9} \sqrt[3]{3}} + \frac{6 \sqrt[3]{9}}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{9}} = 5 \sqrt[3]{3} + 2 \sqrt[3]{9}$$

8. Reducir: $\frac{\sqrt[5]{3x^7y^2z^6}}{\sqrt[5]{8x^2yz^4}}$

Resolución:

En este caso, racionalizamos el denominador y luego simplificamos la fracción:

$$\left(\frac{xz \sqrt[5]{3x^2y^2z}}{\sqrt[5]{2^3x^3yz^4}} \right) \left(\frac{\sqrt[5]{2^2x^2y^6z^2}}{\sqrt[5]{2^2x^2y^6z^2}} \right) = \frac{xz \sqrt[5]{12x^4y^6z^2}}{2xyz} = \frac{\sqrt[5]{12x^4yz^2}}{2}$$

9. Reducir: $\frac{\sqrt[5]{3a^7b^6c^5}}{\sqrt[5]{25a^2bc}}$

Resolución:

De modo similar al anterior:

$$\frac{abc \sqrt[5]{3a^2b}}{\sqrt[5]{2^3(3a^2bc)}} = \frac{abc}{\sqrt[5]{2^3c}} \left(\frac{\sqrt[5]{2^2c^4}}{\sqrt[5]{2^2c^4}} \right) = \frac{abc \sqrt[5]{4c^4}}{2c} = \frac{ab(\sqrt[5]{4c^4})}{2}$$

Cuando el denominador presenta radicales de la forma $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$: para estos casos el factor racionalizante estará expresado por la conjugada del denominador que se empleará tantas veces hasta que el denominador quede transformado en una expresión algebraica racional.

Ejemplos:

1. Racionalizar: $\frac{N}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Resolución:

$$\frac{N}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{N}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) = \frac{N F_r}{a - b}$$

2. Racionalizar: $\frac{A}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$

Resolución:

$$\frac{A}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} = \frac{A}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}} \left(\frac{F_{r1}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} \right) \left(\frac{F_{r2}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} \right) = \frac{A F_{r1} F_{r2}}{a - b}$$

3. Racionalizar: $\frac{N}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$

Resolución:

$$\frac{N}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} = \frac{N}{\sqrt[3]{x^2 + \sqrt[3]{y}}} = \dots = \frac{NF_1F_2}{x^2 - y}$$

4. Racionalizar: $\frac{N}{\sqrt{6} + \sqrt{15} + \sqrt{2} + \sqrt{5}}$

Resolución:

$$\begin{aligned} \frac{N}{\sqrt{6} + \sqrt{15} + \sqrt{2} + \sqrt{5}} &= \frac{N}{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1) + \sqrt{5}(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{N}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{5} + \sqrt{2})} \left(\frac{F_1F_2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{5} - \sqrt{2})} \right) \\ &= \frac{NF_1F_2}{(3 - 1)(5 - 2)} = \frac{NF_1F_2}{6} \end{aligned}$$

5. Racionalizar: $\frac{2}{\sqrt{36 + 12(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})}}$

Resolución:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{36 + 12(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})}} &= \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{6 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{6}[(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{3}]} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \times \frac{F_2}{[(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{3}]} \\ &= \frac{2\sqrt{6}F_2}{6[3 + 2\sqrt{2} - 3]} = \frac{\sqrt{6} \cdot F_2}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}F_2}{12} = \frac{\sqrt{3}F_2}{6} \end{aligned}$$

∴ El denominador racionalizado es 6.

6. Racionalizar: $A = \frac{6}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$

Resolución:

Agrupando en el denominador de modo que la suma de los dos primeros radicandos (2 + 3) den el otro (5):

$$\begin{aligned} A &= \frac{6}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}} \times \frac{F_1}{[(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}]} = \frac{6F_1}{5 + 2\sqrt{6} - 5} = \frac{6F_1}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\ \therefore A &= \frac{\sqrt{6}F_1}{2} \end{aligned}$$

7. Racionalizar: $Q = \frac{3}{\sqrt{10} - \sqrt{6} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Resolución:

Agrupando los dos primeros términos y factorizando $\sqrt{2}$ en el denominador:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{3}{\sqrt{2}(\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3})} \\ Q &= \frac{3}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})(\sqrt{2} + 1)} \left(\frac{F_1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \right) \left(\frac{F_2}{\sqrt{2} - 1} \right) = \frac{3F_1F_2}{2(1)} \\ \therefore Q &= \frac{3F_1F_2}{2} \end{aligned}$$

8. Racionalizar y simplificar cada uno de los casos siguientes:

I. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

IV. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{4} - \sqrt{10}}$

II. $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \frac{200}{\sqrt{125}}$

V. $\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}$

III. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}$

VI. $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

Resolución:

Analizando cada caso propuesto, tendremos que:

I. $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{10} + 4}{3}$

II. $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} + \frac{200}{5\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = (\sqrt{5} + \sqrt{2}) + 8\sqrt{5}$

III. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}} \times \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} + 6 - 6 - 3\sqrt{6}}{12 - 18} = \frac{-\sqrt{6}}{-6} = \frac{\sqrt{6}}{6}$

IV. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - \sqrt{5})} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

V. $\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}} = \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1})^2}{x-1-x-1}$
 $= \frac{x-1+x+1-2\sqrt{x^2-1}}{-2} = \frac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{-2} = \sqrt{x^2-1} - x$

VI. $\sqrt{\frac{(2+\sqrt{3})^2}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} + \sqrt{\frac{(2-\sqrt{3})^2}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}}$
 $= \frac{2+\sqrt{3}}{1} + \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 4$

9. Reducir la expresión:

$$\frac{2}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} + \frac{4}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$$

Resolución:

Efectuando los dos primeros sumandos y racionalizando el tercero:

$$\begin{aligned} &\frac{6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} + 12\sqrt{2} - 8\sqrt{3}}{(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})} - \frac{1}{3(\sqrt{3} + \sqrt{2})} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\ &= \frac{18\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3} = \frac{9\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{10\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{3} - \sqrt{3} \end{aligned}$$

10. Racionalizar: $\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}}$

Resolución:

Observando el denominador podemos determinar la respectiva expresión racionalizante:

$$\frac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}} \left(\frac{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-y^2}+x-y}{x+y-x+y} = \frac{x-y+\sqrt{x^2-y^2}}{2y}$$

11. Racionalizar: $\frac{12}{\sqrt{5}+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Resolución:

Agrupando y ordenando de manera conveniente los radicales del denominador:

$$\frac{12}{\sqrt{5}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})} \times \frac{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{5}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{5-5+2\sqrt{6}} = \frac{12(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2})}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt{6}(\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{30}+\sqrt{18}-\sqrt{12} = \sqrt{30}+3\sqrt{2}-\sqrt{12}$$

12. Simplificar: $\frac{a}{(a+b)^{1/2}+b^{1/2}} - \frac{b}{(a+b)^{1/2}+a^{1/2}}$

Resolución:

Racionalizando cada sumando:

$$\frac{a(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})} - \frac{b(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})}{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})}$$

$$= \frac{a(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})}{a+b-b} - \frac{b(\sqrt{a+b}-\sqrt{a})}{a+b-a}$$

$$= \sqrt{a+b}-\sqrt{b}-\sqrt{a+b}+\sqrt{a} = \sqrt{a}-\sqrt{b}$$

Cuando el denominador presente radicales de índice superior: para estos casos debe tenerse en cuenta las siguientes equivalencias algebraicas:

$$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^5+b^5 = (a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

$$a^5-b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

$$a^7-b^7 = (a-b)(a^6+a^5b+a^4b^2+a^3b^3+a^2b^4+ab^5+b^6)$$

$$a^7+b^7 = (a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)$$

Ejemplos:

1. Racionalizar: $\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}$

Resolución:

$$\frac{A}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \left(\frac{F_r}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \right) = \frac{AF_r}{a+b}$$

2. Racionalizar: $\frac{N}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}}$

Resolución:

$$\frac{N}{\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b}} \left(\frac{F_{r_1}}{\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b}} \right) \left(\frac{F_{r_2}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}} \right) = \frac{NF_{r_1}F_{r_2}}{a-b}$$

3. Racionalizar: $\frac{F}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{y}}$

Resolución:

$$\frac{F}{\sqrt[3]{x}-\sqrt{y}} = \frac{F}{\sqrt[6]{x^2}-\sqrt[6]{y^3}} = \dots = \frac{FF_1F_2}{x^2-y^3}$$

4. Racionalizar:

$$M = \frac{7}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{12}}$$

Resolución:

 Extrayendo factor común: $\sqrt[3]{5}$ y $\sqrt[3]{3}$ en el denominador:

$$\frac{7}{\sqrt[3]{5}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1)-\sqrt[3]{3}(1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})}$$

$$M = \frac{7}{(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1)(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{3})} \left(\frac{F_{r_1}}{\sqrt[3]{2}-1} \right) \left(\frac{F_{r_2}}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}} \right)$$

$$M = \frac{F_{r_1}F_{r_2}}{(2-1)(5-3)} = \frac{7F_{r_1}F_{r_2}}{2}$$

5. Racionalizar: $N = \frac{1}{x\sqrt[3]{x}+y\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2y^2}}$

Resolución:

Introduciendo x e y a los radicales respectivamente:

$$N = \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{y^4}+\sqrt[3]{x^2y^2}}$$

Haciendo: $\sqrt[3]{x} = a \wedge \sqrt[3]{y} = b$

$$\frac{1}{a^4+a^2b^2+b^4} = \frac{1}{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)} \left(\frac{a-b}{a-b} \right) \left(\frac{a+b}{a+b} \right)$$

$$N = \frac{a^2-b^2}{a^6-b^6}$$

Reponiendo x e y: $N = \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}{x^2-y^2}$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Efectuar: $\frac{\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}}$

Resolución:

$$E = \frac{\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}\sqrt[3]{3+\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{\sqrt{2}-1}}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad 3+\sqrt{8} = 3+2\sqrt{2} = (\sqrt{2}+1)^2 \\ & \bullet \quad (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1 \Rightarrow \sqrt{2}-1 = (\sqrt{2}+1)-1 \\ & \Rightarrow E = \frac{\sqrt[4]{(\sqrt{2}+1)^2}\sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}\sqrt[4]{(\sqrt{2}+1)^{-1}}} \\ & \Rightarrow E = (\sqrt{2}+1)^{\frac{2}{4}-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}} \therefore E = \sqrt{2}+1 \end{aligned}$$

2. Dar el denominador después de racionalizar:

$$E = \frac{4}{\sqrt{15} + \sqrt{35} + \sqrt{6} + \sqrt{14}}$$

Resolución:

$$E = \frac{4}{\sqrt{3 \times 5} + \sqrt{7 \times 5} + \sqrt{2 \times 3} + \sqrt{2 \times 7}}$$

Factorizando el denominador:

$$E = \frac{4}{\sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{7}) + \sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{7})}$$

$$E = \frac{4}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{7})} \cdot \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{3})}$$

$$E = \frac{4(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{3 \times 4} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{3})}{3}$$

∴ Denominador luego de racionalizar: 3

3. Sea la expresión:

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{8x^2 + 8x\sqrt{x^2 - 1} - 4}}$$

calcular: $T = E(8) + E(6) + E(4)$ **Resolución:**

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{8x^2 + 8x\sqrt{x^2 - 1} - 4}}$$

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{8x^2 - 4} + 2\sqrt{4x^2[4(x^2 - 1)]}}}$$

$$\bullet 4x^2 + 4(x^2 - 1) = 8x^2 - 4$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{2}{\sqrt{\sqrt{4x^2} + \sqrt{4(x^2 - 1)}}}$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{2}{\sqrt{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}}$$

$$E(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$$

Luego: $T = E(8) + E(6) + E(4)$

$$T = (\sqrt{9} - \sqrt{7}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$\therefore T = 3 - \sqrt{3}$$

4. Si el radical doble:
- $\sqrt{ax + by + \sqrt{xy(ab + c)}}$
- admite una descomposición en radicales simples. Determinar el valor de
- $\frac{ab}{c}$
- .

Resolución:

Acomodando el radical doble:

$$\sqrt{ax + by + \sqrt{xy(ab + c)}}$$

$$= \sqrt{ax + by + 2\sqrt{\frac{xy}{4}(ab + c)}} = \sqrt{ax} + \sqrt{by}$$

$$\Rightarrow (ax)(by) = \frac{xy}{4}(ab + c)$$

$$\Rightarrow 4ab = ab + c \Rightarrow 3ab = c \quad \therefore \frac{ab}{c} = \frac{1}{3}$$

5. Reducir:
- $E = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}}}{\sqrt{6 + \sqrt{35}} - \sqrt{6 - \sqrt{35}}}$

Resolución:

$$E = \frac{(\sqrt{4 + \sqrt{15}} + \sqrt{4 - \sqrt{15}})\sqrt{2}}{(\sqrt{6 + \sqrt{35}} - \sqrt{6 - \sqrt{35}})\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{8 + 2\sqrt{15}} + \sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{\sqrt{12 + 2\sqrt{35}} - \sqrt{12 - 2\sqrt{35}}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{7} + \sqrt{5} - (\sqrt{7} - \sqrt{5})} \quad \therefore E = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1$$

6. Si el polinomio P, definido por:

$P(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + 16x^3 + 8x^2 + 16$, tiene raíz cuadrada exacta, indicar el valor de: $a + b + c$

Resolución:

Extrayendo la raíz cuadrada, pero en orden creciente por ser exacta.

$\sqrt{16 + 8x^2 + 16x^3 + cx^4 + bx^5 + ax^6}$	$\frac{4 + x^2 + 2x^3}{(8 + x^2)(x^2)}$
-16	
$8x^2 + 16x^3 - cx^4 + bx^5 + ax^6$	$(8 + 2x^2 + 2x^3)(2x^3)$
$-8x^2 \quad -x^4$	
$16x^3 + (c-1)x^4 + bx^5 + ax^6$	
$-16x^3 \quad -4x^5 - 4x^6$	

$$(c-1)x^4 + (b-4)x^5 + (a-4)x^6 \equiv 0$$

De donde: $c = 1 \wedge b = 4 \wedge a = 4$

$$\therefore a + b + c = 9$$

7. En la siguiente igualdad, determinar el valor de m.

$$\frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{m}}} = \frac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}}$$

Resolución:

$$\bullet \frac{3}{\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}} = \frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{(\sqrt{5} + \sqrt{2})} = \frac{3(\sqrt{5} + \sqrt{2})}{3} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$$

$$\bullet \frac{4}{\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{8 + 2\sqrt{12}}} = \frac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{4(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

Luego:

$$\frac{1}{\sqrt{11 - 2\sqrt{m}}} = \sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{6} - \sqrt{2} = \sqrt{5} + \sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \sqrt{11 - 2\sqrt{m}} = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{5}} = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{11 - 2\sqrt{m}} = \sqrt{11 - 2\sqrt{30}} \quad \therefore m = 30$$

8. Si el polinomio:

$P(x, y) = qx^2 - 4x^2y + x^2y^2 + mxy^3 + y^8 - 2xy^4$, es un cuadrado perfecto, determinar el valor de $m + q$.

Resolución:

$$P = qx^2 - 4x^2y + x^2y^2 + mx^3 - 2xy^4 + y^6$$

Es un cuadrado perfecto, entonces:

$$P(x, y) = [Q(x, y)]^2$$

Identificando los términos de Q:

$$P(x, y) = [\sqrt{q}x - xy + y^3]^2$$

$$P(x, y) = qx^2 - 2\sqrt{q}x^2y + x^2y^2 + 2\sqrt{q}xy^3 - 2xy^4 + y^6$$

$$\text{De donde: } -2\sqrt{q} = -4 \Rightarrow q = 4$$

$$\text{Luego: } m = 2\sqrt{q} \Rightarrow m = 4$$

$$\therefore m + q = 8$$

9. Simplificar la siguiente suma:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{5} + 2\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7} + 4\sqrt{3}} + \dots (n \text{ sumandos})$$

Resolución:

$$S = \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5} + 2\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7} + 2\sqrt{12}} + \dots (n \text{ sumandos})$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{4} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

Cada fracción es de la forma:

$$\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}$$

$$= \sqrt{k+1} - \sqrt{k}; k = 1; 2; \dots; n$$

$$S = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots$$

$$\dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$\therefore S = \sqrt{n+1} - 1$$

10. Racionalizar: $M = \frac{1}{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{3} + 1}$

Resolución:

El denominador puede escribirse:

$$M = \frac{1}{\sqrt[5]{3^4} + \sqrt[5]{3^3} + \sqrt[5]{3^2} + \sqrt[5]{3} + 1} \left(\frac{\sqrt[5]{3} - 1}{\sqrt[5]{3} - 1} \right)$$

$$\therefore M = \frac{\sqrt[5]{3} - 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt[5]{3} - 1}{2}$$

11. Racionalizar: $E = \frac{1}{\sqrt{x}(y-z) + \sqrt{y}(z-x) + \sqrt{z}(x-y)}$

Resolución:

Factorizando el denominador:

$$E = \frac{1}{\sqrt{x}y - \sqrt{x}z + \sqrt{y}z - \sqrt{y}x + \sqrt{z}x - \sqrt{z}y}$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{xy}(\sqrt{y} - \sqrt{x}) + z(\sqrt{y} - \sqrt{x}) - \sqrt{z}(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}$$

$$E = \frac{1}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{z} - \sqrt{x})}$$

Racionalizando (multiplicando por sus conjugadas)

$$\frac{F_1 F_2 F_3}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{z} - \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{z} + \sqrt{x})}$$

$$\therefore E = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{x} + \sqrt{z})}{(x - y)(y - z)(z - x)}$$

12. Racionalizar y señalar el denominador racionalizado:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x(\sqrt[3]{x^2}) + x(\sqrt[3]{x}) + 1}$$

Resolución:

De la expresión, factorizando el denominador:

$$\frac{x^3 + x^2 + 2x + 1}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^4} + 1} = \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt[3]{x^3} - \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$\frac{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)}{(\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^4} + 1)((x+1) - \sqrt[3]{x})((x+1)^2 + \sqrt[3]{x}(x+1) + \sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x} - 1)}$$

$$\frac{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(F_1)(F_2)}{(x-1)((x+1)^3 - x)} = \frac{(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(F_1)(F_2)}{(x-1)(x^3 + 3x^2 + 2x + 1)}$$

$$\text{Luego: } \frac{F_1 F_2}{x - 1}$$

$\therefore$ El denominador racionalizado es: $x - 1$

13. Transformar: $\sqrt{16} + 2\sqrt{20} + 2\sqrt{28} + 2\sqrt{35}$

Resolución:

Acomodando los radicandos tenemos:

$$\sqrt{16} + 2\sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{4 \times 7} + 2\sqrt{5 \times 7} = \sqrt{4} + \sqrt{5} + \sqrt{7} = 2 + \sqrt{5} + \sqrt{7}$$

14. Transformar: $\sqrt{a} + 3b + 4 + 4\sqrt{a} - 4\sqrt{3b} - 2\sqrt{3ab}$

Resolución:

Trabajando en los radicandos:

$$\sqrt{a} + 3a + 4 + 2\sqrt{4a} - 2\sqrt{4(3b)} - 2\sqrt{a(3b)} = \sqrt{4} + \sqrt{a} - \sqrt{3b}$$

$$= 2 + \sqrt{a} - \sqrt{3b}$$

15. Reducir: $\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{21} - 6\sqrt{10} - \sqrt{6} - 2\sqrt{10}$

Resolución:

Transformando los radicandos:

$$\sqrt{10} + \sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{21} - 2\sqrt{90} - 2\sqrt{10}$$

$$= \sqrt{10} + \sqrt{15} - \sqrt{6} + \sqrt{15} - \sqrt{6} - 2\sqrt{10}$$

$$= \sqrt{10} + 2\sqrt{15} - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10} = \sqrt{5} + \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

16. Reducir: $\sqrt{3x+2} + 2\sqrt{x^2-1} - 2\sqrt{x^2+3x+2} - 2\sqrt{x^2+x-2}$

Resolución:

Factorizando los radicandos:

$$\sqrt{3x+2} + 2\sqrt{(x+1)(x-1)} - 2\sqrt{(x+1)(x+2)} - \sqrt{(x-1)(x+2)}$$

$$= \sqrt{x+1} - \sqrt{x+2} + \sqrt{x-1}$$

17. Simplificar: $\sqrt{21} - 4\sqrt{5} + 8\sqrt{3} - 4\sqrt{15}$

Resolución:

Acomodando los radicandos:

$$\sqrt{21} - 2\sqrt{20} + 2\sqrt{4 \times 12} - 2\sqrt{4 \times 15}$$

$$= \sqrt{21} - 2\sqrt{4 \times 5} + 2\sqrt{4 \times 12} - 2\sqrt{4 \times 15}$$

$$= \sqrt{21} - \sqrt{5} + \sqrt{4} = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} + 2$$

18. Si
- T
- es una expresión irracional definido por

$$T = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{2+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \text{ entonces al racionalizar } T \text{ se obtiene:}$$

Resolución:

$$T = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{2+\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$

Factorizando el denominador y descomponiendo el numerador:

$$T = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}+\sqrt{2})}$$

$$T = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} \right) \therefore T = \sqrt{2}-1$$

19. Simplificar:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)(\sqrt{45}-9)}{(5-2\sqrt{5})(2-\sqrt{10})} + \frac{13+2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}}$$

Resolución:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}-3)}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-2)(2-\sqrt{10})} + \frac{13+2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{3(\sqrt{5}-3)^2}{\sqrt{5}(2-\sqrt{10})} + \frac{13+2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{\frac{6(7-3\sqrt{5})}{\sqrt{5}(2-\sqrt{10})} \left(\frac{13+2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}} \right)}$$

$$\text{Racionalizando: } A = \sqrt{30} + 2$$

20. Hallar el valor más simple de:

$$E = \frac{\sqrt{a(a^2+3b^2)} + (a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a(a^2+3b^2)} - (a^2-b^2)\sqrt{a^2-b^2}} \text{ y } \sqrt[3]{\frac{E+1}{E-1}} = \sqrt{ab}$$

$$\text{siendo: } V = \left(\frac{ab+1}{ab-1} \right) \left(\frac{b}{a} \right)$$

Resolución:

De la expresión transformada:

$$E = \frac{\sqrt{2a^3+6a^2+2(a+b)^3(a-b)^3}}{\sqrt{2a^3+6b^2-2(a+b)^3(a-b)^3}}$$

$$E = \frac{\sqrt{(a+b)^3} + \sqrt{(a-b)^3}}{\sqrt{(a+b)^3} - \sqrt{(a-b)^3}} \Rightarrow \frac{E+1}{E-1} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{E+1}{E-1}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} = \sqrt{ab}$$

$$\text{Del dato: } \frac{a+b}{a-b} = ab$$

$$\text{Por proporciones: } \frac{a}{b} = \frac{ab+1}{ab-1}$$

$$\therefore V = \frac{b(ab+1)}{a(ab-1)} = 1$$

$$21. \text{ Efectuar: } E = \frac{12\sqrt{3}+\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{2}}\sqrt{3+\sqrt{2}}}{\sqrt[6]{3-\sqrt{2}}}$$

si E asume un valor real.**Resolución:**

Elevando a la 12 en ambos miembros:

$$E^{12} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^6(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}$$

$$E^{12} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$$

$$E^{12} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$$

$$E^{12} = (1)(1)^3 \therefore E = 1$$

22. Reducir:

$$P = \sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{2-12+18-\sqrt{128}}}}}$$

Resolución:

Llamemos A a:

$$A = \sqrt{3+\sqrt{2-2\sqrt{3}+16+2-2\sqrt{16}\times 2}}$$

$$A = \sqrt{3+\sqrt{2-2\sqrt{3}+4-\sqrt{2}}}$$

$$A = \sqrt{3+\sqrt{3-1}} = \sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\text{Entonces: } P = \sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}}$$

$$P = \sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{2+2\sqrt{3}+2}}$$

$$P = \sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{4+2\sqrt{3}}} \Rightarrow P = \sqrt{3-\sqrt{3}+\sqrt{3}+1} \therefore P = 2$$

$$23. \text{ Ejecutar: } E = (\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}})(\sqrt{3+\sqrt{7}})$$

Resolución:

$$E = (\sqrt{13-\sqrt{7}}-\sqrt{5-\sqrt{7}})(\sqrt{3+\sqrt{7}})$$

$$E = \sqrt{(13-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})} - \sqrt{(5-\sqrt{7})(3+\sqrt{7})}$$

$$E = \sqrt{32+10\sqrt{7}} - \sqrt{8+2\sqrt{7}}$$

$$E = \sqrt{25+7+2\sqrt{25\times 7}} - \sqrt{4+1+2\sqrt{4\times 1}}$$

$$E = \sqrt{5+\sqrt{7}} - \sqrt{1-\sqrt{7}} \therefore E = 2$$

$$24. \text{ Reducir: } P = \sqrt{6+2\sqrt{10+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}}}$$

Resolución:

Transformando de adentro hacia afuera:

$$\sqrt{8-2\sqrt{7}} = \sqrt{7+1-2\sqrt{7\times 1}} = \sqrt{7}-1$$

Reemplazando en la expresión propuesta:

$$P = \sqrt{6 + 2\sqrt{10 + 2(\sqrt{7} - 1)}}$$

$$P = \sqrt{6 + 2\sqrt{8 + 2\sqrt{7}}}$$

$$P = \sqrt{6 + 2(\sqrt{7} + 1)}$$

$$P = \sqrt{8 + 2\sqrt{7}} \quad \therefore P = \sqrt{7} + 1$$

25. Calcular el VN de un radical simple de:

$$R(x) = \sqrt{x^4 + 2x^3 + 6x - 3 + 4(x^2 + x + 1)\sqrt{x - 1}}$$

para: $x = 5$

Resolución:

$$R(x) = \sqrt{x^4 + 2x^3 + 6x - 3 + 2\sqrt{(4x - 4)(x^2 + x + 1)^2}}$$

$$\bullet (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$$

$$\bullet (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$R(x) = \sqrt{(x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1) + 4x - 4 + 2\sqrt{(4x - 4)(x^2 + x + 1)^2}}$$

$$R(x) = \sqrt{(x^2 + x + 1)^2 + (4x - 4) + 2\sqrt{(4x - 4)(x^2 + x + 1)^2}}$$

$$R(x) = x^2 + x + 1 + \sqrt{4x - 4} \quad \therefore R(5) = \sqrt{16} = 4$$

26. Reducir a su forma más simple.

$$M = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6 + 4\sqrt{2} + 7 - \sqrt{2}}}}}}$$

Resolución:

$$M = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{6 + 4\sqrt{2} + 7 - \sqrt{2}}}}}}$$

$$M = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + \sqrt{2 + \sqrt{2} + 7 - \sqrt{2}}}}}}$$

$$M = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6 + 3}}}}$$

$$\text{Así sucesivamente: } M = \sqrt{6 + 3} \quad \therefore M = 3$$

27. Calcular:

$$E = \sqrt{2 - 1(\sqrt{56 + 40\sqrt{2}} - \sqrt{34 + 26\sqrt{2}} + \sqrt{23 + 37\sqrt{2}})}$$

Resolución:

Multiplicando las raíces se obtiene:

$$E = \sqrt{56\sqrt{2} + 80 - 56 - 40\sqrt{2} - \sqrt{34\sqrt{2} + 52 - 34 - 26\sqrt{2}} + \sqrt{23\sqrt{2} + 74 - 23 - 37\sqrt{2}}}$$

$$E = \sqrt{24 + 2\sqrt{16 \times 8} - \sqrt{18 + 2\sqrt{16 \times 2}} + \sqrt{51 - 2\sqrt{49 \times 2}}}$$

$$E = \sqrt{16 + \sqrt{8} - \sqrt{16} - \sqrt{2} + \sqrt{49} - \sqrt{2}}$$

$$E = 4 + 2\sqrt{2} - 4 - \sqrt{2} + 7 - \sqrt{2} \quad \therefore E = 7$$

28. Calcular:

$$E = \frac{\sqrt{15 - 10\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{13 + 4\sqrt{10}}}{2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + \sqrt{12 + 8\sqrt{2}}}$$

Resolución:

Escribiendo como radicales dobles:

$$E = \frac{\sqrt{15 - 2\sqrt{50}} - \sqrt{11 - 2\sqrt{10}} + \sqrt{13 + 2\sqrt{40}}}{2\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{9 - 2\sqrt{8}} + \sqrt{12 - 2\sqrt{32}}}$$

Transformando a radicales simples:

$$E = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{5} - \sqrt{10} + 1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2\sqrt{2} + 2 + 2\sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{2} + 2}$$

$$\text{Reduciendo: } E = \frac{(2\sqrt{2} + 1)}{3(2\sqrt{2} + 1)} \quad \therefore E = \frac{1}{3}$$

29. Calcular: $E = \frac{\sqrt{26 - 15\sqrt{3}}}{5\sqrt{2} - \sqrt{38 + 5\sqrt{3}}}$

Resolución:

Multiplicando y dividiendo por $\sqrt{2}$:

$$E = \frac{\sqrt{52 - 2\sqrt{27 \times 25}}}{10 - \sqrt{76 + 2\sqrt{75 \times 1}}}$$

Transformando a radicales simples:

$$E = \frac{3\sqrt{3} - 5}{10 - 5\sqrt{3} - 1} = \frac{3\sqrt{3} - 5}{9 - 5\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{(3\sqrt{3} - 5)}{\sqrt{3}(3\sqrt{3} - 5)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) \quad \therefore E = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

30. Reducir: $R = \sqrt[3]{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} \sqrt[3]{\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \sqrt{49 + 20\sqrt{6}}}}$

Resolución:

La expresión puede escribirse:

$$R = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 (\sqrt{3} + \sqrt{2})(5 + 2\sqrt{6})}$$

$$R = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^3 (\sqrt{3} + \sqrt{2})(5 + 2\sqrt{6})}$$

Desdoblando adecuadamente el primer factor del radicando:

$$R = \sqrt[3]{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})(5 + 2\sqrt{6})}$$

$$R = \sqrt[3]{(5 - 2\sqrt{6})(1)(5 + 2\sqrt{6})}$$

$$R = \sqrt[3]{25 - 24} = \sqrt[3]{1} \quad \therefore R = 1$$

31. Si se cumple que: $A^{AA} = \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x} \dots}$

además: $A = (\sqrt[3]{3 \times \sqrt{3}})^{\frac{1}{3}}$; según ello calcule x

Resolución:

Dato: $A^{AA} = \sqrt[3]{x \sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x} \dots}$

Por propiedad: $A = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x} \dots}$

Reemplazando el valor de A

$$\sqrt[3]{3\sqrt{3}}^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x} \sqrt[5]{x} \dots}$$

$$\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[3]{3\sqrt{3}}$$

∴ Por analogía tenemos: $x = 3$

32. Calcule la solución de la ecuación:

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{x}}} = \frac{3}{\sqrt{7-2\sqrt{10}}} + \frac{4}{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}$$

Resolución:

Transformando los radicales dobles a simples:

$$\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

Luego, racionalizando en el segundo miembro:

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{x}}} = \frac{3F_1}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})F_1} + \frac{4F_2}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})F_2}$$

Donde: $F_1 = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ $\wedge$ $F_2 = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{11-2\sqrt{x}}} = \frac{1}{(\sqrt{6}+\sqrt{5})} \left(\frac{F_3}{F_3} \right)$$

$$F_3 = \sqrt{6} - \sqrt{5}$$

$$\sqrt{11-2\sqrt{x}} = \sqrt{6} - \sqrt{5} \Rightarrow 11 - 2\sqrt{x} = (\sqrt{6} - \sqrt{5})^2$$

$$\Rightarrow 11 - 2\sqrt{x} = 11 - 2\sqrt{30} \Rightarrow x = 30$$

33. Halle el valor de x , si: $x = \frac{1\sqrt{2}}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 \dots}}}}$

Resolución:

$$\text{De } x = \frac{1 - \sqrt{2}}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 \dots}}}$$

$$\text{Sea: } E = 2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 \dots}}} = E = 2 - \frac{1}{E}$$

sigue
siendo E

$$E^2 - 2E + 1 = 0 \Rightarrow (E - 1)^2 = 0 \Rightarrow E = 1$$

$$\therefore x = \frac{1 - \sqrt{2}}{E} = 1 - \sqrt{2}$$

34. Sea: $x_1 = \sqrt{1}$; $x_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}$; $x_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$; ...
hallar el valor de: $x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 - x_{n-1}$, $\forall n \geq 2$

Resolución:

Por recurrencia: $x_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$ (n radicales)

$$\text{Luego: } x_n = \sqrt{1 + x_{n-1}} \Rightarrow x_n^2 = 1 + x_{n-1} \dots (\alpha)$$

$$\text{Además: } x_{n+1}^2 = 1 + x_n \Rightarrow x_n = x_{n+1}^2 - 1$$

$$\text{Al cuadrado: } x_n^2 = x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 + 1 \dots (\beta)$$

$$(\alpha) = (\beta): 1 + x_{n-1} = x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 + 1$$

$$\therefore x_{n+1}^4 - 2x_{n+1}^2 - x_{n-1} = 0$$

35. Sea: $E = \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}$

hallar la expresión racionalizada.

Resolución:

Racionalizando se tiene:

$$E = \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} \left(\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}} \right)$$

$$E = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - 5} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}}$$

Racionalizando nuevamente:

$$E = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \right) \therefore E = \frac{\sqrt{12} + \sqrt{18} - \sqrt{30}}{12}$$

36. Sea la expresión matemática:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}; x \neq \{-1; 0; 1\}$$

Determine m ($m \in \mathbb{R}^+$), si se cumple que $f(A) = 2$,

$$\text{cuando: } A = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}}{4}}$$

Resolución:

$$\text{Del dato se tiene que: } \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{m^2}}}{4}}$$

Efectuando, tenemos: $m^2 = 4$

∴ Valor positivo: $m = 2$

37. En la siguiente igualdad, determine el valor de m .

$$\frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}}}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}} = (m+1) + 2\sqrt{3m}$$

Resolución:

$$\frac{\sqrt{8+2\sqrt{12}} + \sqrt{7-2\sqrt{10}}}{\sqrt{11-2\sqrt{30}}} = (m+1) + 2\sqrt{3m}$$

$$\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{2})}{\sqrt{6} - \sqrt{5}} = (m+1) + 2\sqrt{3m}$$

Racionalizando:

$$\frac{(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})}{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})} = (m+1) + 2\sqrt{3m}$$

$$\frac{11 + 2\sqrt{30}}{\underbrace{(\sqrt{6} - \sqrt{5})(\sqrt{6} + \sqrt{5})}} = (m+1) + 2\sqrt{3m} \therefore m = 10$$

38. Si $2x > 5$ y $\sqrt{2+x} - \sqrt{8x} = 3 + \sqrt{2}$, hallar $\left(\frac{x-17}{4}\right)^2$

Resolución:

Dato: $2x > 5 \Rightarrow x > 2,5$

$$\text{También: } \sqrt{2+x} - \sqrt{8x} = 3 + \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2+x} - \sqrt{2^2(2x)} = \sqrt{2+x} - 2\sqrt{2x} = 3 + \sqrt{2}$$

Recordar: $a > b$

$$\sqrt{(a+b)} - 2\sqrt{ab} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{2} = 3 + \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{x} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Elevando al cuadrado:

$$x = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2}$$

$$\therefore \text{Nos piden: } \left(\frac{x-17}{4}\right)^2 = \left(\frac{14 + 12\sqrt{2} - 17}{4}\right)^2 = 18$$

39. Simplificar: $P = \frac{\sqrt{31+8\sqrt{15}} + \sqrt{31-8\sqrt{15}}}{2\sqrt{23+8\sqrt{7}} + 2\sqrt{23-8\sqrt{7}}}$

Resolución:

$$P = \frac{\sqrt{31+2\sqrt{16 \times 15}} + \sqrt{31-2\sqrt{16 \times 15}}}{2\sqrt{23+2\sqrt{16 \times 7}} + 2\sqrt{23-2\sqrt{16 \times 7}}}$$

$$P = \frac{(\sqrt{16} + \sqrt{15}) + (\sqrt{16} - \sqrt{15})}{2(\sqrt{16} + \sqrt{7}) + 2(\sqrt{16} - \sqrt{7})}$$

$$\therefore P = \frac{2\sqrt{16}}{4\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$

40. Simplificar: $P = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}}}$

Resolución:

Como: $\sqrt{(A+B) \pm \sqrt{AB}} = \sqrt{A} \pm \sqrt{B}$

Multiplicamos a la expresión por $\sqrt{2}$ en el numerador y en el denominador:

$$P = \frac{\sqrt{2} \times (\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{3-\sqrt{5}})}{\sqrt{2} (\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{3+\sqrt{5}})}$$

$$P = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}}$$

$$P = \frac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3 \times 1}} + \sqrt{(5+1)-2\sqrt{5 \times 1}}}{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3 \times 1}} + \sqrt{(5+1)+2\sqrt{5 \times 1}}}$$

$$P = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{1})}{\sqrt{3} - \sqrt{1} + \sqrt{5} + \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} = 1$$

$$\therefore P = 1$$

41. Siendo $x > 0$, simplificar:

$$\sqrt{\sqrt{\frac{x^3}{x^2}} + \sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^5}} \cdot \frac{x^2}{x^2}}}$$

Resolución:

Sea:

$$A = \sqrt{\sqrt{\frac{x^3}{x^2}}} = \sqrt{\sqrt{\frac{x^3}{x^2}}} \Rightarrow A = x^{\frac{17}{16}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\frac{x^3}{x^2}}} = \sqrt{x^3 \cdot x^{-2} \cdot \sqrt{x^{-3}}}$$

Del mismo modo, sea:

$$B = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{x^5}} \cdot \frac{x^2}{x^2}}$$

$$B = \sqrt{x^{-2} \cdot \sqrt{x^{-2}} \cdot \sqrt{x^{-5}}} \Rightarrow B = x^{-\frac{33}{16}}$$

Luego: $\frac{A}{B^{-1}} \Rightarrow A \times B = x^{\frac{17}{16}} \times x^{\frac{33}{16}} = x^{-1}$

42. Simplificar: $T = \frac{2}{\sqrt{4-\sqrt{12}} + \sqrt{6} + \sqrt{20}}$

Resolución:

Recordar: $\sqrt{(A+B) \pm 2\sqrt{AB}} = \sqrt{A} \pm \sqrt{B}$

Dando la forma a los radicales dobles:

$$T = \frac{2}{\sqrt{4-2\sqrt{3}} + \sqrt{6} + \sqrt{20}}$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{(3+1)-2\sqrt{3 \times 1}} + \sqrt{(5+1)+2\sqrt{5 \times 1}}}$$

$$T = \frac{2}{(\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} + \sqrt{1})} \Rightarrow T = \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \right)$$

$$\therefore T = \frac{2(\sqrt{5} - \sqrt{3})}{\sqrt{5}^2 - \sqrt{3}^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

43. Si: $x > 3 \wedge \sqrt{2+x} - \sqrt{8x} = \frac{10}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$,

hallar el valor de: $\frac{x}{3} - 1$

Resolución:

Si: $x > 3$

Como: $\sqrt{(A+B) + 2\sqrt{AB}} = \sqrt{A} + \sqrt{B}; A > B$

Además: $\sqrt{2+x} - \sqrt{8x} = \frac{10}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Racionalizando:

$$\sqrt{(2+x) - 2\sqrt{2x}} = \frac{10}{2\sqrt{3} + \sqrt{2}} \left(\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3} - \sqrt{2}} \right)$$

Por propiedad: $\sqrt{x} - \sqrt{2} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$

$$\sqrt{x} = 2\sqrt{3} \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 4 \times 3 \Rightarrow x = 12$$

$$\therefore \text{Nos piden: } x/3 - 1 \Rightarrow 12/3 - 1 = 3$$

44. Si se cumple que: $\sqrt[9]{\frac{x^2}{y^2}} + \sqrt[9]{\frac{x}{z}} + \sqrt[9]{\frac{y^2}{z^2}} = 0; xyz \neq 0$

calcular: $\left(\frac{xy}{y^2}\right)^9 - \left(\frac{y^2}{xz}\right)^9$

Resolución:

Del dato: $\sqrt[9]{\frac{x^2}{y^2}} + \sqrt[9]{\frac{x}{z}} + \sqrt[9]{\frac{y^2}{z^2}} = 0$

Multiplicando por: $\left(\sqrt[9]{\frac{x}{y}} - \sqrt[9]{\frac{y}{z}}\right)$

$$\left(\sqrt[9]{\frac{x}{y}} - \sqrt[9]{\frac{y}{z}}\right) \left(\sqrt[9]{\frac{x^2}{y^2}} + \sqrt[9]{\frac{x}{z}} + \sqrt[9]{\frac{y^2}{z^2}}\right) = 0$$

Se forma una diferencia de cubos:

$$\sqrt[9]{\frac{x^3}{y^3}} - \sqrt[9]{\frac{y^3}{z^3}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt[9]{\frac{x}{y}} = \sqrt[9]{\frac{y}{z}} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = xz = y^2$$

$$\therefore \text{Nos piden: } \left(\frac{y^2}{y^2}\right)^9 - \left(\frac{y^2}{y^2}\right)^9 = 1 - 1 = 0$$

45. Siendo $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, indique el exponente final de x , al reducir:

$$\left| \sqrt[n]{\frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{\ddots}}}}}} \right| \div \left| \sqrt[n]{\frac{x^2}{\sqrt[n]{\frac{x^2}{\sqrt[n]{\frac{x^2}{\ddots}}}}}} \right|, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

Resolución:

$$\text{Sea: } A = \sqrt[n]{\frac{x^{n-1}}{\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{\sqrt[n]{\frac{x^{n+1}}{\ddots}}}}}} \quad A$$

$$\Rightarrow A = \sqrt[n]{\frac{x^{n-1}}{A}} \Rightarrow A^{n+1} = x^{n-1} \Rightarrow A = x$$

$$\text{También: } B = \sqrt[n]{\frac{x^2}{\sqrt[n]{\frac{x^2}{\sqrt[n]{\frac{x^2}{\ddots}}}}}} \quad B$$

$$\Rightarrow B = \sqrt[n]{\frac{B}{x^2}} \Rightarrow B^2 = \frac{B}{x^2} \Rightarrow B = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Luego: } \frac{A}{B} = \frac{x}{\frac{1}{x^2}} = x^3$$

$\therefore$ El exponente final es 3.

46. Si: $m = \sqrt[3]{2000 + \sqrt{13}}$ $\wedge$ $n = \sqrt[3]{1997 + \sqrt{13}}$
hallar: $m^9 - 9m^3n^3 - n^9$

Resolución:

$$\left. \begin{aligned} m^3 &= 2000 + \sqrt{13} \\ n^3 &= 1997 + \sqrt{13} \end{aligned} \right\} m^3 - n^3 = 3$$

$$\text{Elevando al cubo: } m^9 - n^9 - 3m^3n^3(m^3 - n^3) = 27$$

$$\Rightarrow m^9 - n^9 - 3m^3n^3(3) = 27$$

$$\therefore m^9 - 9m^3n^3 - n^9 = 27$$

47. Averiguar el denominador racional de la expresión:

$$\frac{9^{8^7}}{\sqrt[9]{9^8} - \sqrt[9]{9^7} + \dots + 1}$$

Resolución:

Llamemos N al numerador:

El F, del denominador es: $\sqrt[9]{9} + 1$

$$\Rightarrow \frac{N}{\sqrt[9]{9^8} - \sqrt[9]{9^7} + \dots + 1} \left(\frac{\sqrt[9]{9} + 1}{\sqrt[9]{9} + 1} \right)$$

$$= \frac{N(\sqrt[9]{9} + 1)}{9 + 1} = \frac{N(\sqrt[9]{9} + 1)}{10}$$

$\therefore$ Denominador racional: 10

48. Hallar el denominador racional de la expresión:

$$\frac{N}{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} + \sqrt[6]{32}}$$

Resolución:

$$\text{Sea } \sqrt[6]{2} = a \quad \begin{cases} \sqrt[3]{2} = a^2 \\ \sqrt{2} = a^3 \end{cases}$$

Reemplazando en el denominador:

$$D = \frac{1 + a + a^2 + a^3}{(1 + a) + a^2 + (1 + a)} \\ \Rightarrow D = (1 + a)(1 + a^2)$$

Reponiendo "a" y racionalizando: $\frac{N}{(\sqrt[6]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} + 1)}$

F_{r_1} de $(\sqrt[6]{2} + 1)$ es la expresión:
 $(\sqrt[6]{2} - 1)(\sqrt[3]{2}^2 + \sqrt[3]{2} + 1)$

F_{r_2} de $(\sqrt[3]{2} + 1)$ es $\sqrt[3]{2}^2 - \sqrt[3]{2} + 1$

$$\text{Luego: } \frac{N}{(\sqrt[6]{2} + 1)(\sqrt[3]{2} + 1)} \left(\frac{F_{r_1} F_{r_2}}{F_{r_1} F_{r_2}} \right)$$

$$= \frac{NF_{r_1}F_{r_2}}{(2-1)(2+1)} = \frac{NF_{r_1}F_{r_2}}{3}$$

$\therefore$ Denominador racional: 3

49. Siendo: $x^2 = x + 1$; $x > 0$

$$\text{simplificar: } P(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

Resolución:

$$\text{Dato: } x^2 = x + 1 \Rightarrow x = x^2 - 1$$

$$\text{Reemplazando en: } P(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

$$P(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{\frac{x-1}{2}} \quad \dots (1)$$

Por fórmula de transformación:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{x+c}{2}} + \sqrt{\frac{x-c}{2}}$$

$$\text{Donde: } c = \sqrt{x^2 - (x^2 - 1)} \Rightarrow c = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x-1}{2}}$$

En (1):

$$P(x) = \left(\sqrt{\frac{x+1}{2}} + \sqrt{\frac{x+1}{2}} \right) - \sqrt{\frac{x-1}{2}} = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

Reemplazando nuevamente el dato:

$$P(x) = \sqrt{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow P(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

50. Al racionalizar el denominador de:

$$M = \frac{323}{21 - 2\sqrt[3]{121} + \sqrt[3]{11}}$$

se obtiene una expresión equivalente cuyo denominador es:

Resolución:

$$\text{Sea: } \sqrt[3]{11} = a \quad \begin{cases} \sqrt[3]{121} = a^2 \\ 21 = 2a^3 - 1 \end{cases}$$

El denominador quedará:

$$D = \frac{2a^3 - 1}{21 - 2a^3 + a} = \frac{2a^3(a-1) + (a-1)}{21 - 2a^3 + a} \\ \Rightarrow D = (a-1)(2a^2 + 1)$$

Reponiendo en M:

$$M = \frac{323}{(\sqrt[3]{11} - 1)(2\sqrt[3]{121} + 1)} = \frac{323}{(\sqrt[3]{11} - 1)(\sqrt[3]{968} + 1)}$$

F_1 de $(\sqrt[3]{11} - 1)$ es $\sqrt[3]{11^2} + \sqrt[3]{11} + 1$

F_2 de $(\sqrt[3]{968} + 1)$ es $\sqrt[3]{968^2} - \sqrt[3]{968} + 1$

$$M = \frac{323}{(\sqrt[3]{11} - 1)(\sqrt[3]{968} + 1)} \left(\frac{F_1 F_2}{F_1 F_2} \right)$$

$$M = \frac{323(F_1 F_2)}{(11 - 1)(968 + 1)} = \frac{323(F_1 F_2)}{10 \times 969} = \frac{F_1 F_2}{30}$$

∴ Denominador racional es 30.

51. Proporcionar el denominador racional de la expresión:

$$P = \frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{14} + \sqrt{15} + \sqrt{21}}$$

Resolución:

Agrupemos en el denominador así:

$$= (\sqrt{10} + \sqrt{15}) + (\sqrt{14} + \sqrt{21})$$

$$= \sqrt{5}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{7}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$= (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{5} + \sqrt{7})$$

Reemplazamos y racionalizamos:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} \left[\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{7} + \sqrt{5})} \right] \\ &= \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{1 \times 2} = \frac{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{5})}{2} \end{aligned}$$

∴ Denominador racional: 2.

52. Halla el equivalente de: $\sqrt{\frac{6 + \sqrt{12}}{3 - \sqrt{3}}}$

Resolución:

$$\text{Transformando: } E = \sqrt{\frac{6 + \sqrt{12}}{3 - \sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}}$$

Racionalizando el denominador:

$$E = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} - 1(\sqrt{3} + 1)}} = \sqrt{\frac{2(\sqrt{3} + 1)^2}{(3 - 1)}}$$

$$\therefore E = \sqrt{3} + 1$$

53. Determine el valor del término racional que se obtenga al efectuar $\frac{16\sqrt{4} - 8\sqrt{2}}{\sqrt{4} - \sqrt{2}}$

Resolución:

$$\frac{16(\sqrt[3]{4}) - 8(\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}} = \frac{2^4(\sqrt[3]{2^2}) - 2^3(\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2^{12}} \times 2^2 - \sqrt[3]{2^6} \times 2}{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^{14}} - \sqrt[3]{2^7}}{\sqrt[3]{2^2} - \sqrt[3]{2}}$$

Por cociente notable de 7 términos:

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{2^{12}} + \sqrt[3]{2^{10}}(\sqrt[3]{2}) + \sqrt[3]{2^8}(\sqrt[3]{2^2}) + \sqrt[3]{2^6}(\sqrt[3]{2^3}) + \sqrt[3]{2^4}(\sqrt[3]{2^4}) \\ & \quad + \sqrt[3]{2^2}(\sqrt[3]{2^5}) + \sqrt[3]{2^6} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{Término racional: } \sqrt[3]{2^{12}} + \sqrt[3]{2^6} = 2^4 + 2^3 = 24$$

54. Determine el equivalente de la expresión:

$$E = \sqrt{1 + x + \sqrt{2x + 1}} + \sqrt{1 + x - \sqrt{2x + 1}}$$

para: $-0.5 < x < 0$

Resolución:

$$E = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} (\sqrt{1 + x + \sqrt{2x + 1}} + \sqrt{1 + x - \sqrt{2x + 1}})$$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\underbrace{\sqrt{(2 + 2x) + 2\sqrt{(2x + 1)}}}_M + \underbrace{\sqrt{(2 + 2x) - 2\sqrt{(2x + 1)}}}_N \right]$$

Transformemos por partes:

$$\bullet M = \sqrt{(2 + 2x) + 2\sqrt{(2x + 1)(1)}}$$

$$\text{De aquí: } A = \sqrt{2x + 1} + \sqrt{1}$$

$$\bullet N = \sqrt{(2 + 2x) - 2\sqrt{(2x + 1)(1)}}$$

$$\sqrt{(2x + 1) - 1} \text{ o } \sqrt{(1 - \sqrt{2x + 1})^2}$$

$$\text{Dato: } \frac{1}{2} < x < 0 \Rightarrow -1 < 2x < 0$$

$$\Rightarrow 0 < 2x + 1 < 1 \Rightarrow 0 < \sqrt{2x + 1} < \sqrt{1}$$

$$\text{Luego: } \frac{1 - \sqrt{2x + 1}}{\text{positivo}} > 0$$

Consideramos (II), luego: $B = \sqrt{1} - \sqrt{2x + 1}$

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\sqrt{2x + 1} + 1) + (1 - \sqrt{2x + 1})] = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \text{Racionalizando: } E = \sqrt{2}$$

55. Determinar el valor de:

$$m^2 + m^2n^2 + n^2 - 2m^2n + 2mn^2 - 2mn$$

$$\text{si: } m = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{29} + \sqrt{13}}{\sqrt{11} - \sqrt{29} + \sqrt{13}} \wedge n = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{11} + \sqrt{13}}$$

Resolución:

$$\text{Piden: } \frac{m^2 + m^2n^2 + n^2 - 2m^2n + 2mn^2 - 2mn}{\dots}$$

$$= (m - n)^2 - 2mn(m - n) + m^2n^2$$

$$= [(m - n) - mn]^2 = ?$$

$$\text{Dato: } \frac{m}{1} = \frac{\sqrt{11} + \sqrt{29} + \sqrt{13}}{\sqrt{11} - \sqrt{29} + \sqrt{13}}$$

$$\frac{m + 1}{m - 1} = \frac{2(\sqrt{11} + \sqrt{13})}{2\sqrt{29}} \dots (1)$$

$$\text{Pero: } n = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{11} + \sqrt{13}} \dots (2)$$

$$\text{De (1) y (2): } \frac{m + 1}{m - 1} = \frac{1}{n} \Rightarrow mn + n = m - 1$$

$$\text{De aquí: } m - n - mn = 1$$

$$\therefore (m - n - mn)^2 = 1$$

56. Hallar el denominador racional de la expresión:

$$T = \frac{\sqrt{16 \cos(2\pi)}}{\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 1)}$$

Resolución:

$$\sqrt{16 \cos(2\pi)} = \sqrt{16(1)} = 4$$

$$\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2})^2} = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}$$

$$\text{Reemplazando: } T = \frac{4}{(\sqrt[6]{3} + \sqrt[6]{2})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3} + 1)}$$

Luego:

• F_1 de $(\sqrt[6]{3} + \sqrt[6]{2})$ es la expresión:

$$(\sqrt[6]{3} - \sqrt[6]{2})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3} + 1)$$

• F_2 de $(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3} + 1)$ es $\sqrt[3]{3} + 1$

$$T = \frac{4}{(\sqrt[6]{3} + \sqrt[6]{2})(\sqrt[3]{3^2} - \sqrt[3]{3} + 1) \left(\frac{F_1 F_2}{F_1 F_2} \right)}$$

$$T = \frac{F_1 F_2}{(3-2)(3+1)} = \frac{F_1 F_2}{1}$$

∴ Denominador racional: 1

57. El denominador racional de: $\frac{-6}{-2 + \sqrt{2} - \sqrt[4]{2}}$, será:

Resolución:

1.º Multiplicamos y dividimos por: $f_1 = (\sqrt{2} - 2) + \sqrt[4]{2}$

$$\begin{aligned} & \frac{-6}{(\sqrt{2} - 2) - \sqrt[4]{2}} \times \frac{f_1}{(\sqrt{2} - 2) + \sqrt[4]{2}} \\ &= \frac{-6f_1}{(\sqrt{2} - 2)^2 - \sqrt[4]{2}^2} = \frac{-6f_1}{6 - 4\sqrt{2} - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

2.º Multiplicamos y dividimos por: $f_2 = 6 + 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-6f_1}{6 - 5\sqrt{2}} \right) \left(\frac{f_2}{6 + 5\sqrt{2}} \right) = \frac{-6f_1 f_2}{6^2 - (5\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{-6f_1 f_2}{-14} = \frac{3f_1 f_2}{7} \end{aligned}$$

∴ Denominador racional: 7

58. Reducir: $S = \frac{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} + 1}{\sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{2} - 1 - \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} - 1}$

Resolución:

Sea el denominador:

$$D = \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{2} - 1 - \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} + 1$$

Elevando al cuadrado:

$$D^2 = \sqrt[4]{8} + \sqrt[4]{2} + 1 - 2\sqrt[4]{48} + \sqrt[4]{2} - 1 - \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} + 1 + \sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} - 1$$

$$D^2 = 2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt[4]{8} - (\sqrt{2} - 1)$$

$$D^2 = 2\sqrt[4]{8} - 2\sqrt[4]{2\sqrt{2} - \sqrt{2} + 1} = 2(\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2\sqrt{2} + 1})$$

$$\text{De aquí: } D = \sqrt{2}(\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2\sqrt{2} + 1})$$

Reemplazando en lo pedido:

$$S = \frac{\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2} + 1}{\sqrt{2}(\sqrt[4]{8} - \sqrt[4]{2\sqrt{2} + 1})} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore S = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

59. Hallar la raíz cúbica de: $9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}$

Resolución:

$$\text{Piden: } \sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}}$$

$$\text{Hacemos: } \sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \quad \dots(1)$$

$$\text{Además: } \sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \quad \dots(2)$$

$$(1) \times (2): \frac{\sqrt[3]{(9\sqrt{3} + 11\sqrt{2})(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2})}}{1} = x - y$$

$$\text{De aquí: } x - y = 1 \quad \dots(3)$$

$$(1) + (2): \sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} + \sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = 2\sqrt{x}$$

En nuestro caso, elevando al cubo:

$$18\sqrt{3} + 3\sqrt[3]{(9\sqrt{3} + 11\sqrt{2})(9\sqrt{3} - 11\sqrt{2})}(2\sqrt{x}) = 8\sqrt{x}^3$$

$$\Rightarrow 18\sqrt{3} + 6\sqrt{x} = 8x\sqrt{x} \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Luego, en (3): } y = 2$$

$$\therefore \sqrt[3]{9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

60. Hallar el equivalente de:

$$M = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$

Resolución:

Multiplicamos y dividimos por $\sqrt{2}$:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}} \right)$$

$$M = \sqrt{2} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}} \right)$$

$$\qquad \qquad \qquad (\sqrt{3} + 1) \qquad \qquad (\sqrt{3} - 1)$$

Multiplicamos y dividimos por 2:

$$M = \sqrt{2} \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \right) \left(\frac{2}{2} \right)$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{4 + 2\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} + \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \right)$$

$$M = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)} + \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)} \right]$$

$$\therefore M = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} (\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} (2\sqrt{3}) = \sqrt{2}$$

61. Indicar un radical simple de: $\sqrt{\frac{2a + \sqrt{8a}}{4} + \sqrt[4]{2a^3}}$

Resolución:

Modificando la expresión dada; se puede escribir:

$$\sqrt{\frac{2a + 2\sqrt{2a}}{4} + \sqrt[4]{2a^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{a + \sqrt{a}}{2} + \sqrt[4]{2a}(\sqrt{a})}$$

$$= \sqrt{\frac{a + \sqrt{2a} + 2(\sqrt[4]{2a})(\sqrt{a})}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{a} + \sqrt[4]{2a})^2}{2}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{2a}}{\sqrt{2}}$$

Pero sabemos que: $\sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$, desdoblado:

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{2a}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt[4]{2a}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{a}{2}} + \sqrt[4]{\frac{a}{2}}$$

∴ Un radical simple: $\sqrt{\frac{a}{2}}$

62. La igualdad: $\frac{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}{\sqrt{3}+\sqrt{8}} + 7 = \sqrt{x+2\sqrt{128}}$

se verifica, si "x" toma el valor de:

Resolución:

Transformamos los radicales dobles:

$$\begin{aligned} \sqrt{17+12\sqrt{2}} &= \sqrt{17+2\sqrt{6^2 \times 2}} \\ &= \sqrt{17+2\sqrt{9 \times 8}} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{9} + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{17+12\sqrt{2}} = (\sqrt{2}+1)^2$$

$$\sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{3+2\sqrt{2 \times 1}} = \sqrt{2}+1$$

Luego: $\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{\sqrt{2}+1} + 7 = \sqrt{x+2\sqrt{128}}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}+8 = \sqrt{x+2\sqrt{128}}$$

Elevando al cuadrado: $66 + 16\sqrt{2} = x + 16\sqrt{2}$

∴ x = 66



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



PROBLEMA 1 (UNI 1984 - I)

Efectuar: $\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^{-1}$

A) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ B) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ E) N. A.

Resolución:

Reduciendo primero el corchete:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}} \right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{2(1-\sqrt{3})}{\sqrt{3}} \right)^{-1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2(1-\sqrt{3})} \right)$$

$$= \frac{1}{1-\sqrt{3}} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right) = \frac{1+\sqrt{3}}{-2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 1986)

Simplificar: $\sqrt{20\sqrt{6}} + 49 + \sqrt[4]{441} + 180\sqrt{6}$

A) $1/(8-3\sqrt{6})$ B) $8+3\sqrt{6}$
C) $2+\sqrt{6}$ D) $(6-\sqrt{6})/(3+\sqrt{6})$
E) $8+2\sqrt{6}$

Resolución:

Transformando:

$$S = \sqrt{49+2\sqrt{600}} + \sqrt[4]{441+2\sqrt{225 \times 216}}$$

$$S = \sqrt{49+2\sqrt{25 \times 24}} + \sqrt[4]{225+2\sqrt{216}}$$

$$S = \sqrt{25+2\sqrt{24}} + \sqrt[4]{15+6\sqrt{6}}$$

$$S = 5+2\sqrt{6}+3+\sqrt{6}$$

$$S = 8+3\sqrt{6}$$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 1988)

La expresión siguiente:

$$\frac{a-c+(1+\sqrt{2})\sqrt{ab}-(1-\sqrt{2})\sqrt{bc}+b\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}-\sqrt{c}}$$

es igual a:

A) $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}$ B) $\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c}$
C) $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ D) $\sqrt{a}-2\sqrt{b}-\sqrt{c}$
E) $\sqrt{a}+2\sqrt{b}-\sqrt{c}$

Resolución:

Descomponiendo el numerador mediante un aspa simple:

$$a-c+(1+\sqrt{2})\sqrt{ab}-(1-\sqrt{2})\sqrt{bc}+b\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{a}-\sqrt{c} & \searrow & \sqrt{2b} \\ \sqrt{a}+\sqrt{c} & \swarrow & \sqrt{b} \end{array}$$

Entonces se tendrá:

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{c}+\sqrt{2b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}{\sqrt{a}-\sqrt{c}+\sqrt{2b}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 1983)

Expresar con denominador racional la siguiente expresión:

A) $(3^{2/9}+3^{5/6}+3^{1/6})/8$ B) $(3^{2/9}+3^{1/9}+3^{1/6})/8$
C) $(3^{3/2}+3^{2/3}+3^{1/6})/8$ D) $(3^{3/2}+3^{5/6}+3^{1/6})/8$
E) $(3^{4/3}+3^{5/6}+3^{1/6})/8$

Resolución:

La expresión puede expresarse como: $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9}-1)}$

Multiplicamos ahora por su factor racionalizante:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}(\sqrt[3]{9}-1)} \left(\frac{\sqrt[3]{9^2}+\sqrt[3]{9}+1}{\sqrt[3]{9^2}+\sqrt[3]{9}+1} \right) \\ &\frac{3^{1/6}(3^{4/3}+3^{2/3}+1)}{8} = \frac{3^{3/2}+3^{5/6}+3^{1/6}}{8} \end{aligned}$$

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

Si x_0 es la solución de la ecuación:

$$\frac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3}+\sqrt{8}} = \sqrt{x+2\sqrt{128}} - 7$$

calcular el valor de: $\sqrt{x_0 + 34}$

- A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

Resolución:

Racionalizando:

$$\frac{\sqrt{17+2\sqrt{72}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} = \sqrt{x+2\sqrt{128}} - 7$$

$$\frac{\sqrt{9+\sqrt{8}}}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} = \sqrt{x+2\sqrt{128}} - 7$$

$$\frac{\sqrt{3+\sqrt{8}}^2}{\sqrt{3+\sqrt{8}}} = \sqrt{x+2\sqrt{128}} - 7 \Rightarrow \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{x+2\sqrt{128}} - 7$$

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} + 7 = \sqrt{x+2\sqrt{128}}$$

$$8 + \sqrt{2} = \sqrt{x+2\sqrt{128}} \Rightarrow \sqrt{64} + \sqrt{2} = \sqrt{x+2\sqrt{128}}$$

Se cumple que: $x = 64 + 2 = 66$

$$\therefore \sqrt{x+34} = 10$$

Clave: B



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Hallar el valor de $(x + y)$ en:

$$\sqrt{13 - \sqrt{88}} = \sqrt{x - \sqrt{y}} - \sqrt{36 - 5\sqrt{44}}$$

- A) 64 B) 201 C) 227
D) 100 E) 225

2. Calcular el equivalente reducido de:

$$\sqrt{2}\sqrt{p + \sqrt{p^2 - 1}} (\sqrt{p + 1} - \sqrt{p - 1})$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) -1 E) -2

3. Reducir: $\sqrt{4x^2 - \frac{7}{16} + \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}}$, siendo: $x < \frac{1}{8}$

- A) $\frac{1}{4} + 2x$ B) $\frac{1}{2} - 2x$ C) $\frac{1}{2} + 2x$
D) $\frac{1}{4} - 2x$ E) $\frac{1}{5} + 2x$

4. Reducir la expresión: $\frac{\sqrt{19 + \sqrt{72}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}}}{\sqrt{4 + \sqrt{12}} - \sqrt{4 - \sqrt{12}}}$

Indicar el radical doble equivalente.

- A) $\sqrt{2 - \sqrt{6}}$ B) $\sqrt{6 + \sqrt{2}}$ C) $\sqrt{6 - \sqrt{2}}$
D) $\sqrt{4 + \sqrt{12}}$ E) $\sqrt{2 + \sqrt{6}}$

5. Calcular A y B de la igualdad:

$$\sqrt{11\sqrt{2} - 12} = \sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B}$$

Dar como respuesta el valor de: $\sqrt[4]{\frac{A}{B}}$

- A) $1,5\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 3
D) 2 E) 1

6. Señalar la relación que debe existir entre a y b para que se verifique la igualdad:

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2$$

- A) $a + b = 1$ B) $a - b = 1$ C) $4a + b = 5$
D) $4a - b = 4$ E) $a - b = 4$

7. Si $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$; calcular $9yx$.

- A) 18 B) 19 C) 9
D) 1 E) 3

8. Indicar el producto de los radicales simples obtenidos de: $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

- A) $\sqrt{10}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{3}$ E) $-\sqrt{3}$

9. Racionalizar e indicar el denominador resultante en cada uno de los casos siguientes:

I. $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7} + 1}$

II. $\frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$

III. $\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$

- A) 16; 1 B) 17; 1 C) 18; 1
D) 15; 1 E) 19; 1

10. Hallar el denominador racionalizado de: $\frac{1}{\sqrt[5]{8} - \sqrt[5]{4} + 1}$

- A) 243 B) 245 C) 33
D) 234 E) 3

11. Racionalizar la siguiente expresión: $\frac{x^3 + 1 + 3x\sqrt[3]{2}}{x - 1 + \sqrt[3]{2}}$
y señalar el coeficiente de x del numerador que se obtiene.

- A) 1 B) $\sqrt[3]{2}$ C) $-\sqrt[3]{2}$
D) $1 + \sqrt[3]{2}$ E) $1 - \sqrt[3]{2}$

12. Señalar el denominador racionalizado:

$$\frac{18}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2}}$$

- A) 5 B) 10 C) 9 D) 45 E) 2

13. Calcular: $E = \frac{\frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{3}}{\sqrt{12 + 4\sqrt{6}}} + 1}{\frac{\sqrt{8 + 4\sqrt{6}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}} + 1}$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ E) $2\sqrt{2}$

14. Hallar el denominador racionalizado:

$$\frac{\sqrt[3]{xy}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y})}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{x + y}}$$

- A) a B) b C) $a + b$
D) 3 E) $3(a + b)$

15. Determinar el valor de N para que la fracción sea igual a 1.

$$\left(\frac{9xy^2 + (y^2 + 24x^2)\sqrt{y^2 - 3x^2}}{N} \right)^{-1}$$

- A) $3x$ B) $\sqrt{y^2 - 3x^2}$
C) $3x + \sqrt{y^2 - 3x^2}$ D) $3x - \sqrt{y^2 - 3x^2}$
E) $x + \sqrt{y^2 - 3x^2}$

16. Racionalizar y señalar el denominador:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{54\sqrt{3} + 41\sqrt{5}}}$$

- A) 4 B) 9 C) 7
D) 5 E) 12

17. Simplificar: $E = \frac{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-2} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}}} - \sqrt{2}$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) $2\sqrt{2}$

18. Reducir y racionalizar el denominador de:

$$\frac{\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{2}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}}$$

- A) 20 B) 10 C) 5
D) 4 E) 3

19. Indicar el equivalente de: $\frac{3+4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

- A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{6}+\sqrt{2}-\sqrt{5}$
D) $\sqrt{6}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$ E) 1

20. Calcular $ab + b - a$; si:

$$a = \frac{\sqrt{8}+\sqrt{20}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{3}}; \quad b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$$

- A) 2 B) -2 C) 1
D) -1 E) 0

21. Simplificar: $\frac{(a-1)(1+a-\sqrt[3]{a^2})}{1+\sqrt[3]{a}+a\sqrt[3]{a^2}}$

- A) $\sqrt[3]{a}$ B) $\sqrt[3]{a}+2$ C) $\sqrt[3]{a}-1$
D) $\sqrt[3]{a}+1$ E) 1

22. Indicar el denominador racionalizado de S ($a > 2$):

$$S = \frac{\sqrt[3]{(2a+2\sqrt{a^2-2})^{-1}}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}-\sqrt{a}-\sqrt{2}}$$

- A) 4 B) 1 C) 2
D) 3 E) $2a$

23. Racionalizar e indicar el denominador de:

$$\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{a}}$$

- A) a^2+a+1 B) a^2-2a-1 C) a^2-2a+3
D) a^2-a+3 E) a^2-6a+1

24. Efectuar: $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

- A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{3}+1$

25. Determinar el equivalente de: $\frac{\sqrt[4]{8}+\sqrt[4]{2}+1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}+2}$

- A) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt[4]{2}}{4}$ C) $\frac{\sqrt[4]{2}}{8}$
D) $\frac{\sqrt[4]{8}}{16}$ E) $\frac{\sqrt[4]{8}}{4}$

26. Efectuar: $\frac{(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{8})(\sqrt[4]{3}+2\sqrt[4]{2})}{(\sqrt[4]{2}+1)(\sqrt[4]{2}-1)}$

- A) $\sqrt[4]{3}$ B) $\sqrt[4]{8}$ C) $\sqrt[4]{3}+1$
D) $(\sqrt[4]{2}+1)$ E) $\sqrt[4]{2}-1$

27. Luego de multiplicar: $\frac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \times \frac{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

y dividir el resultado entre: $\frac{6+2\sqrt{5}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$

Indicar una expresión equivalente.

- A) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}-\sqrt{3}$

28. Indicar el denominador de la expresión racionalizada de:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}+\sqrt[3]{\frac{3}{3}}}$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $1/3$ E) $1/2$

29. Proporcionar el equivalente reducido, con denominador racional, de:

$$\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{6}}$$

- A) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ B) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$ C) $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$
D) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ E) $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$

30. Calcular: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{108}+\sqrt{75}-\sqrt{12}}$

- A) $1/9$ B) $1/3$ C) $1/2$
D) $\sqrt{3}$ E) $1/5$

31. Racionalizar: $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

- A) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{6}$ E) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{3}$

32. Luego de racionalizar:

$$\frac{1}{(\sqrt[3]{3}+1)(\sqrt[4]{243}+1)+\sqrt{3}(\sqrt[3]{3}+1)}$$

Indicar el denominador obtenido.

- A) 4 B) 3 C) 2
 D) 1 E) 16

33. Indicar el denominador racionalizado de:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{12} + \sqrt[3]{9}}$$

- A) $\frac{\sqrt[3]{4} + 1}{2}$ B) $\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{2}$ C) $\frac{\sqrt[3]{4} - 1}{2}$
 D) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}}{2}$

34. Racionalizar: $\frac{1}{\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54} - 5}$

- A) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} - 1}{5}$ B) $\frac{\sqrt[3]{2} + 1}{2}$ C) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2}}{5}$
 D) $\frac{\sqrt[3]{4} + 1}{2}$ E) $\frac{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}{5}$

35. Efectuar: $\frac{\sqrt{14 + 4\sqrt{6}} + \sqrt{2}}{\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{8}}$

- A) 4 B) 3 C) 1
 D) 2 E) 5

36. Racionalizar: $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1} - x^{-1}}$, si: $0 < |x| < 1$

- A) $\sqrt{2 + x^2} - 1$ B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{x^2 + 1}$
 D) $\sqrt{1 + x^2} + 1$ E) $\sqrt{1 - x^2} - 1$

37. Racionalizar e indicar el denominador en:

$$\frac{a - 9b}{a + 6b + 5\sqrt{ab}}$$

si: $a > 25 \wedge 2 > b > 0$

- A) $a - 4b$ B) $a - 2b$ C) $a - 2c$
 D) $a + 4b$ E) $a + 2b$

38. Indicar el denominador racionalizado para x en:

$$\sqrt[3]{3x^3(1 - \sqrt{3})} = 2(10 - x)$$

- A) 9 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 27

39. Si $\sqrt{0, a} + \sqrt{0, b} = \sqrt{0, 3} + \sqrt{0, 08}$, indicar el producto de sus radicales simples de: $E = \sqrt{a^2 + 3\sqrt{b} + 1}$; para: $a > b$

- A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
 D) $\sqrt{\frac{2}{2}}$ E) N. A.

40. Calcular: $S = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{13 + \sqrt{7}} - \sqrt{5 - \sqrt{7}})}{\sqrt{3 + \sqrt{7}}}$

- A) 4 B) 9 C) 13
 D) 15 E) 17

41. Indicar el equivalente racionalizado de:

$$\frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \times \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \times \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}}$$

- A) 1 B) $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ C) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
 D) $\sqrt{2} + 1$ E) $\sqrt{2} - 1$

42. Racionalizar e indicar el denominador de:

$$\frac{1}{2 + \sqrt[6]{7} - \sqrt[3]{7}}$$

- A) 568 B) 520 C) 456
 D) 426 E) 342

43. Luego de transformar a radicales simples, indicar uno de los radicandos.

$$\sqrt{2x + \sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{x^2}{x^2 - 1} \right) - \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}, x > 1$$

- A) $x + 1$ B) x C) $2x - 1$
 D) $x + 2$ E) $x^2 - 1$

44. Sabiendo que el radical doble:

$$\sqrt{3ax^6y + \frac{5b}{8}xz^2 + x^3z\sqrt{(9ab - \frac{c}{2})xy}}$$

puede descomponerse en radicales sencillos, calcular el valor de: $E = \frac{c}{ab}$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 5

45. Después de extraer la raíz cuadrada al polinomio:

$$P(x) = 4x^8 + 20x^7 + 13x^6 - 14x^5 + 69x^4 + 26x^3 - 14x^2 + 40x + 25$$

indicar el enunciado correcto.

- A) El polinomio es un cuadrado perfecto.
 B) La suma de coeficientes de la raíz cuadrada es 13.
 C) El coeficiente del término cuadrático de la raíz cuadrada es 3.
 D) El coeficiente del término lineal de la raíz cuadrada es (-3).
 E) En la raíz cuadrada existen dos términos que tienen sus coeficientes iguales.

46. Si el polinomio $P(x) = x^2 + 6x + 2ix + a - bi$, admite raíz cuadrada exacta, hallar ab. ($a, b \in \mathbb{R}$)

- A) 8 B) 64 C) -6
 D) -48 E) 0

47. Efectuar:

$$4 \left(\frac{1}{1 + \sqrt[4]{4}} + \frac{1}{1 + \sqrt{3} + \sqrt[4]{4}} \right) \left(\frac{1}{1 - \sqrt[4]{4}} + \frac{1}{1 - \sqrt{4} + \sqrt{3}} \right)$$

- A) $13 + 5\sqrt{3}$ B) $13 - 5\sqrt{3}$ C) $5 + 13\sqrt{3}$
 D) $5 - 13\sqrt{3}$ E) $-13 + 5\sqrt{3}$

48. Calcular A y B de la igualdad:

$$\sqrt[4]{11\sqrt{2}-12} = \sqrt[4]{A} - \sqrt[4]{B}; (A; B) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

Luego indicar el valor de: $\sqrt[4]{\frac{A}{B}}$

A) $3\sqrt{2}$ B) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ C) 2

D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$

49. Efectuar: $R = \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{97+56\sqrt{3}}}}$

A) 1 B) 2 C) $\sqrt[5]{2}$

D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{3}+1$

50. Si: $\sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}; (a; b; c) \subset \mathbb{Q}$,
calcular: $a + b + c$.

A) 1 B) 3 C) $1/3$

D) 2 E) $\frac{1}{3} + \sqrt[3]{2}$

51. Reducir: $(\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt[4]{6})^4$

A) 80 B) 96 C) 100

D) 125 E) 4

52. Reducir: $\sqrt{20\sqrt{6}+49} + \sqrt[4]{441+180\sqrt{6}} - 3\sqrt{6}$

A) 8 B) 10 C) 20

D) 30 E) 18

53. Racionalizar e indicar el denominador de:

$$\frac{7}{2^n\sqrt[3]{2} + 2^n\sqrt[3]{1}}; n \geq 5, n \in \mathbb{N}$$

A) 3 B) 2 C) 6

D) 1 E) 5

54. Determinar el equivalente más elemental de:

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{3}} \right)^2$$

A) 6 B) 3 C) 2

D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

55. Efectuar: $\frac{(\sqrt[5]{a}+1)^2}{(\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a}+1)(\sqrt[5]{a^3}-\sqrt[5]{a^2}+1)-a} - \sqrt[5]{a}+1$

A) -2 B) -1 C) 0

D) 1 E) 2

56. Simplificar: $R = \frac{\sqrt{(4+\sqrt{15})^3} + \sqrt{(4-\sqrt{15})^3}}{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3} - \sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}$

A) 1 B) $1/3$ C) $7/13$

D) $13/7$ E) 3

57. Indicar el denominador simplificado al racionalizar:

$$F = \frac{\sqrt[3]{10}(\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{2}}$$

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 7

58. Dar el denominador luego de racionalizar:

$$K = \frac{2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2x} + \sqrt{x+1}}$$

A) $x+2$ B) $x-1$ C) $x+1$

D) x E) 1

59. Calcular: $J = \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x + \sqrt{1+x^2}}$

si: $x = \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}); 0 < b < a$

A) a B) b C) $a-b$

D) $a+b$ E) 1

60. Si al efectuar: $L = \frac{23}{1 + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{4}}$, obtenemos una

expresión que adopta la forma: $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, hallar: $E = a + b + c$

A) 243 B) 655 C) 686

D) 717 E) 0

61. Reducir:

$$S = \frac{\sqrt{13-2\sqrt{40}} + \sqrt{7+\sqrt{40}} + \sqrt{11+2\sqrt{18}}}{\sqrt{33+8\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{11-\sqrt{72}}}$$

A) $\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2}-1$

D) 1 E) $3\sqrt{2}-1$

62. Efectuar: $A = \frac{\sqrt{28-6\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{12+6\sqrt{3}}}{\sqrt{13-4\sqrt{3}} + \sqrt{21-12\sqrt{3}} + \sqrt{19+8\sqrt{3}}}$

A) 1 B) $3/2$ C) 2

D) 3 E) $5/2$

63. Efectuar: $L = \frac{\sqrt{5-\sqrt{21}} - \sqrt{4-\sqrt{15}}}{\sqrt{3-\sqrt{5}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}}$

A) -1 B) $-1/2$ C) 1

D) $1/2$ E) 2

64. Reducir: $V = \frac{\sqrt{11+\sqrt{72}} - \sqrt{3-\sqrt{8}}}{\sqrt{14-\sqrt{180}} + \sqrt{6-\sqrt{20}}}$

A) 1 B) 2 C) 3

D) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

65. Racionalizar: $D = \frac{3}{5 - \sqrt{15} + \sqrt{10} - \sqrt{6}}$

señale el denominador.

A) 1 B) 2 C) 3

D) 4 E) 6

66. Reducir:

$$\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{7-2\sqrt{12}} + \dots + \sqrt{49-2\sqrt{600}}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

 67. Simplificar: $T = \frac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} - \frac{12}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

e indicar el denominador racionalizado.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

 68. Efectuar: $(\sqrt{11+2\sqrt{18}})(1+\sqrt[4]{2})(1-\sqrt[4]{2}) + \sqrt{8}$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 1

 69. Al efectuar: $\sqrt{2-\sqrt{6}-\sqrt{20}}$, se obtiene:

- A) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$
D) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ E) $1+\sqrt{3}$

 70. Luego de racionalizar y simplificar: $\frac{5}{\sqrt{75}-\sqrt{45}}$; el denominador resulta:

- A) 1 B) 3 C) 5
D) 6 E) 15

 71. Hallar el valor equivalente de: $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} - 2\sqrt{2}$

- A) 1 B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}+1$

 72. Efectuar: $P = 2\sqrt{18} - \frac{\sqrt{18}}{2} + \sqrt[4]{4} - \frac{\sqrt{50}}{2} - \sqrt{18}$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

 73. Efectuar: $P = \sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2+2x+1}$
si: $0 < x < 1$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) $2x$ E) $-2x$

74. Efectuar:

$$S = \sqrt{8+\sqrt{60}} - \sqrt{12-2\sqrt{27}} - \sqrt{32+2\sqrt{135}} + \sqrt{3}$$

- A) -3 B) -1 C) 3
D) 4 E) 5

75. Efectuar:

$$S = \sqrt{13+\sqrt{48}} - \sqrt{15-\sqrt{200}} - \sqrt{17+4\sqrt{15}} - \sqrt{5-2\sqrt{4}}$$

- A) -2 B) $-\sqrt{10}$ C) $\sqrt{5}$ D) $-\sqrt{5}$ E) 3

 76. Efectuar: $T = \sqrt{1+4\sqrt{1+4\sqrt{9+4\sqrt{5}}}} + \sqrt[3]{-8}$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$ E) 0

 77. Reducir: $M = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{21}} - \sqrt{8-2\sqrt{15}}}{\sqrt{9+2\sqrt{14}} - \sqrt{7+2\sqrt{10}}}$

- A) -1 B) 1 C) 2
D) -2 E) 3

 78. Efectuar: $V = \frac{\sqrt{9+2\sqrt{20}} + \sqrt{13-4\sqrt{10}}}{\sqrt{4+\sqrt{12}} - \sqrt{5-\sqrt{24}}}$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

 79. Convertir a radical simple: $\sqrt{2x+\sqrt{4x^2-400}}$ e indicar uno de ellos.

- A) $\sqrt{x+10}$ B) $\sqrt{x-2}$ C) $\sqrt{x+2}$
D) $\sqrt{x-1}$ E) $\sqrt{x-10}$

 80. Efectuar: $\sqrt{3+\sqrt{8}} + \sqrt{7-\sqrt{40}} - \sqrt{5}$

- A) 0 B) 1 C) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$
D) $2+\sqrt{5}$ E) $3+\sqrt{2}$

81. Halle el equivalente racionalizando de:

$$S = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \times \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \times \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$$

- A) 1 B) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
D) $\sqrt{2}+1$ E) $\sqrt{2}-1$

82. Después de racionalizar, hallar el denominador de:

$$\frac{1}{2+\sqrt[4]{7}-\sqrt[3]{7}}$$

- A) 568 B) 520 C) 456
D) 426 E) 342

83. Luego de racionalizar, hallar el denominador:

$$F = \frac{7}{2^n\sqrt[4]{1} + 2^n\sqrt[4]{3}}; n \geq 5, n \in \mathbb{N}$$

- A) 3 B) 2 C) 6
D) 1 E) 5

84. Hallar el equivalente más elemental de:

$$\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} \right)^2$$

- A) 6 B) 3 C) 2
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

85. Efectúe:

$$S = \frac{(\sqrt[5]{a}+1)^2}{(\sqrt[5]{a^2}+\sqrt[5]{a}+1)(\sqrt[5]{a^3}-\sqrt[5]{a^2}+1)-a} - \sqrt[5]{a}+1$$

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

 86. Efectuar: $T = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} - \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) $\sqrt{3}-2$ E) $2\sqrt{3}$

CLAVES

1. C	12. A	23. E	34. E	45. A	56. C	67. A	78. B
2. B	13. B	24. B	35. D	46. D	57. B	68. E	79. A
3. D	14. D	25. D	36. E	47. E	58. B	69. B	80. B
4. E	15. C	26. D	37. A	48. B	59. D	70. D	81. D
5. A	16. C	27. E	38. D	49. A	60. B	71. B	82. C
6. D	17. B	28. B	39. B	50. C	61. D	72. E	83. D
7. A	18. A	29. C	40. A	51. B	62. A	73. B	84. C
8. E	19. D	30. A	41. D	52. A	63. A	74. A	85. E
9. A	20. B	31. E	42. C	53. D	64. B	75. B	86. D
10. A	21. D	32. A	43. A	54. C	65. B	76. C	
11. E	22. C	33. E	44. C	55. E	66. C	77. B	

Números complejos

13

capítulo

Lodovico Ferrari fue un matemático italiano que nació en Bolonia (Italia) el 2 de febrero de 1522 y murió en la misma ciudad envenenado con trióxido de arsénico por su hermana el 5 de octubre de 1565. Fue un estudioso de las matemáticas y en unión de otros colaboradores, siendo el más importante de ellos Cardano, llegó a ser uno de los mayores representantes de la escuela de Bolonia, que se dedicaba principalmente al estudio del álgebra; así descubrió la resolución algebraica de la ecuación general de cuarto grado. Asimismo, demostró la fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado.



Lodovico Ferrari

Lodovico Ferrari puso de manifiesto en su exposición lo que hoy se conoce como números imaginarios. Cardano y Ferrari estudiaron la solución de las cúbicas que Tartaglia les había comunicado. Ellos resolvieron los problemas que Zuanne da Coi había propuesto y escribieron los casos en que podía presentarse una cúbica con coeficientes positivos. En este proceso, Ferrari descubrió también la solución general de la cuártica en 1540, con un bello argumento reducía el problema a resolver una cúbica por el método de Tartaglia. Como Cardano había jurado a Tartaglia que no publicaría la solución de las cúbicas, estos no podían publicar tampoco las cuárticas que dependían de la solución de aquellas.

Fuente: Wikipedia

◀ CANTIDADES IMAGINARIAS

Se originan al extraer raíz de índice par a una cantidad negativa.

Así: $\sqrt{-16}$; $\sqrt[4]{-81}$; $\sqrt[10]{-2}$, son cantidades imaginarias.

Unidad imaginaria

La cantidad imaginaria $\sqrt{-1}$ es llamada unidad imaginaria, con esta definición, podemos representar a todas las cantidades imaginarias puras.

Notación: según la notación de Gauss, la unidad imaginaria se representa por la letra i .

Se define:

$$i^2 = -1 \Leftrightarrow i = \sqrt{-1}$$

Ejemplo:

Efectuar: $E = \sqrt{-8} \times \sqrt{-2}$

Resolución:

$$E = (\sqrt{8} \sqrt{-1})(\sqrt{2} \sqrt{-1}) = \sqrt{8} i \sqrt{2} i = \sqrt{16} i^2 \Rightarrow E = 4(-1) \\ \therefore E = -4$$

◀ POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA

$$\begin{array}{lll} i^1 = i & i^5 = i & i^9 = i \\ i^2 = -1 & i^6 = -1 & i^{10} = -1 \\ i^3 = -i & i^7 = -i & i^{11} = -i \\ i^4 = 1 & i^8 = 1 & i^{12} = 1 \end{array}$$

Como se puede observar, los resultados de las potencias de la unidad imaginaria se repiten en periodos de 4 en 4, y si los exponentes son múltiplos de 4 el resultado es 1. Esto implica que estas potencias están gobernadas por propiedades que veremos a continuación.

Propiedades de las potencias de la unidad imaginaria

- $i^{4n} = 1$
- $i^{4n+1} = i$
- $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

Corolario:

$$i^n + i^{n-1} + i^{n-2} + i^{n-3} = 0$$

Ejemplos:

Calcular:

- $i^{1920} = i^4 = 1$
- $i^{3333} = i^{4 \cdot 833 + 1} = i^1 = i$
- $i^{77} = i^{(4-1) \cdot 7} = i^{4-1} = i^3 = -i$
- Si $i^n = i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^{4n+1}$
reducir: $E = i^{(n-2) \cdot 4n+2}$, $n \in \mathbb{N}$

Resolución:

Sabemos por el corolario que:

$$i^n + i^{n-1} + i^{n-2} + i^{n-3} = 0$$

En el problema:

$$i^n = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4 + \dots + i^4 + \dots + i^{4n-3} + i^{4n-2} + i^{4n-1} + i^{4n}}_0 + \underbrace{i^{4n+1}}_0$$

$i^n = i^{4n+1}$, entonces: $n = 4 + 1$

Se pide:

$$E = i^{(4-1-2) \cdot 4n+2} = i^{(4-1) \cdot 4n+2} = i^{4-1} = i^3 = -i$$

impar

◀ NÚMERO COMPLEJO

Es un número que resulta de la unión de un número real más un número imaginario.

Sea el complejo:

$$z = a + bi$$

Parte real Parte imaginaria

Siendo a y b números reales, nos indica que el complejo esta formado por " a " unidades reales y " b " unidades imaginarias.

También se les define como el conjunto de pares ordenados de números reales, donde la primera componente (abscisa) se le denomina parte real y la segunda componente (ordenada) parte imaginaria.

Notación: $z = (a; b)$

Donde: $a; b \in \mathbb{R}$

Parte real: $\text{Re}(z) = a$

Parte imaginaria: $\text{Im}(z) = b$

Luego, dado $z = a + bi$

Si $a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow z = bi$ es un número imaginario puro.

Si $a \neq 0 \wedge b = 0 \Rightarrow z = a$ es un número real.

Si $a = b = 0 \Rightarrow z = 0$ es un número complejo nulo.

Complejos conjugados

Son dos complejos que tienen iguales sus partes reales e iguales pero de signos contrarios sus partes imaginarias.

Sea: $z = a + bi$, su conjugado será: $\bar{z} = a - bi$.

Complejos opuestos

Son dos complejos que se caracterizan porque se diferencian solo en el signo de la parte real e imaginaria, pero teniendo las mismas partes real e imaginaria (en valor absoluto).

Así, los complejos: $z_1 = a + bi \wedge z_2 = -a - bi$ son dos complejos opuestos.

Complejos iguales

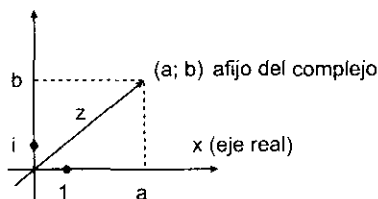
Dos complejos son iguales si tienen iguales sus partes reales y sus partes imaginarias.

Si: $a + bi = c + di \Rightarrow a = c \wedge b = d$

◀ REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Representación cartesiana o geométrica

Se realiza en el plano cartesiano en donde el eje "x" sirve para representar los números reales y el eje "y" sirve para representar las cantidades imaginarias.

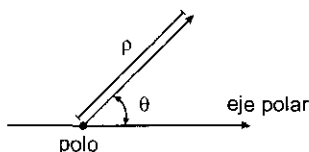


Al plano formado por los ejes real e imaginario se le llama plano de Gauss.

Afijo de un complejo: es un punto en el plano gaussiano que se representa por un par ordenado formado por la parte real y el coeficiente de la parte imaginaria que representan respectivamente la abscisa y ordenada del punto.

Representación polar o trigonométrica

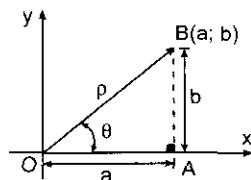
Toma como base las coordenadas polares, donde se conocen el origen (polo) y una semirrecta llamada eje polar. Para ubicar el afijo, se debe conocer la distancia del polo al afijo (módulo o radio vector) y el ángulo (argumento) comprendido entre el radio vector y el eje polar.



Donde: ρ : módulo o radio vector
 θ : argumento

Relación existente entre la forma cartesiana y la forma polar

Sea $z = a + bi$



En el gráfico

Del $\triangle OAB$:

$$\sin \theta = \frac{b}{\rho} = b = \rho \sin \theta; \quad \cos \theta = \frac{a}{\rho} \Rightarrow a = \rho \cos \theta$$

$$\text{Luego: } z = (a; b) = a + bi = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho \text{cis} \theta = \rho \angle \theta$$

Representación
cartesiana

Representación
polar

Donde: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| = |a + bi|$

También: $\tan \theta = \frac{b}{a}$

Como se puede observar, la parte real está representada por $\rho \cos \theta$.

Ejemplos:

1. Expresar en su forma polar:

a) $z = 3 + 4i$

Resolución:

Calculando el módulo: $\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Luego el argumento: $\tan \theta = \frac{4}{3} \Rightarrow \theta = 53^\circ$

$\therefore z = 3 + 4i = 5 \text{cis} 53^\circ$

b) $z = 4 - 3i$

Resolución:

El módulo será: $\rho = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

El argumento: $\tan \theta = \frac{-3}{4}$

lo que implica que: $\theta = 360^\circ - 37^\circ = 323^\circ$

$\therefore z = 4 - 3i = 5 \text{cis} 323^\circ$

c) $z = -2 - 2\sqrt{3}i$

Resolución:

El módulo estará dado por: $\sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$

El argumento: $\tan \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 180^\circ + 60^\circ = 240^\circ$

$\therefore z = -2 - 2\sqrt{3}i = 4 \text{cis} 240^\circ$

2. Calcular el complejo en la forma polar:

a) $z = -4 \text{cis} 30^\circ$

Resolución:

$z = -4 \text{cis} 30^\circ = -4[\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ]$

$z = 4[-\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ]$

$z = 4[\cos(180^\circ + 30^\circ) + i \sin(180^\circ + 30^\circ)]$

$\therefore z = 4 \text{cis} 210^\circ$

b) $z = 3[\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ]$

Resolución:

$z = 3[\cos 20^\circ - i \sin 20^\circ]$

$z = 3[\cos(360^\circ - 20^\circ) + i \sin(360^\circ - 20^\circ)]$

$\therefore z = 3 \text{cis} 340^\circ$

c) $z = -3 + 3\sqrt{3}i$

Resolución:

Hallando: $\rho = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$

$\tan \theta = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 120^\circ$

$\therefore z = 6 \text{cis} 120^\circ$

◀ OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

Suma y diferencia

Para sumar o restar números complejos, se suman o restan partes reales e imaginarias respectivamente.

$$\begin{aligned}\text{Así: } z_1 &= a + bi \\ z_2 &= c + di \\ z_1 + z_2 &= (a + c) + (b + d)i \\ z_1 - z_2 &= (a - c) + (b - d)i\end{aligned}$$

Producto

A. Forma cartesiana

$$\begin{aligned}\text{Sea } z_1 &= a + bi \\ z_2 &= c + di \\ \Rightarrow z_1 z_2 &= (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 \\ \text{Como } i^2 &= -1\end{aligned}$$

$$z_1 z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\text{Además: } (1 + i)(1 - i) = 2$$

B. Forma polar: se multiplican primero los módulos y luego se suman los argumentos:

$$\begin{aligned}\text{Si: } z_1 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 &= \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ \Rightarrow z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\text{Sean: } z_1 &= 2(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ) \\ z_2 &= 3(\cos 13^\circ + i\sin 13^\circ) \\ \Rightarrow z_1 z_2 &= 2 \times 3 [\cos(10^\circ + 13^\circ) + i\sin(10^\circ + 13^\circ)] \\ z_1 z_2 &= 6[\cos 23^\circ + i\sin 23^\circ]\end{aligned}$$

División

A. Forma cartesiana: para dividir complejos se multiplican numerador y denominador por la conjugada de este último.

$$\begin{aligned}z_1 &= a + bi \\ z_2 &= c + di \\ \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{(c - di)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(a + bi)(c - di)}{c^2 + d^2}\end{aligned}$$

$$\text{Entonces: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

Propiedades:

$$a) \frac{1+i}{1-i} = i \quad b) \frac{1-i}{1+i} = -i \quad c) \frac{1}{i} = -i$$

B. Forma polar: para dividir complejos se dividen primero los módulos y luego se restan los argumentos.

$$\begin{aligned}z_1 &= \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \\ z_2 &= \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\text{Dados: } z_1 &= 5(\cos 24^\circ + i\sin 24^\circ) \\ z_2 &= 3(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)\end{aligned}$$

$$\text{Luego: } \frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3} [\cos(24^\circ - 10^\circ) + i\sin(24^\circ - 10^\circ)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3} \operatorname{cis} 14^\circ$$

Potenciación

A. Forma cartesiana: la potencia de un complejo por esta forma solo resulta práctica cuando el exponente es pequeño. Para efectuar la operación se aplica el desarrollo del binomio de Newton; teniendo cuidado al reducir las potencias de i .

$(a + bi)^n$ por binomio de Newton

Propiedades:

$$a) (1 + i)^2 = 2i \quad b) (1 - i)^2 = 2i$$

Corolarios:

$$a) (1 + i)^4 = -4 \quad b) (1 - i)^4 = -4$$

B. Forma polar

$$\begin{aligned}\text{Sea: } z &= [\rho(\cos\theta + i\sin\theta)]^n \\ \Rightarrow z &= \rho^n [\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)\end{aligned}$$

Ejemplos:

$$1. \text{ Sea: } z = 2(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ), \text{ calcular } z^5.$$

Resolución:

$$\begin{aligned}z^5 &= [2(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ)]^5 \\ z^5 &= 2^5 (\cos 50^\circ + i\sin 50^\circ) = 32 \operatorname{cis} 50^\circ\end{aligned}$$

$$2. \text{ Calcular: } z = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{213}$$

Resolución:

$$\text{Hallando el módulo: } \rho = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\text{El argumento será: } \tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \theta = (180^\circ - 60^\circ) = 120^\circ$$

$$\text{Del enunciado: } z = (\operatorname{cis} 120^\circ)^{213} = \operatorname{cis} 25\,560^\circ$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis} 25\,560^\circ = \operatorname{cis} 360(71)$$

$$\Rightarrow z = \operatorname{cis} 0^\circ = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ \quad \therefore z = 1$$

Radicación

A. Forma cartesiana: la raíz enésima de un complejo es otro complejo, entonces:

$$\sqrt[n]{a + bi} = x + iy \Rightarrow a + bi = (x + iy)^n$$

Por binomio de Newton

Luego se igualan las partes reales e imaginarias entre sí:

Ejemplo:

$$\text{Hallar } \sqrt{-3 - 4i}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}\text{De: } \sqrt{-3 - 4i} &= \sqrt{-3 - 4\sqrt{-1}} = \sqrt{-3 - 2\sqrt{-4}} \\ &= (-4)(1)\end{aligned}$$

$$\text{Luego: } \sqrt{-3 - 4i} = \pm(\sqrt{1} - \sqrt{-4}) = \pm(1 - 2i)$$

$$\therefore \sqrt{-3 - 4i} = 1 - 2i \vee -1 + 2i$$

B. Forma polar:

Sea: $z = \sqrt[n]{\rho} (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$

$$z = \sqrt[n]{\rho} \left(\frac{\cos \theta + 2k\pi}{n} + i \frac{\operatorname{sen} \theta + 2k\pi}{n} \right)$$

También: $z = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \theta = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$

Donde en ambos casos: $k = 0; 1; 2; \dots; (n-1)$

Ejemplo:

Calcular las raíces de: $x^3 = 1$

Resolución:

$$x^3 = 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1 + 0i}$$

Escribiendo en su forma polar:

$$x = \sqrt[3]{\cos 0 + i \operatorname{sen} 0} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{0 + 2k\pi}{3}$$

Para: $k = 0$: $x = 1$

$$k = 1: x = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: x = \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Si: } x^3 = 1 \quad \begin{cases} x = 1 \\ x_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Sea: $w = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Elevando al cuadrado: $w^2 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Si $x^3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = w, x_3 = w^2$

Donde: 1, w y w^2 son las raíces cúbicas de la unidad.

◀ PROPIEDADES DE LAS RAÍCES CÚBICAS DE LA UNIDAD

- $w^3 = 1$ • $w^{3-r} = w^r$
- $1 + w + w^2 = 0$

Ejemplos:

1. $w^{56 \cdot 832} = w^3 = 1$

2. $w^{12 \cdot 341} = w^{3+2} = w^3 w^2 = w^2$

3. $w^{145} = w^{3 \cdot 1} = w$

4. $w^{4127} = w^{3-2} = w^2$

Calcular: $S = w + w^2 + w^3 + \dots + w^{26}$

Resolución:

Por la propiedad 3: $S = \underbrace{w + w^2 + w^3 + \dots + w^{27}}_0 + w^{28} + w^{29}$

Pero: $S = w^{28} + w^{29} = w^{3-1} + w^{3-2} = w + w^2$

Sea: $w + w^2 + w^3 = 0 \Rightarrow w + w^2 = -w^3$

$\therefore S = -w^3 = -1$

◀ FÓRMULA DE EULER

Sea:

$z = (a; b) = a + bi = \rho \operatorname{cis} \theta = \rho e^{i\theta}$; θ en radianes para calcular la forma exponencial de un complejo previamente hay que tener la forma polar o en todo caso deducirla.

Ejemplos:

1. Evaluar: $C = i + 4i^4 + 7i^7 + 10i^{10} + \dots + (3n-2)i^{3n-2}$
donde: $n = 4k / k \in \mathbb{Z}^+$

Resolución:

Número de términos = $\frac{(3n-2) - (-2)}{3} = n$

Agrupando cada cuatro términos:

$$C = \underbrace{i + 4 - 7i - 10 + 13i + 16 - 19i - 22 + \dots}_{\frac{n}{4} \text{ grupos}}$$

$$C = \frac{n}{4} (-6i - 6) = \frac{-6n}{4} (1 + i)$$

$$\therefore C = -1,5n(1 + i)$$

2. Hallar el valor que debe tomar "a" para que el cociente $\frac{3-2ai}{4-3i}$ sea un número real.

Resolución:

Asumamos que el cociente es una constante real k:

$$\frac{3-2ai}{4-3i} = k \Rightarrow 3-2ai = 4k-3ki$$

De donde: $k = \frac{3}{4} \dots (1)$

También: $2a = 3k \dots (2)$

(2) en (1): $2a = \frac{9}{4} \Rightarrow a = \frac{9}{8}$

3. Efectuar: $A = (i^{3-1} i^{1-1} i^{1-1})^{3-1}$

Resolución:

$$A = i^{6-2+1+4-2+1+4} \Rightarrow A = i^{16-2+1+4-2+1+4}$$

$$A = i^{-2+1+2+1+1} = i^1 = i$$

4. Efectuar: $E = (1+i)^{i-1-1-i} \sqrt[2]{2}$

Resolución:

$$E = 2\sqrt[2]{(1+i)^{2(i-1-1-i)} 2} = 2\sqrt[2]{(2i)^{-2-1-1-1} 2}$$

Luego: $E = 2\sqrt[2]{2^{-1}} \Rightarrow E = \sqrt[2]{2^{-1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. Calcular el valor de: $Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right)^{70}$

Resolución:

Sabemos que: $\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w$

En: $Q = \frac{\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^{70}}{i^{70}} = \frac{w^{70}}{i^{70}} = \frac{w}{-1}$

Luego: $Q = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

6. Reducir: $M = \frac{(2+2i)\sqrt{15-8i}}{-1+i}$

Resolución:

La expresión también puede escribirse:

$$M = \frac{-2(1+i)\sqrt{15-8i-1}}{(1-i)}$$

$$M = -2i\sqrt{15-2i-16}$$

$$M = 2i\sqrt{15 - 2\sqrt{(16)(-1)}}$$

$$M = -2i(\sqrt{16} - \sqrt{-1}) = 2i(4 - i) \quad \therefore M = -8i - 2$$

7. La suma de dos complejos es $-2 - 6i$, la parte real de uno de ellos es -4 y el cociente de ellos es imaginario puro. Indicar uno de los complejos.

Resolución:

Sea uno de los complejos: $z_1 = -4 + ai$

Luego, el otro será: $z_2 = 2 - (6 + a)i$

Por dato el cociente de z_1/z_2 es imaginario puro:

$$\frac{-4 + ai}{2 - (6 + a)i} = ki \Rightarrow -4 + ai = k(6 + a) + 2ki$$

$$\text{Luego: } a = 2k \Rightarrow k = \frac{a}{2}$$

$$-4 = k(6 + a) \Rightarrow a^2 + 6a + 8 = 0 = (a + 4)(a + 2)$$

$$\text{Si: } a = -4: z_1 = -4 - 4i$$

$$z_2 = 2 - 2i$$

$$\text{Si: } a = -2: z_1 = -4 - 2i$$

$$z_2 = 2 - 4i$$

8. Efectuar: $E = \frac{(1 + 2i)^{12} + 4(1 + 2i)^8 + 4(i - 2)^4}{(2 - i)^8 + 4(2 - i)^4 + 4}$

proporcionando luego la parte imaginaria del complejo resultante.

Resolución:

$$i - 2 = \frac{(i - 2)}{i} \cdot i = \frac{-1 - 2i}{i}$$

$$\Rightarrow (i - 2)^4 = (1 + 2i)^4$$

$$2 - i = \frac{1 + 2i}{i}$$

$$\Rightarrow (2 - i)^4 = (1 + 2i)^4 \quad \wedge \quad (2 + i)^8 = (2 - i)^8$$

En la expresión:

$$E = \frac{(1 + 2i)^{12} + 4(1 + 2i)^8 + 4(1 + 2i)^4}{(1 + 2i)^8 + 4(1 + 2i)^4 + 4}$$

$$E = (1 + 2i)^4 = (1 - 4 + 4i)^2 = (-3 + 4i)^2$$

$$E = 9 - 16 - 24i = -7 - 24i$$

$$\therefore \text{Parte imaginaria: } -24$$

9. Calcular $(ab)^2$ mínimo, si "a": imaginario puro y "b": real. A partir de:

$$a(2b - 2 + a) + b(a - 3) = -30i - 21$$

Resolución

Del problema se plantea:

"a" es imaginario puro $\Rightarrow a = ki$; $b \in \mathbb{R}$

$$\text{En el dato: } ki[2b - 2 + ki] + b(ki - 3) = -30i - 21$$

Efectuando:

$$(-k^2 - 3b) + (2bk - 2k + bk)i = -30i - 21$$

$$2bk - 2k + bk = -30 \quad \dots (I)$$

$$-k^2 - 3b = -21 \Rightarrow b = \frac{21 - k^2}{3} \quad \dots (II)$$

$$(II) \text{ en } (I): 2k\left(\frac{21 - k^2}{3}\right) - 2k + \left(\frac{21 - k^2}{3}\right)k = -30$$

$$k(21 - k^2) - 2k = -30 \Rightarrow k^3 - 19k - 30 = 0$$

Factorizando por divisores binómicos, para $k = -3$ se anula, luego tendrá un factor $(k + 3)$.

Luego por Ruffini:

$k = -3$	1	0	-19	-30
		-3	9	30
	1	-3	-10	0

$$(k + 3)(k^2 - 3k - 10) = 0 \Rightarrow (k + 3)(k - 5)(k + 2) = 0$$

$$\text{Si: } k = -3, a = -3i, b = 4$$

$$\text{Se pide: } (ab)^2 = [(-3i)(4)]^2 = -144$$

$$\text{Si: } k = 5$$

$$\text{En (I): } b = \frac{-4}{3} \Rightarrow a = 5i$$

$$\text{Luego: } (ab)^2 = \left(\frac{-4}{3} \times 5i\right)^2 \Rightarrow (ab)^2 = -44,44$$

$$\text{Si: } k = -2$$

$$\text{En (I): } b = \frac{17}{3} \Rightarrow a = -2i$$

$$(ab)^2 = -128,44$$

$$\therefore (ab)^2 \text{ mínimo será } -144$$

10. Calcular el número complejo que debe sumarse a $z = (1 - \sqrt{3}i)^4$ para que el residuo sea un complejo cuyo módulo sea 4 y su argumento 120° .

Resolución:

Sea z_1 el complejo pedido.

Por condición:

$$(1 - \sqrt{3}i)^4 + z_1 = 4\text{cis}120^\circ$$

$$(1 - 3 - 2\sqrt{3}i)^2 + z_1 = 4(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ)$$

$$(-2 - 2\sqrt{3}i)^2 + z_1 = 4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$4 - 12 + 8\sqrt{3}i + z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow z_1 = 6 - 6\sqrt{3}i$$

$$\text{Hallando su módulo: } \rho = \sqrt{6^2 + (6\sqrt{3})^2} = 12$$

$$\text{El argumento: } \tan \theta = -\sqrt{3} \Rightarrow \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore z_1 = 12e^{\frac{5\pi}{3}i}$$

11. Calcular el argumento de z_1, z_2 si:

$$z_1 = 1 - \cos 17^\circ + i\sin 17^\circ$$

$$z_2 = 1 + \cos 53^\circ + i\sin 53^\circ$$

Resolución:

$$\text{Sabemos que: } 1 + \cos 2a = 2\cos^2 a$$

$$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$$

$$\text{En: } z_1 = 2\sin^2 \frac{17^\circ}{2} + 2i\sin \frac{17^\circ}{2} \cos \frac{17^\circ}{2}$$

$$z_1 = 2\sin \frac{17^\circ}{2} \left(\sin \frac{17^\circ}{2} + i\cos \frac{17^\circ}{2} \right)$$

$$z_1 = 2\sin \frac{17^\circ}{2} \left(\cos \frac{163^\circ}{2} + i\sin \frac{163^\circ}{2} \right)$$

$$z_1 = 2\sin \frac{17^\circ}{2} \text{ cis } \frac{163^\circ}{2}$$

19. Si
- z_2
- es el conjugado de
- z_1
- , calcular
- m
- y
- n
- .

$$z_1 = (2 + m) + 3i; z_2 = 5 - (2 - n)i$$

Resolución:

$$\text{Como: } \bar{z}_1 = z_2 \rightarrow 5 - (2 - n)i = (2 + m) - 3i$$

De donde:

$$2 + m = 5 \Rightarrow m = 3$$

$$n - 2 = -3 \Rightarrow n = -1$$

20. Para que valor de
- m
- , la operación
- $\frac{2+mi}{3+i}$
- dará como resultado un número imaginario puro.

Resolución:

$$\begin{aligned} \frac{2+mi}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} &= \frac{6-2i+3mi-mi^2}{9-i^2} \\ &= \frac{(6+m) + (3m-2)i}{10} \end{aligned}$$

$$\text{Donde: } 6 + m = 0 \quad \therefore m = -6$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Simplificar:
- $z = \left(\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \right) \left(\frac{1+i \tan 2\alpha}{1-i \tan 2\alpha} \right)$
- e indicar
- $\frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)}$
- , si
- $\cos \alpha \neq 0$
- ,
- $\cos 2\alpha \neq 0$
- ,
- $\cos 6\alpha \neq 0$

Resolución:

$$z = \left(\frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \right) \left(\frac{1+i \tan 2\alpha}{1-i \tan 2\alpha} \right)$$

$$z = \left(\frac{1+i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1-i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} \right) \left(\frac{1+i \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{1-i \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}} \right)$$

$$z = \left(\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} \right) \left(\frac{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - i \sin 2\alpha} \right)$$

$$z = \left(\frac{\text{cis} \alpha}{\text{cis}(-\alpha)} \right) \left(\frac{\text{cis} 2\alpha}{\text{cis}(-2\alpha)} \right)$$

$$z = \text{cis}(2\alpha) \text{cis}(4\alpha) = \text{cis}(6\alpha)$$

$$\text{Luego: } \frac{\text{Im}(z)}{\text{Re}(z)} = \frac{\sin 6\alpha}{\cos 6\alpha} \quad \therefore \tan 6\alpha$$

2. Si
- $(a + bi)^n = r + si$
- ,
- $n \in \mathbb{Z}$
- ,
- $\{a, b; r, s\} \subset \mathbb{R}$
- , determinar:
- $E = \frac{(a^2 + b^2)^n}{r^2 + s^2}$

Resolución:Recuerde que: $s = z = w \Rightarrow |z| = |w|$

$$|z^n| = |z|^n; \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

$$(a + bi)^n = r + si \quad \wedge \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow |(a + bi)^n| = |r + si|$$

$$\Rightarrow |(a + bi)^n|^2 = |r + si|^2$$

$$\Rightarrow |(a + bi)^{2n}| = |r + si|^2$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)^n = r^2 + s^2$$

$$\therefore E = \frac{(a^2 + b^2)^n}{r^2 + s^2} = 1$$

3. Al graficar las raíces de la ecuación
- $z^{50} - 1 = i$
- en el plano complejo, hallar el número de raíces que se encuentran en el tercer cuadrante.

Resolución:

$$z^{50} - 1 = i \Rightarrow z^{50} = 1 + i$$

$$z = \sqrt[50]{1+i} = \sqrt[50]{\sqrt{2} \text{cis} \frac{\pi}{4}}$$

$$z = \sqrt[50]{\sqrt{2}} \text{cis} \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{50} \right)$$

Donde: $k = 0; 1; 2; \dots; 49$ El afijo de $z_1 \in \text{IIIC}$, si:

$$\pi < \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{50} < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 50 < \frac{1}{2} + 2k < 75$$

$$\Rightarrow \frac{49.5}{2} < k < \frac{74.5}{2} \Rightarrow k = 25; 26; 27; \dots; 37$$

Valores de k : $37 - 24 = 13$ $\therefore$ En el IIIC, hay 13 raíces.

4. Sabiendo que:
- $\frac{3^a i + 54}{3^b - (a + b)i} = 9i$
- , siendo "a" y "b" números reales no nulos. Calcular:
- $E = \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2$

Resolución:

$$\frac{3^a i + 54}{3^b - (a + b)i} = 9i; \quad a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\Rightarrow 3^a i + 54 = 9i[3^b - (a + b)i]$$

$$\Rightarrow 54 + 3^a i = 9(a + b) + 9i(3^b)$$

$$\Rightarrow 9(a + b) = 54 \quad \wedge \quad 3^a = 9(3^b)$$

$$\Rightarrow a + b = 6 \quad \wedge \quad a = b + 2$$

$$\text{De donde: } a = 4 \quad \wedge \quad b = 2$$

$$\text{Reemplazando: } E = \left(\sqrt{\frac{4}{2}} + \sqrt{\frac{2}{4}} \right)^2 = \left(\sqrt{2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right)^2$$

$$\Rightarrow E = 2 + 2\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2} \quad \therefore E = \frac{9}{2}$$

5. Si:
- $z = x + iy$
- ,
- $x \in \mathbb{R}$
- ,
- $y \neq 0$
- , además:
- $1 + z^2 \neq 0$
- . Hallar el modulo de
- z
- para que el número
- $w = \frac{z}{1 + z^2}$
- sea real.

Resolución:

Por propiedad:

$$\frac{a+bi}{c+di} \text{ es real} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$w = \frac{z}{1 + z^2} = \frac{x + yi}{1 + (x + yi)^2} = \frac{x + yi}{x^2 - y^2 + 1 + 2xyi}$$

$$w \text{ es real} = \frac{x}{x^2 - y^2 + 1} = \frac{y}{2xy} \quad \wedge \quad y \neq 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 = x^2 - y^2 + 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \quad \therefore |z| = 1$$

6. ¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $\forall z, w \in \mathbb{C}: \bar{z} = z \wedge (\bar{z} + \bar{w}) = \bar{z} + \bar{w}$

II. $\forall z, w \in \mathbb{C} - \{0\}: \left(\frac{z}{w}\right) = \frac{(\bar{z})}{\bar{w}}$

III. $|\bar{z} + 1| \leq 2|\bar{z}|$

IV. $\exists z \in \mathbb{C} / |z| = \bar{z}$

V. $\forall z \in \mathbb{C} / |\bar{z}| \geq |z| + 1$

Resolución:

I. $\forall z, w \in \mathbb{C}: \underbrace{\bar{z} = z}_F \wedge \underbrace{(\bar{z} + \bar{w}) = \bar{z} + \bar{w}}_V$

($\bar{z} = z \iff z$ es real).

La proposición es falsa.

(F)

II. $\forall z, w \in \mathbb{C} - \{0\}: \left(\frac{z}{w}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

No es cierto, porque $z \neq \bar{z}$

(F)

III. $\forall z \in \mathbb{C}$, no necesariamente:

$|\bar{z} + 1| \leq 2|\bar{z}|$; porque $\forall z = (x; y)$

$|\bar{z} + 1|^2 \leq 4|\bar{z}|^2 \Rightarrow (x+1)^2 + (-y)^2 \leq 4(x^2 + y^2)$
 $\Rightarrow 3x^2 - 2x - 1 + 3y^2 \geq 0$

Esta desigualdad no es cierta $\forall xy \in \mathbb{R}$

(F)

IV. $\exists z \in \mathbb{C} / |z| = \bar{z}$

Es cierto, para $z = (x; 0)$, $\forall x \geq 0$

(V)

V. $\forall z \in \mathbb{C} / |\bar{z}| \geq |z| + 1$, es falso pues:

$|\bar{z}| = |z|$ y por tanto $0 \geq 1$ es absurdo.

(F)

$\therefore$ Solo IV es verdadera.

7. Determinar el menor número natural n de 2 cifras para el cual $(i - \sqrt{3})^n$ es imaginario puro.

Resolución:

$z = (i - \sqrt{3})^n = \left(2\text{cis}\frac{5\pi}{6}\right)^n$

$z = 2^n \text{cis}\frac{5n\pi}{6}$

z es imaginario puro si y solo si:

$\frac{5n\pi}{6} = k\frac{\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{N} \wedge k \text{ impar}$

$\Rightarrow n = \frac{3k}{5}$, además: $10 \leq n \leq 99$

$\Rightarrow 10 \leq \frac{3k}{5} \leq 99 \Rightarrow \frac{50}{3} \leq k \leq 165$

Como n es el menor natural, entonces k es el menor impar $\wedge k = 5$

$\Rightarrow k = 25 \therefore n = \frac{3(25)}{5} = 15$

8. Dado el número complejo: $z = \frac{(3+3i)(\sqrt{3}-3i)}{-1-\sqrt{3}i}$, expresar z en su forma exponencial.

Resolución:

De: $z = \frac{(3+3i)(\sqrt{3}-3i)}{-1-\sqrt{3}i}$

Expresando en forma exponencial cada complejo:

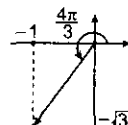
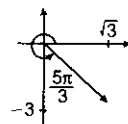
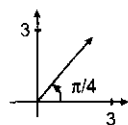
$\bullet \quad 3 + 3i = 3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

$\bullet \quad \sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{3}}$

$\bullet \quad -1 - \sqrt{3}i = 2e^{\frac{4\pi}{3}}$

$\Rightarrow z = \frac{(3\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})(2\sqrt{3}e^{\frac{5\pi}{3}})}{2e^{\frac{4\pi}{3}}}$

$\Rightarrow z = 3\sqrt{6}e^{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}\right)} \therefore z = 3\sqrt{6}e^{\frac{7\pi}{12}}$



9. Determinar $x \in \mathbb{R}^+$, tal que: $\text{Im}\left(\frac{1+xi}{x+2i}\right) = \frac{1}{2}$

Resolución:

$\frac{1+xi}{x+2i} = \frac{(1+xi)(x-2i)}{(x+2i)(x-2i)}$
 $= \frac{3x}{x^2+4} + \frac{(x^2-2)}{(x^2+4)}i$

$\text{Im} = \left(\frac{1+xi}{x+2i}\right) = \frac{x^2-2}{x^2+4} = \frac{1}{2} \wedge x \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow 2x^2 - 4 = x^2 + 4 \Rightarrow x^2 = 8 \therefore x = 2\sqrt{2}$

10. Determinar la gráfica del conjunto:

$A = \{z \in \mathbb{C} / |\text{Im}(z)| \geq |\text{Re}(z) - 1|\}$

Resolución:

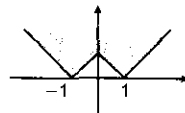
Sea: $z = x + yi$

En A : $|y| \geq |x - 1|$

Analicemos:

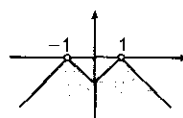
$\bullet \quad \text{Si: } y \geq 0 \Rightarrow y \geq |x - 1|$

Gráfico:

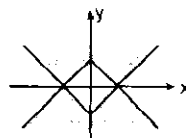


$\bullet \quad \text{Si: } y < 0 \Rightarrow -y \geq |x - 1|$
 o también: $y \leq -|x - 1|$

Gráfico:



$\therefore$ Finalmente la unión de las gráficas nos reproduce la gráfica de A .



11. Determinar la gráfica del conjunto:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re}(z)| + \operatorname{Re}(\bar{z}) - |\operatorname{Im}(z)| \geq 1\}$$

Resolución:Sea: $z = x + yi$

$$\text{En } A: |x| + x - |y| \geq 1$$

$$\bullet \text{ Si } y \geq 0 \Rightarrow |x| + x - y \geq 1 \quad \dots(1)$$

$$\text{o también: } y \leq |x| + x - 1$$

$$\text{Aquí: } x \geq 0 \Rightarrow y \leq 2x - 1$$

Pero no olvide que: $y \geq 0$

Gráfico:

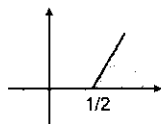


Gráfico (α)

$$\text{Ahora: } x < 0 \Rightarrow y \leq -1$$

Pero como: $y \geq 0$ En este caso no existen $z \in A$

$$\bullet \text{ Si: } y < 0 \Rightarrow |x| + x + y \geq 1 \quad \dots(2)$$

$$\Rightarrow y \geq 1 - x - |x|$$

$$\text{Aquí: } x \geq 0 \Rightarrow y \geq 1 - 2x$$

Pero no olvide que: $y < 0$

Gráfico:

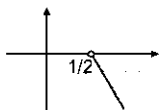
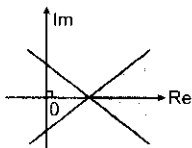


Gráfico (β)

$$\text{Ahora: } x < 0 \Rightarrow y \geq 1$$

Pero como: $y < 0$ En este caso no existen $z \in A$

Finalmente la unión de los gráficos (α) y (β) nos reproduce la grafica de A.



12. Dado los números complejos:

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}, \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i. \text{ Determinar } \frac{z_1}{z_2}$$

Resolución:

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$\Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2e^{(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3})i} = 2e^{0i}$$

$$\therefore \frac{z_1}{z_2} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

13. Calcular:

$$E = \frac{\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}\right)^{60} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)^{120}}{\left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + i \cos \frac{\pi}{4}\right)^{50} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi}{8} + i \cos \frac{\pi}{8}\right)^{40}}$$

Resolución:

$$\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cis} \alpha$$

$$\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{cis}(-\alpha)$$

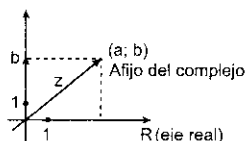
$$\Rightarrow E = \frac{\left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right)^{60} \left[\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{120}}{\left[i\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}\right)\right]^{60} \left[i\left(\cos \frac{\pi}{8} - i \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}\right)\right]^{40}}$$

$$E = \frac{\left(\operatorname{cis} \frac{\pi}{3}\right)^{60} \left[\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{120}}{i^{60} \left[\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{60} i^{40} \left[\operatorname{cis}\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right]^{40}}$$

$$E = \frac{(\operatorname{cis} 20\pi) [\operatorname{cis}(-30\pi)]}{[\operatorname{cis}(-15\pi)] [\operatorname{cis}(-5\pi)]}$$

$$E = \frac{\operatorname{cis}(-10\pi)}{\operatorname{cis}(-20\pi)} = \operatorname{cis}(-10\pi - (-20\pi))$$

$$\therefore E = \operatorname{cis} 10\pi = \operatorname{cis} 0 = 1$$

14. Si la gráfica del número complejo $z = \frac{1+ai}{1-ai}$, $a \in \mathbb{R}$ es la que se muestra en la figura.

Determinar el valor de "a".

Resolución:

$$\text{De la gráfica: } z = \frac{1+ai}{1-ai} = qi$$

$$\text{Donde: } q > 0 \Rightarrow 1+ai = qi(1-ai)$$

$$\Rightarrow 1+ai = aq + qi$$

$$\Rightarrow aq = 1 \wedge a = q \quad (a > 0)$$

$$\Rightarrow a^2 = 1 \quad \therefore a = 1$$

15. Reducir el siguiente número complejo:

$$z = \frac{\sqrt{3+2a} + i\sqrt{3-2a}}{\sqrt{3+2a} - i\sqrt{3-2a}} - \frac{\sqrt{3-2a} + i\sqrt{3+2a}}{\sqrt{3-2a} - i\sqrt{3+2a}}$$

$$\text{donde: } -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

Resolución:

$$\text{Sea: } x = \sqrt{3+2a} \wedge y = \sqrt{3-2a}$$

Entonces, el complejo queda así:

$$z = \frac{x+yi}{x-yi} - \frac{y+xi}{y-xi}$$

$$z = \frac{(x+yi)^2}{(x-yi)(x+yi)} - \frac{(y+xi)^2}{(y-xi)(y+xi)}$$

$$z = \frac{(x+yi)^2}{x^2+y^2} - \frac{i^2(x-yi)^2}{x^2+y^2}$$

$$z = \frac{(x+yi)^2 + (x-yi)^2}{x^2+y^2} = \frac{2[x^2 + (yi)^2]}{x^2+y^2}$$

$$z = \frac{2(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Pero: } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3+2a}}{\sqrt{3-2a}} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{3+2a}{3-2a}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \frac{(3+2a) - (3-2a)}{(3+2a) + (3-2a)} = \frac{4a}{6} \quad \therefore z = \frac{2a}{3}$$

16. Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que cumple:

$$|z + z_0| \leq a, \text{ donde } z_0 = (a; a), a \in \mathbb{R}^+$$

Determinar el argumento de z cuya distancia a la recta vertical que pasa por $x = -3a$ sea mínima.

Resolución:

$$\text{Sea: } z = (x; y) \in \mathbb{C}; z_0 = (a; a)$$

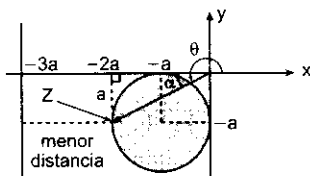
Luego, en el dato:

$$|(x; y) + (a; a)| \leq a; \quad a \in \mathbb{R}^+$$

$$|(x+a; y+a)| \leq a$$

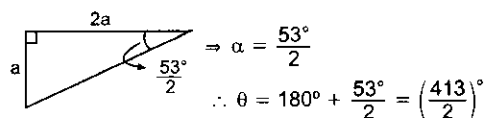
$$\Rightarrow (x+a)^2 + (y+a)^2 \leq a^2$$

Grificando:

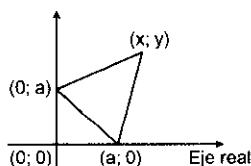


El argumento del z buscado es: $\theta = 180^\circ + \alpha$

Cálculo de α (triángulo notable):



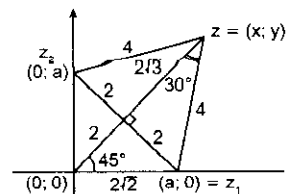
17. Se sabe que los afijos de tres números complejos son los vértices de un triángulo equilátero de lado igual a 4 m, como se muestra en la figura adjunta. Determinar el producto de estos tres números complejos.



Resolución:

$$\text{Observar: } z = (2 + 2\sqrt{3}) \left(\frac{\cos 45^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i \frac{\sin 45^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

$$z = 2(1 + \sqrt{3}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$$



$$\Rightarrow z = (\sqrt{6} + \sqrt{2})(1 + i)$$

$$\text{Además: } z_1 = 2\sqrt{2} \wedge z_2 = 2\sqrt{2}i$$

$$\text{Luego: } z_1 z_2 z = 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}i \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})(1 + i)$$

$$\therefore z_1 z_2 z = 8(\sqrt{6} + \sqrt{2})(-1 + i)$$

18. Sea: $|z|^2 = 3\text{Re}(z)$, determinar: $|z - 3/2|$

Resolución:

$$\text{Sea: } z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\text{En el dato: } |z|^2 = 3\text{Re}(z) \Rightarrow a^2 + b^2 = 3a$$

Nos piden:

$$\left| z - \frac{3}{2} \right| = \left| a + bi - \frac{3}{2} \right| = \left| \left(a - \frac{3}{2} \right) + bi \right|$$

$$\left| z - \frac{3}{2} \right| = \sqrt{\left(a - \frac{3}{2} \right)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 - 3a + \frac{9}{4} + b^2}$$

$$\therefore \left| z - \frac{3}{2} \right| = \sqrt{3a - 3a + \frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

19. Determinar el módulo del complejo: $z = (1 + e^{\frac{\pi i}{8}})^2$

Resolución:

$$\text{Sea: } w = 1 + e^{\frac{\pi i}{8}} = 1 + \text{cis } \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow w = \boxed{1 + \cos \frac{\pi}{8}} + i \boxed{\sin \frac{\pi}{8}}$$

$$w = 2\cos^2 \frac{\pi}{16} + i 2\sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}$$

$$w = \frac{2\cos \frac{\pi}{16}}{|w|} \left(\cos \frac{\pi}{16} + i \sin \frac{\pi}{16} \right) = \frac{2\cos \frac{\pi}{16}}{|w|} \text{cis } \frac{\pi}{16}$$

$$\text{Observar: } |w| = 2\cos \frac{\pi}{16}$$

$$\text{Pero: } |z| = |w^2| = |w|^2$$

$$\therefore |z| = 4\cos^2 \frac{\pi}{16}$$

20. Dado los números complejos:

$$z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \text{ determinar el módulo de } \frac{z_1}{z_2}$$

Resolución:

$$\text{Nos piden: } \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$$|z_1| = 2$$

$$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow |z_2| = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2} = 1$$

$$\therefore \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{2}{1} = 2$$

21. Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que: $z = \frac{(2; 3)(-1; 2)}{(3; -1)(2; 0)} (1; -1)^{28}$. De-

terminar el complejo equivalente de z .

Resolución:

$$z = \frac{(2; 3)(-1; 2)}{(3; -1)(2; 0)} (1; -1)^{28}$$

$$z = \frac{(2 + 3i)(-1 - 2i)}{(3 - i)(2)} (1 - i)^{28}$$

$$z = \frac{(-2 - 4i - 3i + 6)(3 + i)}{2(3 - i)(3 + i)} [(1 - i)^4]^7$$

$$z = \frac{(4 - 7i)(3 + i)}{2(10)} (-4)^7$$

Observar que: $(1-i)^4 = -4$

$$z = \frac{(12 - 21i + 4i + 7)}{20} (-4)^7$$

$$z = -\frac{19 - 17i}{20} (2)^{14} = -\frac{19 - 17i}{10} (2)^{13}$$

$$\therefore z = \left(-\frac{19}{10} + \frac{17}{10}i\right) (2)^{13}$$

22. Sean z_1 y z_2 dos números complejos, tales que: $2|z_1| = |\bar{z}_2| = 2$, además: $\arg(z_1 z_2) = \frac{5}{6}\pi$ y $\arg(z_1/z_2) = \frac{\pi}{2}$. Determinar el área del triángulo formado en el plano complejo por z_1 , z_2 y el origen de coordenadas.

Resolución:

Del dato: $2|z_1| = |\bar{z}_2| = 2$

$$\Rightarrow |z_1| = 1 \wedge |z_2| = 2$$

$$\arg(z_1 z_2) = \frac{5\pi}{6} \wedge \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

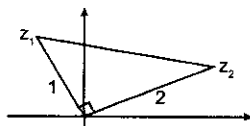
Por propiedad:

$$\arg(z_1) + \arg(z_2) = \frac{5\pi}{6} \wedge \arg(z_1) - \arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{De donde: } \arg(z_1) = \frac{2\pi}{3} \wedge \arg(z_2) = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Luego: } z_1 = \text{cis } \frac{2\pi}{3} \wedge z_2 = 2\text{cis } \frac{\pi}{6}$$

Graficando:



$$\therefore A = \frac{1 \times 2}{2} = 1$$

23. Efectuar: $z = 1 + (11 + 2i)^{17} + (1 + 2i)^{51}$

Resolución:

De la expresión: $z = 1 + (11 + 2i)^{17} + (1 + 2i)^{51}$

Como: $(1 + 2i)^{51} = [(1 + 2i)^3]^{17}$

$$(1 + 2i)^{51} = (1 + 3(2i) + 3(2i)^2 + (2i)^3)^{17}$$

$$(1 + 2i)^{51} = (1 + 6i - 12 - 8i)^{17}$$

$$(1 + 2i)^{51} = (-11 - 2i)^{17} = -(11 + 2i)^{17}$$

$$\therefore z = 1 + (11 + 2i)^{17} - (11 + 2i)^{17} = 1$$

24. Si $|\bar{z}| = 4$ y $\arg[z(1+i)] = \frac{\pi}{2}$, hallar el número complejo z en su forma polar.

Resolución:

$$|\bar{z}| = 4 \Rightarrow |\bar{z}||i| = 4 \Rightarrow |z| = 4$$

$$\arg(z(1+i)) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg(z) + \arg(1+i) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \arg(z) + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z = 4\text{cis } \frac{\pi}{4}$$

25. Sea: $z = \left(\frac{725 + 47i}{47 - 725i}\right)^{25} + \left(\frac{41 + 28i}{28i - 41i}\right)^{32} - 1$

determinar: $|(z+1)(\bar{z}+i)|$

Resolución

Notar que: $\frac{a+bi}{b-ai} = \frac{i(b-ai)}{b-ai} = i$

$$z = \left(\frac{725 + 47i}{47 - 725i}\right)^{25} + \left(\frac{41 + 28i}{28i - 41i}\right)^{32} - 1$$

$$\Rightarrow z = (i)^{25} + (i)^{32} - 1 = i + 1 - 1 = i$$

$$\text{Luego: } |(z+1)(\bar{z}+i)| = |z+1||\bar{z}+i|$$

$$\therefore |1+i||\bar{i}| = 2\sqrt{2}$$

26. Resolver la ecuación: $w^2 = 8 - 6i$, dar como respuesta el producto de los módulos de las raíces.

Resolución:

La ecuación: $w^2 = 8 - 6i$, tiene dos raíces w_1 y w_2 , donde:

$$w_1^2 = 8 - 6i = w_2^2 \wedge w_2 = -w_1$$

$$\text{Se pide: } |w_1||w_2| = |w_1||-w_1|$$

$$= |w_1||w_1| = |w_1|^2 = |8 - 6i|$$

$$\therefore |w_1||w_2| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = 10$$

27. Si 45° es el argumento del complejo: $a \in \mathbb{R}$, $z = (1-a)\sqrt{1+i} + a(1+i)$, hallar su módulo.

Resolución:

Por condición:

$$(1-a)\sqrt{1+i} + a(1+i) = r\text{cis } \frac{\pi}{4}$$

$$(1-a)\sqrt{1+i} + a + ai = \frac{\sqrt{2}}{2}r + \frac{\sqrt{2}}{2}ri$$

$$(1-a)\sqrt{1+i} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r - a\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}r - a\right)i$$

Elevamos al cuadrado:

$$(1-a)^2 + (1-a)^2 i^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r - a\right)^2 i^2$$

$$\text{De aquí: } \bullet (1-a)^2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\bullet (1-a)^2 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r - a\right)^2$$

$$\Rightarrow 0 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}r - 1\right)^2 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}r = 1 \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore r = |z| = \sqrt{2}$$

28. Si $z = 2e^{\frac{2\pi}{3}}$, determinar un complejo w que satisfaga la condición: $|z| = |z+w| = |w|$

Resolución:

$$z = 2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i\text{sen } \frac{2\pi}{3}\right); |z| = 2$$

$$\Rightarrow z = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow z = -1 + \sqrt{3}i$$

Luego, si $w = a + bi$

De la condición:

$$2 = \sqrt{(-1+a)^2 + (\sqrt{3}+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Tenemos:

$$\bullet \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \quad \dots(1)$$

$$\bullet \sqrt{(-1+a)^2 + (\sqrt{3}+b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow a - \sqrt{3}b = 2 \Rightarrow a = 2 + \sqrt{3}b \quad \dots(2)$$

$$(2) \text{ en } (1): (2 + \sqrt{3}b)^2 + b^2 = 4$$

34. Determinar si es falso (F) o verdadero (V) las siguientes proposiciones respecto al número complejo:

$$z = (1 - \sqrt{3})^8 (1 - \sqrt{2})^3 e^{\frac{\pi}{4}} e^{5 + \frac{\pi}{3}}$$

I. $|z| = (1 - \sqrt{3})^8 (-\sqrt{2})^3$

II. Su argumento principal es $\frac{4\pi}{3}$

III. Su argumento es $\frac{7\pi}{12}$

IV. Su argumento es $\frac{16\pi}{3}$

Resolución:

$$z = (1 - \sqrt{3})^8 (1 - \sqrt{2})^3 e^{\frac{\pi}{4}} e^{5 + \frac{\pi}{3}}$$

Se puede escribir así:

$$z = \underbrace{[(1 - \sqrt{3})^8 (1 - \sqrt{2})^3 e^{\frac{\pi}{4}} e^5]}_{\text{n.º negativo}} e^{\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow z = [\text{n.º negativo}] \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

- "z" no está expresado en forma polar, para ello, el número dentro del corchete debe ser positivo (éste sería el módulo de z). Por tanto el signo debe ser absorbido por la expresión entre paréntesis, así:

$$\begin{aligned} z &= [\text{n.º positivo}] \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) (-1) \\ &= [\text{n.º positivo}] \left(\cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\text{Pues: } -1 = \cos \pi + i \sin \pi$$

- $z = [\text{n.º positivo}] \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right)$

Luego:

$$|z| = (1 - \sqrt{3})^8 (1 - \sqrt{2})^3 e^5 = \text{n.º positivo}$$

$$\arg(z) = \frac{4\pi}{3}$$

∴ (I) es F; (II) es V; (III) es F; (IV) es F.

35. Hallar el argumento del complejo: $z = i^{\frac{1}{3}}$, siendo w una raíz cúbica no real de la unidad.

Resolución:

$$\text{Dato: } w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ o } w = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Rightarrow z = i^{-\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = i^{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{De aquí, se puede escribir: } z = i^{\frac{1}{2}} (i^{\frac{\sqrt{3}}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

Por Euler: $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$; $\forall \theta$ en rad.

$$\text{Si: } \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}i} = \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_0 + i \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_1 \Rightarrow e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

$$\text{Elevando a la i, tenemos: } (e^{\frac{\pi}{2}i})^i = i^i \Rightarrow i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{En } z: z = i^{\frac{1}{2}} (e^{\frac{\pi}{2}i})^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \text{ o } z = e^{\frac{\pm \sqrt{3}}{4}i} (e^{\frac{\pi}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow z = e^{\pm \frac{\sqrt{3}}{4}i} e^{\frac{\pi}{4}} \quad \therefore \arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

36. Calcular un valor de: $\sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}i^{11}\sqrt{1-i}} - \sqrt{2^9i}}$

Resolución:

Transformando de adentro hacia afuera; teniendo presente que $i < i^9$

$$\text{Reemplazando: } \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}i^{11}\sqrt{1-i}} - \sqrt{2^9i}} \quad (2i) = (1+i)^2$$

$$= \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}i^{11}\sqrt{1-i}} - \sqrt{(1+i)^2}}$$

$$= \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}i^{11}\sqrt{1-i}} - i}; \text{ pero: } -i < i^{11}$$

$$= \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}i^{11}\sqrt{1-i}} - i} = \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}i^{11}}}; \text{ pero: } i^2 < i^{10}$$

$$= \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}i^{11}}} = \sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}i^2}}$$

$$= \sqrt[3]{-2\sqrt{(1-i)^2}} = \sqrt[3]{-2+2i}$$

$$\text{Pero: } -2+2i = (1+i)^3$$

∴ Reemplazando nos queda: $1+i$

37. Si: $T = \left[\frac{1 + \sqrt[n]{1}}{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \right]^{np}$ y $k = 0; 1; 2; \dots; (n-1)$

calcular: $|T|$

Resolución:

Calculemos las raíces enésimas de 1, así:

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

Por condición: $k = 0; 1; 2; \dots; (n-1)$

De aquí:

$$1 + \sqrt[n]{1} = 1 + \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$1 + \sqrt[n]{1} = 2 \cos^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \times 2 \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt[n]{1} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \left[\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right]$$

Reemplazando en T:

$$T = \left[\cos \frac{k\pi}{n} + i \sin \frac{k\pi}{n} \right]^{np}$$

$$\text{Por Moivre: } T = 1[\cos(kp\pi) + i \sin(kp\pi)]$$

$$\therefore |T| = 1$$

38. Dado un complejo z, tal que: $\text{Re}(z) \neq \text{Im}(z)$

$$\wedge \arg(z) \neq \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Calcular el resultado de efectuar: } P = \frac{2\bar{z}^2 + |z|^2}{z^2 + 2|z|^2}$$

sabiendo que es un imaginario puro.

Resolución:

$$\text{Sea: } z = a + bi / a \neq b; ab \neq 0$$

$$\text{Sabemos que: } |z|^2 = z\bar{z}$$

$$\Rightarrow P = \frac{2\bar{z}^2 + |z|^2}{z^2 + 2|z|^2} = \frac{2\bar{z}^2 + z \times \bar{z}}{z^2 + 2z\bar{z}} \Rightarrow P = \frac{\bar{z}(2\bar{z} + z)}{z(z + 2\bar{z})} = \frac{\bar{z}}{z}$$

Es decir: $P = \frac{a-bi}{a+bi} = n^\circ$ imaginario puro (dato)

Tener en cuenta que:

Si: $P = \frac{a-bi}{c+di} = n^\circ$ imaginario puro

Entonces se cumple que: $ac + bd = 0$

En nuestro caso:

$$a(a) + b(-b) = 0 \Rightarrow (a+b)(a-b) = 0$$

De aquí: $a = -b \vee a = b$, pero $a \neq b$

$$\text{En } P: P = \frac{-b-bi}{-b+bi} = \frac{-b(1+i)}{-b(1-i)} \quad \therefore P = i$$

39. Determinar la gráfica de:

$$H = \{z \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)| \leq 2 \wedge 0 \leq \arg(z) \leq \pi/2\}$$

Resolución:

Sea: $z = x + yi \Rightarrow |x + y| \leq 2$ (dato)

De aquí: $-2 \leq x + y \leq 2$

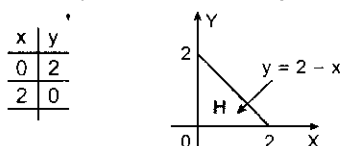
Como: $0 \leq \arg(z) < \pi/2 \Rightarrow x$ e y son positivos

Es decir: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Entonces: $0 \leq x + y \leq 2$

De donde: $y \leq 2 - x$

La gráfica de H será la región (incluido el contorno) determinada por las rectas: $x = 0$, $y = 0$, $y = 2 - x$.



40. Si: $|z + w| = |z - w|$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$, hallar: $\operatorname{Re}(zw)$

Resolución:

Como: $|z|^2 = z\bar{z}$

De la condición: $|z + w| = |z - w|$

Elevando al cuadrado: $|z + w|^2 = |z - w|^2$

De aquí: $(z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = (z - w)(\bar{z} - \bar{w})$

$$(z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = (z - w)(\bar{z} - \bar{w})$$

$$z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = z\bar{z} - z\bar{w} - \bar{z}w + w\bar{w}$$

Transponiendo términos nos queda:

$$2(z\bar{w} + \bar{z}w) = 0 \Rightarrow \bar{z}w + \bar{z}w = 0$$

Pero: $\bar{z}w = \overline{zw} \Rightarrow \bar{z}w + \overline{zw} = 0$

$$2\operatorname{Re}(zw) = 0$$

$\therefore \operatorname{Re}(zw) = 0$

41. Reducir el siguiente número complejo:

$$z = \frac{\sqrt{3+2a} + i\sqrt{3-2a}}{\sqrt{3+2a} - i\sqrt{3-2a}} - \frac{\sqrt{3-2a} + i\sqrt{3+2a}}{\sqrt{3+2a} - i\sqrt{3-2a}}$$

donde: $-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$

Resolución:

Sea: $\sqrt{3+2a} = m \wedge \sqrt{3-2a} = n$

Multiplicamos y dividimos por i , la segunda fracción:

$$\Rightarrow z = \frac{m+ni}{m-ni} - \frac{(n+mi)}{(n-mi)} \times \frac{i}{i} \Rightarrow z = \frac{m+ni}{m-ni} + \frac{m-ni}{m+ni}$$

$$\Rightarrow z = \frac{(m+ni)^2 + (m-ni)^2}{m^2 - (ni)^2} = \frac{2(m^2 + n^2 i^2)}{m^2 + n^2}$$

$$\Rightarrow z = \frac{2(m^2 - n^2)}{m^2 + n^2}$$

Pero: $m^2 = 3 + 2a \wedge n^2 = 3 - 2a$

$$\text{Luego: } z = \frac{2(4a)}{6} \quad \therefore z = \frac{4a}{3}$$

42. Dar el valor real de: $E = \sqrt[3]{\frac{25(2-i)}{3+4i}} - i$

Resolución:

$$\text{Del dato: } E + i = \sqrt[3]{\frac{25(2-i)}{3+4i}}$$

Elevando al cubo:

$$(E + i)^3 = \frac{25(2-i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{25(2-i)(3-4i)}{(9-16i^2)} \Rightarrow 25$$

$$(E + i)^3 = 6 - 8i - 3i - 4$$

$$E^3 + 3E^2i - 3E - i = 2 - 11i$$

$$(E^3 - 3E) + (3E^2 - 1)i = 2 - 11i$$

Igualando:

$$\bullet E^3 - 3E = 2 \Rightarrow E^3 - 3E - 2 = 0$$

$$\Rightarrow E = 2 \quad \dots (1)$$

$$\bullet 3E^2 - 1 = -11 \Rightarrow E^2 = \frac{10i}{3}$$

$$\Rightarrow E = \sqrt{\frac{10}{3}}i \quad \dots (2)$$

$\therefore$ De (1) y (2) la única solución real es 2.

43. ¿Cuál es el número complejo, que su inverso es igual a su conjugado e igual a su opuesto?

Resolución:

Sea el número complejo: $z = x + yi$

$$\text{Dato: } \frac{1}{z} = \bar{z} = z' \Rightarrow \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{-x-yi}{(3)} \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

$$(2) = (3): x - yi = -x - yi$$

$$x = -x \Rightarrow x = 0$$

$$(1) = (2): \frac{1}{x+yi} = \frac{x}{0} - yi \Rightarrow \frac{1}{yi} = -yi$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\text{Luego: } z = 0 + (\pm 1)i \quad \therefore z = \pm i$$

44. Si el producto del complejo: $(a + bi)$ por el opuesto del conjugado del conjugado de dicho imaginario, es imaginario puro y vale $-2i$, determinar la forma polar de dicho complejo $(a + bi)$, ($a > 0$)

Resolución:

El opuesto del conjugado del conjugado de:

$(a + bi)$ es: $(-a - bi)$

$$\text{Luego: } \frac{(a+bi)[- (a+bi)]}{(a+bi)^2} = -2i$$

Como: $a > 0 \Rightarrow a = 1; b = 1$

Entonces: $(1 + i) = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

$$\therefore (1 + i) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

45. Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que se cumple: $|z + z_0| \leq a$, donde $z_0 = (a; a)$, $a \in \mathbb{R}^+$. Determine el argumento de z cuya distancia a la recta vertical que pasa por $x = -3a$ sea la mínima.

Resolución:

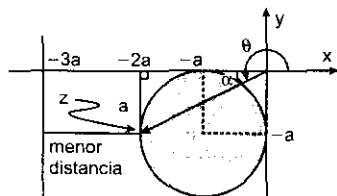
Sea $z = (x; y) \in \mathbb{C}$; $z_0 = (a; a)$

Luego, en el dato:

$$|(x; y) + (a; a)| \leq a; a \in \mathbb{R}^+$$

$$|(x + a; y + a)| \leq a \Rightarrow (x + a)^2 + (y + a)^2 \leq a^2$$

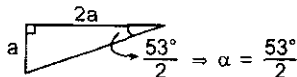
Grificando:



Observar que el argumento del z buscado es:

$$\theta = 180^\circ + \alpha$$

Cálculo de α (triángulo notable):



$$\therefore \theta = 180^\circ + \frac{53^\circ}{2} = \left(\frac{413}{2} \right)^\circ$$

46. Probar que el número complejo $\sqrt[3]{4} - 2i$ es la raíz de $P(z) = 0$, siendo $P(z)$ un polinomio de coeficientes enteros.

Resolución:

$$\text{Sea: } z = \sqrt[3]{4} - 2i \text{ o } z + 2i = \sqrt[3]{4}$$

Elevando al cubo:

$$z^3 + 3z^2(2i) + 3z(2i)^2 + (2i)^3 = 4$$

$$\Rightarrow z^3 - 12z - 4 = i(8 - 6z^2)$$

Elevando al cuadrado:

$$P(z) = z^6 + 12z^4 - 8z^3 + 48z^2 + 96z + 80 = 0$$

que es una ecuación polinomial que tiene a

$z = \sqrt[3]{4} - 2i$ como una raíz.

47. Determine el módulo del complejo: $z = (1 + e^{\frac{\pi i}{8}})^2$

Resolución:

$$\text{Sea: } w = 1 + e^{\frac{\pi i}{8}} = 1 + \operatorname{cis} \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow w = 1 \cos \frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow w = 2 \cos^2 \frac{\pi}{16} + 2i \operatorname{sen} \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16}$$

$$\Rightarrow w = \frac{2 \cos \frac{\pi}{16} (\cos \frac{\pi}{16} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{16})}{|w| \operatorname{cis} \frac{\pi}{16}}$$

$$\text{Observar: } |w| = 2 \cos \frac{\pi}{16}$$

$$\text{Pero: } |z| = |w|^2 \text{ o } |z| = |w|^2$$

$$\therefore |z| = 4 \cos^2 \frac{\pi}{16}$$

48. Calcular: $z = \frac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}$, n es entero positivo.

Resolución:

$$\text{Como: } 1 + i = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \text{ y } 1 - i = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$\Rightarrow z = \frac{(\sqrt{2} e^{i\pi/4})^n}{(\sqrt{2} e^{-i\pi/4})^{n-2}} = (\sqrt{2})^2 (e^{i\pi/4 + \pi/4})^{n-2} (e^{i\pi/4})^2$$

$$\Rightarrow z = 2(e^{i\pi/2})^{n-2} e^{i\pi/2} = 2i^{n-2} i = 2i^{n-1}, \text{ pues: } e^{i\pi/2} = i$$

$$\therefore z = 2i^{n-1}$$

49. Si $w \neq 1$ es una raíz enésima de la unidad, calcular la suma: $S = 1 + 4w + 9w^2 + \dots + n^2 w^{n-1}$

Resolución:

Nos piden:

$$S = 1 + 4w + 9w^2 + 16w^3 + \dots + n^2 w^{n-1} \dots (\alpha)$$

Multiplicamos por w ambos miembros:

$$wS = w + 4w^2 + 9w^3 + \dots + (n-1)^2 w^{n-1} + n^2 w^n \dots (\beta)$$

Restamos $(\alpha) - (\beta)$:

$$S(1-w) = 1 + 3w + 5w^2 + 7w^3 + \dots + (2n-1)w^{n-1} - n^2 w^n \dots (\gamma)$$

calculamos por separado E

Sea:

$$E = 1 + 3w + 5w^2 + 7w^3 + \dots + (2n-1)w^{n-1} \dots (1)$$

Multiplicamos por w ambos miembros:

$$wE = w + 3w^2 + 5w^3 + \dots + (2n-3)w^{n-1} + (2n-1)w^n \dots (2)$$

Restamos $(1) - (2)$:

$$E(1-w) = 1 + 2w + 2w^2 + 2w^3 + \dots + 2w^{n-1} - (2n-1)w^n$$

$$E(1-w) = 1 + 2w(1 + w + w^2 + \dots + w^{n-2}) - (2n-1)w^n$$

$$E(1-w) = 1 + 2w \left[\frac{1-w^{n-1}}{1-w} \right] - (2n-1)w^n$$

$$E(1-w) = 1 + \frac{2(w-w^n)}{1-w} - (2n-1)w^n$$

No olvide que: si w es una raíz enésima de 1 $\Rightarrow w^n = 1$

$$\text{Luego: } E(1-w) = 1 + 2 \frac{(w-1)}{1-w} - (2n-1)$$

$$\Rightarrow E(1-w) = 1 - 2 - 2n + 1 \Rightarrow E = \frac{-2n}{1-w}$$

$$\text{Reemplazando E en } (\gamma): S(1-w) = \frac{-2n}{1-w} - n^2$$

$$\Rightarrow S = \frac{-2n - n^2(1-w)}{(1-w)^2} \therefore S = \frac{n^2(w-1) - 2n}{(1-w)^2}$$

50. Hallar la suma de los números complejos en la expresión A:

$$A = (1 + i) + (2 + i^2) + (3 + i^3) + (4 + i^4) + \dots + (4n + i^{4n})$$

Resolución:

Sumando separadamente:

$$A = (1 + 2 + 3 + \dots + 4n) + (i + i^2 + i^3 + \dots + i^{4n})$$

Por separado:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + 4n = 2n(4n + 1)$$

Consideremos:

$$S_2 = \underbrace{i + i^2 + i^3 + i^4}_{=0} + \underbrace{(i^5 + \dots + i^8)}_{=0} + \dots + \underbrace{(i^{4n-3} + i^{4n-2} + i^{4n-1} + i^{4n})}_{=0}$$

Es claro que: $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

$$\Rightarrow i^5 + i^6 + i^7 + i^8 = i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) = 0$$

$$\Rightarrow i^{4n-4}(i + i^2 + i^3 + i^4) = 0, \text{ por lo tanto: } S_2 = 0$$

$$\text{Finalmente: } A = S_1 + S_2 \quad \therefore A = 2n(4n + 1)$$

51. Hallar los $z \in \mathbb{C}$, tal que sea conjugado con su cuadrado.

Resolución:

$$\text{Sea: } z = re^{i\theta} \Rightarrow \bar{z} = re^{-i\theta} \text{ y } |z| = |\bar{z}| = r$$

$$\text{Como: } \bar{z} = z^2 \Rightarrow \bar{z} = z = \bar{z}^2 = (\bar{z})^2$$

Reemplazando z por su forma exponencial:

$$z = re^{i\theta} = (re^{-i\theta})^2 = r^2 e^{-i(2\theta)}$$

Esta igualdad es equivalente a:

$$r = r^2 \Leftrightarrow r = 1 \vee r = 0 \text{ (en } \mathbb{R})$$

$$e^{i\theta} = e^{i(2\theta)} \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta_k = \frac{2k\pi}{3}; k = 0, 1, 2$$

$$\text{Considerando: } r = 1 \text{ y } \theta_k = \frac{2k\pi}{3}; k = 0, 1, 2$$

$$k = 0 \Rightarrow z = e^{i\theta_0} = e^{i0} = 1$$

$$k = 1 \Rightarrow z = e^{i\theta_1} = e^{i(2\pi/3)} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2 \Rightarrow z = e^{i\theta_2} = e^{i(4\pi/3)} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\text{Considerando } r = 0 \Rightarrow |z| = r = 0 \Rightarrow z = 0$$

Por lo tanto, los posibles valores de z son:

$$z = 0, z = 1, z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

52. Demostrar que si: $|z| < \frac{1}{2} \Rightarrow |(1+i)z^3 + z| < \frac{3}{4}$

Resolución:

$$|(1+i)z^3 + z| = |z|(1+i)z^2 + i| \leq |z|(|1+i||z|^2 + |i|)$$

$$= |z|(\sqrt{2}|z|^2 + 1) \leq \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} < \frac{2}{8} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

53. Si: $z = -1 + \sqrt{3}i$, hallar el complejo z^8 .

Resolución:

$$z = -1 + \sqrt{3}i$$

$$|z| = 2$$

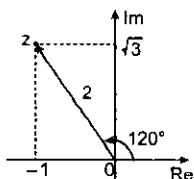
$$\arg(z) = 120^\circ$$

$$\Rightarrow z = 2\text{cis}120^\circ$$

$$z^8 = [2\text{cis}120^\circ]^8$$

$$z^8 = 2^8\text{cis}(8 \times 120^\circ)$$

$$z^8 = 2^8\text{cis}(960^\circ) = 2^8\text{cis}240^\circ$$



$$z^8 = 2^8(\cos 240^\circ + i\sin 240^\circ)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\therefore z^8 = -128(1 + \sqrt{3}i)$$

54. Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. $|\sqrt[3]{4+i\sqrt{15}}| = 2$

II. $(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}})^{16} = -(2)^{16}$

III. $|1 - e^{i\pi}|^2 + |1 + e^{i\pi}|^2 = 4$

Resolución:

I. Recuerde que: $|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|} \wedge |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

$$|\sqrt[3]{4+i\sqrt{15}}| = \sqrt[3]{|4+i\sqrt{15}|} = \sqrt[3]{\sqrt{4^2+(\sqrt{15})^2}}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[3]{64} = 2 \quad (\text{V})$$

II. $(a+bi)^2 = (a^2-b^2) + 2abi$

$$(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}})^{16}$$

$$= [(\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} + i\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}})^2]^8$$

$$= [2 + \sqrt{2+\sqrt{2}} - 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}} + 2i\sqrt{4-(2+\sqrt{2})}]^8$$

$$= [2\sqrt{2+\sqrt{2}} + 2i\sqrt{2-\sqrt{2}}]^8$$

$$= 2^8[\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}]^8$$

$$= 2^8[(\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}})^2]^4$$

$$= 2^8[2 + \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2} + 2i\sqrt{2^2-2}]^4$$

$$= 2^8[2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i]^4 = 2^8(2\sqrt{2})^4(1+i)^4$$

$$= 2^8 \times 2^4 \times 2^2(-4) = -2^{16} \quad (\text{V})$$

III. $|1 - e^{i\pi}|^2 + |1 + e^{i\pi}|^2 = 4$

$$= |1 - \cos\theta - i\sin\theta|^2 + |1 + \cos\theta + i\sin\theta|^2$$

$$= (1 - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta + (1 + \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$$

$$= 2(1 + \cos^2\theta) + 2\sin^2\theta$$

$$= 2(1 + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}) = 2(1 + 1) = 4 \quad (\text{V})$$

$\therefore \text{VVV}$

55. Si z es un número complejo definido por

$$z = \frac{(-1-i)^3(\sqrt{2}\text{cis}(315^\circ))^4}{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})^5}$$

hallar el equivalente de z .

Resolución:

$$z = \frac{(-1-i)^3(\sqrt{2}\text{cis}(315^\circ))^4}{(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}})^5}$$

$$\bullet -1-i = \sqrt{2}\text{cis}225^\circ$$

$$\bullet \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\text{cis}\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\text{cis}45^\circ$$

$$\text{Luego: } z = \frac{(\sqrt{2}\text{cis}225^\circ)^3(\sqrt{2}\text{cis}315^\circ)^4}{(\sqrt{2}\text{cis}45^\circ)^5}$$

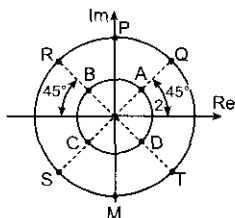
$$z = \frac{\sqrt{2}^3 \text{cis}(3 \times 225) \sqrt{2}^4 \text{cis}(4 \times 315)}{\sqrt{2}^5 \text{cis}(5 \times 45^\circ)}$$

$$z = \sqrt{2}^2 \text{cis}(675^\circ + 1260^\circ - 225^\circ)$$

$$z = 2 \text{cis} 1710^\circ = 2 \text{cis} 270^\circ$$

$$\therefore z = 2(-i) = -2i$$

56. En la figura adjunta se muestran los números complejos A, B, C, D, M, P, Q, R, S y T. Determine A^2 , B^2 , C^2 y D^2 (en ese orden)



Resolución:

De la figura, nótese que:

$$A = 2 \text{cis} 45^\circ \Rightarrow A^2 = 4 \text{cis} 90^\circ = P$$

$$B = 2 \text{cis} 135^\circ \Rightarrow B^2 = 4 \text{cis} 270^\circ = M$$

$$C = 2 \text{cis} 225^\circ \Rightarrow C^2 = 4 \text{cis} 450^\circ = 4 \text{cis} 90^\circ = P$$

$$D = 2 \text{cis} 315^\circ \Rightarrow D^2 = 4 \text{cis} 630^\circ = 4 \text{cis} 270^\circ = M$$

$$\therefore A^2 = P, B^2 = M, C^2 = P, D^2 = M$$

57. Si el complejo $z = \frac{1}{a+bi} + \frac{1}{b+ai}$, a y $b \in \mathbb{R}$ es el conjugado de $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ determine el valor de:

$$E = (a-1)^2 + (b-1)^2$$

Resolución:

En z :

$$z = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{(a-bi)}{(a-bi)} + \frac{1}{b+ai} \cdot \frac{(b-ai)}{(b-ai)}$$

$$z = \frac{a-bi}{a^2+b^2} + \frac{b-ai}{b^2+a^2} = \frac{a+b}{a^2+b^2} - \left[\frac{a+b}{a^2+b^2} \right] i = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

De aquí:

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2+b^2 = 2(a+b)$$

En lo pedido:

$$E = a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1$$

$$E = (a^2+b^2) - 2(a+b) + 2 \quad \therefore E = 2$$

58. A es una región definida por

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z-2-i| \leq 3 \vee |z+2-i| \leq 3\}$$

si z_1 y z_2 está en A, tal que $|z_1 - z_2|$ es máximo, hallar el valor de $z_1 z_2$.

Resolución:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / |z-2-i| \leq 3 \vee |z+2-i| \leq 3\}$$

$$\text{Si: } z = (x; y) \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$$

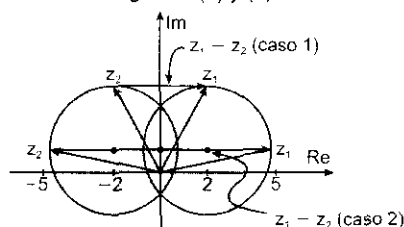
$$|x+iy-2-i| \leq 3 \Rightarrow |(x+2) + (y-1)i| \leq 3$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 9 \quad \dots(1)$$

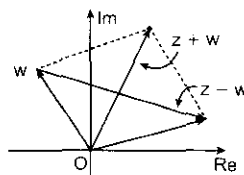
$$|x+iy+2-i| \leq 3 \Rightarrow |(x+2) + (y-1)i| \leq 3$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 \leq 9 \quad \dots(2)$$

Graficando las regiones (1) y (2):



Tenga en cuenta que:



Del gráfico, tomando z_1, z_2 en A (cualesquiera) $|z_1 - z_2|$ será máximo solo en el caso 2, para esto: $z_1 = -5 + i; z_2 = 5 + i$ (o al revés)

$$z_1 z_2 = (-5+i)(5+i) \quad \therefore z_1 z_2 = i^2 - 25 = -26$$

59. De todos los complejos z que cumplan:

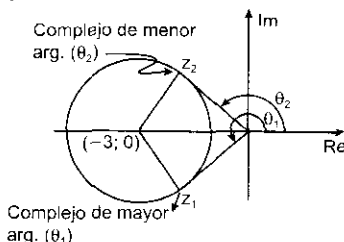
$$|z+3| = 2; \quad 0 < \arg(z) < 2\pi$$

Seleccionar el que tenga mayor y menor argumento y dar como respuesta la suma de sus partes imaginarias.

Resolución:

Los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la igualdad $|z+3| = 2$, son todos aquellos que se encuentran en el contorno de la circunferencia con centro en $(-3; 0)$ y de radio 2. Graficamos, y véase cuál es el complejo de mayor y menor argumento.

Complejo de menor



Obsérvese que z_1 y z_2 caracterizan puntos simétricos respecto al eje real y cuando ello ocurre, los complejos son conjugados (difieren en el signo de su parte imaginaria).

$\therefore$ Suma de partes imaginarias: 0

60. Si A es un conjunto definido por

$A = \{z \in \mathbb{C} / \text{Re}(z) + \text{Im}(z) \geq 1 \wedge |z| \leq 1\}$ cuya gráfica determina una región cerrada, hallar el área de la región.

Resolución:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \geq 1 \wedge |z| \leq 1\}$$

$$\text{Si } z = (x; y) \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R}$$

$$\bullet \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) \geq 1 \Rightarrow x + y \geq 1$$

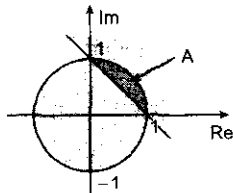
$$\bullet |z| \leq 1 \Rightarrow |z|^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

Graficando:

$$S_{(A)} = S_D - S_{\Delta}$$

$$S_{(A)} = \frac{\pi(1)^2}{4} - \frac{1(1)}{2}$$

$$\therefore S_{(A)} = \frac{\pi - 2}{4}$$



61. Hallar la gráfica de: $A = \{z + 4i / |\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(\bar{z})| \leq 4\}$

Resolución:

$$A = \{z + 4i / |\operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(\bar{z})| \leq 4\}$$

$$\text{Si: } z = (x; y) \in \mathbb{C}, x, y \in \mathbb{R}$$

$$A = \{(x; y + 4) / |x + (-y)| \leq 4\}$$

$$A = \{(x; y + 4) / |x - y| \leq 4\}$$

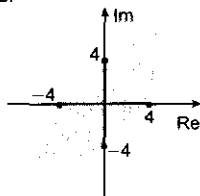
$$\text{Sea: } B = \{(x; y) / |x - y| \leq 4\}$$

$$|x - y| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x - y \leq 4$$

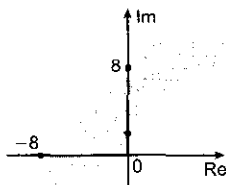
$$\Rightarrow -4 \leq x - y \wedge x - y \leq 4$$

$$\Rightarrow y \leq x + 4 \wedge y \geq x - 4$$

La gráfica es:



$\therefore$ La gráfica de A será (aumentando 4 unidades a todas las ordenadas).



62. Hallar la gráfica que representa el conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} / 0 \leq \arg(z) \leq \pi \wedge |z| \leq 2 \wedge |z - i| \geq 1\}$

Resolución:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / 0 \leq \arg(z) \leq \pi \wedge |z| \leq 2 \wedge |z - i| \geq 1\}$$

$\bullet 0 \leq \arg(z) \leq \pi \Rightarrow z$ está en el semiplano por encima del eje real (incluyendo este).

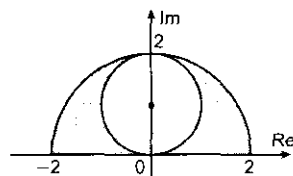
$\bullet |z| \leq 2$, su gráfica es un disco con centro en el origen y radio 2.

$\bullet |z - i| \geq 1$, si $z = (x; y) \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow |z - i|^2 \geq 1 \Rightarrow |(x; y - 1)|^2 \geq 1$$

$\Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 \geq 1$, cuya gráfica es la región exterior a un disco de radio 1 y centro (0; 1)

Intersecando las tres regiones, resulta:



63. Si A es un conjunto definido por:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / 2 \leq |z| \leq 4 \wedge |\arg(z)| < \frac{\pi}{2}\}$$

hallar la gráfica de A.

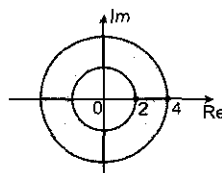
Resolución:

$$A = \{z \in \mathbb{C} / 2 \leq |z| \leq 4 \wedge |\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$2 \leq |z| \leq 4 \wedge z = (x; y) \in \mathbb{C}$$

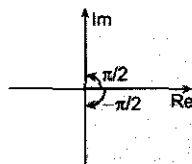
$$\Rightarrow 2^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4^2$$

y sus gráficas es como sigue:



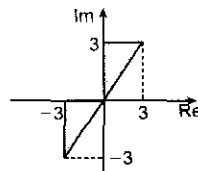
$$|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{2}$$

La gráfica es:



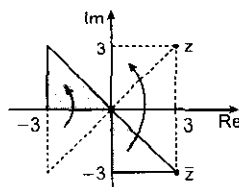
$\therefore$ La intersección de estas regiones genera la región definida por A.

64. En la figura adjunta se muestra la gráfica de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$. Hallar la gráfica de: $B = \{\bar{z} / z \in A\}$


Resolución:

$$\text{Si: } z = (x; y) \in \mathbb{C}; x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow \bar{z} = (x; -y)$$

Luego: $B = \{\bar{z} / z \in A\}$ tendrá por gráfica:



**PROBLEMA 1 (UNI 2002 - II)**

Al resolver, en el conjunto de los números complejos, el sistema:

$$\begin{aligned}(1+i)z - w &= -1 - i \\ 2iz + (1-i)w &= i\end{aligned}$$

El valor de $\frac{z}{w}$ es:

- A) $-\frac{1}{2} - \frac{i}{6}$ B) $\frac{1}{2} - \frac{i}{6}$ C) $\frac{1}{2} + \frac{i}{6}$
D) $-\frac{1}{6} + \frac{i}{2}$ E) $\frac{1}{6} + \frac{i}{2}$

Resolución:

Calculando el determinante del sistema:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & -1 \\ 2i & 1-i \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta = 2(i+1)$$

Calculando Δ_z y Δ_w :

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -1-i & -1 \\ i & 1-i \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_z = -2+i$$

$$\Delta_w = \begin{vmatrix} 1+i & -1-i \\ 2i & i \end{vmatrix} \Rightarrow \Delta_w = 3(i-1)$$

$$\text{Luego: } \frac{z}{w} = \frac{\frac{\Delta_z}{\Delta}}{\frac{\Delta_w}{\Delta}} = \frac{\Delta_z}{\Delta_w} = \frac{i-2}{3(i-1)} \therefore z = \frac{1}{2} + \frac{i}{6}$$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - II)

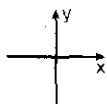
Indique gráficamente todos los puntos del plano que verifican las relaciones: $|e^z| \leq 1$ y $|z| \leq 1$ donde: $z = x + iy$

- A)  B)  C) 
D)  E) 

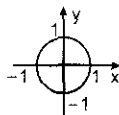
Resolución:

Como: $z = x + iy$, tenemos que: $|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x$

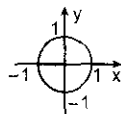
Graficando: $|e^z| \leq 1$; $e^x \leq 1$; $e^x \leq e^0 \Rightarrow x \leq 0$



Graficando: $|z| \leq 1$



$\therefore$ Intersecando ambas gráficas:



Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2004 - I)

Hallar la suma A de números complejos:

$$A = (1+i) + (2+i^2) + (3+i^3) + (4+i^4) + \dots + (4n+i^{4n})$$

- A) $n(2+1)$ B) $2n(4n+1)$ C) 0
D) $n(4+1)$ E) $2n(4n-1)$

Resolución:

Agrupando convenientemente:

$$A = (1+2+3+\dots+4n) + (i+i^2+i^3+\dots+i^{4n})$$

Recordando la propiedad: $\sum_{k=1}^{4n} i^k = 0$

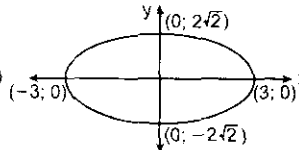
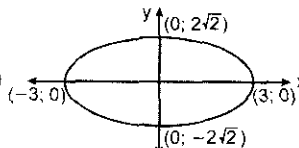
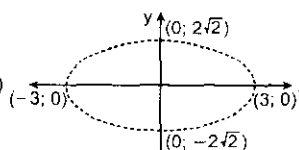
Aplicando: $A = 1+2+3+\dots+4n$

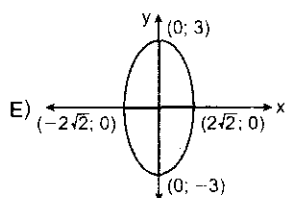
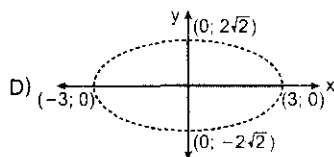
$$A = \frac{1}{2}(4n)(4n+1) \therefore A = 2n(4n+1)$$

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2006 - I)

Determine la representación geométrica de todos los puntos del plano complejo que satisfacen la condición: $|z-1| \leq 6 - |z+1|$

- A) 
B) 
C) 


Resolución:

Aplicando teoría en la desigualdad planteada, $z = x + yi$, este valor se reemplaza en la expresión dada:

$$|x + yi - 1| \leq 6 - |x + yi + 1|$$

$$|(x - 1) + yi| \leq 6 - |(x + 1) + yi|$$

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq 6 - \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

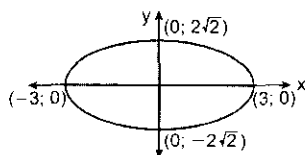
Luego, al elevar al cuadrado se obtiene:

$$\sqrt{(x - 1)^2 + y^2} \leq 6 - \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$$

$$8x^2 + 9y^2 \leq 72$$

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{(2\sqrt{2})^2} \leq 1$$

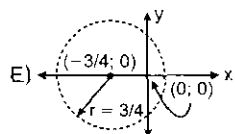
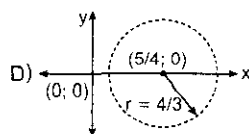
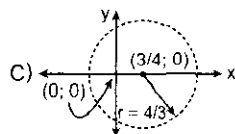
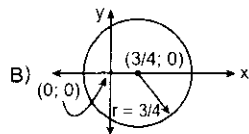
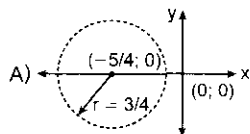
∴ Finalmente, se concluye que la gráfica adecuada es:



Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2006 - II)

Si $z = x + iy$, grafique los puntos en el plano cartesiano que representa el conjunto $\left\{z \mid \left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 3\right\}$


Resolución:

Con: $z = x + iy$

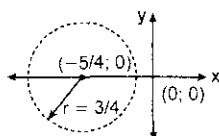
$$\left\{z \mid \left|\frac{z-1}{z+1}\right| > 3\right\} \Rightarrow |z - 1| > 3|z + 1|$$

Reemplazando z : $(x - 1)^2 + y^2 > 9(x + 1)^2 + 9y^2$

Resolviendo: $x^2 + \frac{5}{2}x + 1 + y^2 < 0$

Luego, completando cuadrados: $\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 + y^2 < \left(\frac{3}{4}\right)^2$

∴ Su gráfica será:



Clave: A

PROBLEMA 6 (UNI 2007 - I)

Determine la suma de las raíces de la ecuación:

$$16(z^2 - 2iz - 1)^2 = z^4$$

A) $\frac{3-4i}{15}$ B) $\frac{2+4i}{5}$ C) $\frac{48i}{15}$

D) $\frac{-2+4i}{5}$ E) $\frac{64i}{15}$

Resolución:

Sea: $16(z^2 - 2iz - 1)^2 = z^4$, desarrollando obtenemos:

$$15z^4 - 64iz^3 - 96z^2 + 64iz + 16 = 0$$

Por teorema de Cardano:

Suma de raíces: $-\frac{(-64i)}{(15)} = \frac{64i}{15}$

Clave: E

PROBLEMA 7 (UNI 2007 - I)

Si $n = 8k$ y $k \in \mathbb{Z}^+$, calcule el valor de R :

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^n$$

A) 0 B) -1 C) 2
D) 3 E) 4

Resolución:

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{8k} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^{8k}$$

$$R = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8k} (1+i)^{8k} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8k} (-1+i)^{8k} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{8k} [(1+i)^{8k} + (-1+i)^{8k}]$$

$$R = \left(\frac{1}{2}\right)^{4k} [((1+i)^2)^{4k} + ((-1+i)^2)^{4k}]$$

$$R = \frac{1}{2^{4k}} [(1+2i-1)^{4k} + (1-2i-1)^{4k}] = \frac{1}{2^{4k}} [(2i)^{4k} + (-2i)^{4k}]$$

$$\therefore R = \frac{1}{2^{4k}} [2(2i)^{4k}] = \frac{1}{2^{4k}} (2)(2)^{4k} = 2$$

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2011 - II)

Al resolver el sistema $\begin{cases} |z - 3i| = 2 \\ y - x^2 = 1 \end{cases}$

donde $z = x + iy$ es un número complejo, la suma de las ordenadas de los puntos solución es:

- A) 9 B) 8 C) 7
D) 6 E) 5

Resolución:

Siendo: $z = x + yi \Rightarrow z - 3i = x + (y - 3)i$, su módulo:

$$|z - 3i| = \sqrt{x^2 + (y - 3)^2}, \text{ por dato: } |z - 3i| = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 2 \Rightarrow x^2 + (y - 3)^2 = 2^2 \quad \dots(\alpha)$$

$$\text{De la 2.ª ecuación: } y = x^2 + 1 \quad \dots(\beta)$$

$$\text{Reemplazando } \beta \text{ en } \alpha: x^2 + (x^2 - 2)^2 = 4$$

$$\text{Resolviendo: } x^2(x^2 - 3) = 0$$

$$\text{Su gráfica será: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \sqrt{3} \Rightarrow y = 4 \\ x = -\sqrt{3} \Rightarrow y = 4 \end{cases}$$

$$\text{Puntos solución: } \{0, 1\}, \{\sqrt{3}, 4\}, \{-\sqrt{3}, 4\}$$

$$\therefore \text{La suma de las ordenadas es: } 1 + 4 + 4 = 9$$

Clave: A**PROBLEMA 9 (UNI 2012 - I)**

$$\text{Sea } E = \frac{(1+i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(\sqrt{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)}$$

Indique cuál de las siguientes proposiciones es verdadera

I. $\operatorname{Re}(E) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

II. $\operatorname{Im}(E) = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

III. $E = \sqrt{2}e^{\frac{-7\pi i}{12}}$

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) I, II y III

Resolución:

$$E = \frac{(1+i)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(\sqrt{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right)} = \frac{(1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt{2} \times \sqrt{2}i}{2}$$

$$E = (1+i)\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{\pi}{4} \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3} \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = \sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{17\pi}{12}$$

$$E = \sqrt{2} e^{\left(\frac{17\pi}{12} - 2k\pi\right)i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$E = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right)i$$

De donde:

$$\operatorname{Re}(E) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \wedge \operatorname{Im}(E) = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \wedge \arg(E) = -\frac{7\pi}{12}$$

$\therefore$ I y III son correctas

Clave: D**PROBLEMA 10 (UNI 2014 - I)**

Considere: $S_n = i + i^2 + i^3 + \dots + i^n$, donde $i^2 = -1$, con $n \in \mathbb{N}$. Dadas las siguientes proposiciones.

- I. $S_n + S_{n+1} = i$, si n es impar
II. $S_n = S_{n-1} + S_{n-1}$, si n es par
III. $S_n = -1$, si n tiene la forma $n = 4k + 3$, con k entero no negativo

Son correctas:

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

Resolución:

$$S_n = i + i^2 + i^3 + \dots + i^n$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{i(i^n - 1)}{i - 1} = \frac{-i \times i(i^n - 1)}{-i(i - 1)} \Rightarrow S_n = \frac{i^n - 1}{i + 1}$$

I. $\underbrace{S_n}_{\frac{i^n - 1}{i + 1}} + \underbrace{S_{n+1}}_{\frac{i^{n+1} - 1}{i + 1}} = i$

$$\frac{i^n - 1}{i + 1} + \frac{i^{n+1} - 1}{i + 1} = i$$

$$i^n + i^{n+1} - 2 = i(i + 1) \Rightarrow i^n(1 + i) = -1 + i + 2$$

$$i^n(1 + i) = (1 + i) \Rightarrow i^n = 1$$

$$n = 4k \quad (F)$$

II. $\underbrace{S_n}_{\frac{i^n - 1}{i + 1}} = \underbrace{S_{n-1}}_{\frac{i^{n-1} - 1}{i + 1}} + \underbrace{S_{n+1}}_{\frac{i^{n+1} - 1}{i + 1}}$

$$\frac{i^n - 1}{i + 1} = \frac{i^{n-1} - 1}{i + 1} + \frac{i^{n+1} - 1}{i + 1}$$

$$i^n - 1 = i^{n-1} + i^{n+1} - 2 \Rightarrow i^n - 1 = 0 - 2$$

$$i^n = -1$$

$$\Rightarrow n = 4k + 2 \quad (F)$$

III. $\underbrace{S_n}_{\frac{i^n - 1}{i + 1}} = -1$

$$\frac{i^n - 1}{i + 1} = -1$$

$$i^n - 1 = -i - 1$$

$$i^n = -1 \Rightarrow n = 4k + 3 \quad (V)$$

$\therefore$ Solo III

Clave: C



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Calcular:

$$z = (1-2i)(2-i) + (3-4i)(4-3i) + \dots + (39-40i)(40-39i)$$

luego indicar el módulo de z .

- A) 22 140 B) 22 410 C) 24 201
D) 22 104 E) 22 100

2. Reducir el siguiente complejo:

$$z = \frac{\sqrt{3+2a} + i\sqrt{3-2a}}{\sqrt{3+2a} - i\sqrt{3-2a}} - \frac{\sqrt{3-2a} + i\sqrt{3+2a}}{\sqrt{3-2a} - i\sqrt{3+2a}}$$

donde: $-\frac{3}{2} \leq a < \frac{3}{2}$

- A) $2a/3$ B) $-2a/3$ C) $a/3$
D) $4a/3$ E) $-4a/3$

3. Si
- z
- es un complejo que verifica:
- $z^2 + (1 - \sqrt{2})z = 0$
- , calcular el valor de:

$$E = z + z^7 + z^1 + z^5 + z^3 + 1 + z^6 + z^2$$

- A) 1 B) i C) 0
D) $2i$ E) $4 + i$

4. Si:
- $z = 12 + 1213i$
- $w = 54 + 11\,031i$
- , calcular:

$$E = \frac{\left| \frac{z^2 + w^2}{2} + zw \right| + \left| \frac{z^2 + w^2}{2} - zw \right|}{|z|^2 + |w|^2}$$

- A) 1 B) 1213 C) 11 031
D) 0 E) 12/54

5. Resolver la ecuación:
- $z^3 + z^2 + (4i + 1)z + 5 = 0$
-
- Si una de sus raíces es imaginaria pura, indicar el módulo de una de sus otras raíces.

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{5}$

6. Dado el polinomio:
- $P(z) = (z - a)z^3 + (4 + 2i)z + 6$
-
- Donde:
- $z \in \mathbb{C}$
- , calcular el valor de "a" para que:
- $P(1 + i)$
- sea un número real.

- A) 5 B) -4 C) 3 D) -2 E) 1

7. Calcular la suma de las siguientes 12 fracciones:

$$\frac{2-4i}{\sqrt{3+4i}} + \frac{5-15i}{\sqrt{8+6i}} + \frac{10-40i}{\sqrt{15+8i}} + \frac{17-85i}{\sqrt{24+10i}} + \dots$$

- A) -5871 B) -6621 C) -585i
D) -628i E) -626i

8. Si
- $x + yi = (s + ti)^n$
- ;
- $n \in \mathbb{Z} \wedge \{x; y; z\} \subset \mathbb{R}$

calcular el valor de: $\frac{(s^2 + t^2)^n}{x^2 + y^2}$

- A) 1 B) 0 C) n
D) 3 E) 2

9. Los cocientes siguientes:
- $\frac{a+2i}{b-3i}$
- ;
- $\frac{b+ai+8i}{a+bi}$

corresponden a un complejo real y un complejo imaginario puro. Calcular al producto de dichos cocientes.

- A) $-\frac{5}{3}i$ B) $-\frac{4}{3}i$ C) $-\frac{2}{3}i$
D) $-\frac{1}{3}i$ E) $\frac{2}{3}i$

10. Calcular el módulo del complejo:

$$z = \frac{(6+8i)^4(1+\sqrt{3}i)^{45}}{(4-3i)^4}$$

- A) 2^{45} B) 2^{16} C) 2^{49}
D) 2^{46} E) 2^{35}

11. Reducir:
- $z = \frac{(1+i)^6}{4i + \frac{(1-i)^4}{-i + \frac{1-i}{1 + \frac{1+i}{1-i}}}}$

- A) $2i$ B) $-2i$ C) 1
D) 4 E) -4

12. Hallar un valor de:
- $\sqrt[3]{-2\sqrt{-2^{10}\sqrt[11]{1-\sqrt[9]{i}}}}$

- A) $-i$ B) i C) $1-i$
D) 1 E) $1+i$

13. Si se verifica que
- $\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{A}{B} + \frac{B}{C}i$
- ;
- $a; b; C; B \in \mathbb{R}$
- .
-
- Determinar la relación correcta.

- A) $A + B = C$ B) $B^2 + C^2 = A^2$
C) $A^2 + B^2 = C^2$ D) $ABC = 1$
E) $A^2 + B^2 + 1 = C$

14. Siendo:
- $i = (0; 1)$
- , calcular el valor de
- z
- .

$$z = \frac{x^4 + 4}{(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)}$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) -1 E) 3

15. Si:
- $z = \frac{(a-bi)^2 + (b-ci)^2 + (c-ai)^2}{a(b-ci) + b(c-ai) + c(a-bi)}$

calcular: $\text{Re}(z)$; $\forall a, b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

- A) 0 B) -1 C) 1
D) 2 E) abc

16. Dados:
- $z_1 = (a; b)$
- ;
- $z_2 = (c; d)$
- ,
-
- tal que:
- $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- ;
- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Hallar la condición para que $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ sea imaginario puro.

- A) $bc = ad$ B) $ac + bd = 0$
C) $a + b = c + d$ D) $ab = cd$
E) $bd = ac$

17. Si
- $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
- , tal que:
- $[3\bar{z}_1] = [2z_2] = 12$

Calcular el valor de: $E = |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$

- A) 105 B) 104 C) 102
D) 101 E) 98

18. Sea $F(x) \equiv x^4 + ix^3 + i(-2 + i)x^2 + 3x - 1 + 3i$, hallar el valor de $F(1 + i)$.

A) 3 B) 5 C) -i
D) i E) 2i

19. Calcular la suma de los módulos de los cuatro valores de z , si: $z = \sqrt{3} + 4i + \sqrt{3} - 4i$

A) 8 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

20. Resolver la ecuación: $x^2 - (5 - i)x + 8 - i = 0$. Señalar el cuadrado de una de las raíces.

A) $3 - 4i$ B) $5 + 12i$ C) $3 + 4i$
D) $4 + 12i$ E) $4 + 3i$

21. Entre los números complejos z que satisfacen la condición: $|z - 25i| \leq 15$. Hallar el complejo z con menor argumento, luego indicar:

$$W = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right)^2$$

A) -250 B) -196 C) -148
D) -112 E) -105

22. Hallar los números complejos z que cumplan la condición: $z = (\bar{z})^2$. Indicar cuántos son.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

23. El perímetro del polígono que tiene como vértices a los afijos de las raíces de orden 8 de 16 es un número irracional de la forma: $a\sqrt{b} - \sqrt{a}$. Hallar el valor de $(a + b)$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

24. Hallar es el mayor número entero y positivo de 4 cifras, menor que 3000, que verifica la relación:

$$\left(\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

A) 2999 B) 2998 C) 2990
D) 2994 E) 2992

25. Siendo: $z \in \mathbb{C} / |z| = 1$ y $z^5 - z^5 = \sqrt{2}i$, con $\frac{\pi}{18} < \arg(z) < \pi$. Determinar $\arg(z)$.

A) 21° B) 45° C) 81°
D) 63° E) 44°

26. Dados los complejos:

$$z_1 = 4(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ)$$

$$z_2 = 2(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$$

hallar: $\frac{z_1}{z_2}$

A) $4(1 + i)$ B) $-2(3 - i)$ C) $-\sqrt{2}(1 + i)$
D) $-3(1 - i)$ E) $\sqrt{7}(2 - i)$

27. Calcular la forma exponencial:

$$z = (1 + \sqrt{3}i)(1 + i)\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)$$

A) $2e^{\frac{\pi}{3}i}$ B) $-2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ C) $2\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$
D) 2 E) e^c

28. Siendo: $i = \sqrt{-1}$, además: $z = \frac{(1 + i)^5}{(\sqrt{3} - i)^3}$. Hallar $\operatorname{Im}(z)^2$.

A) $1/4$ B) $-1/4$ C) $1/2$
D) $-1/2$ E) $1/8$

29. Calcular:

$$z = \frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$$

A) 16 B) 32 C) 64
D) 128 E) -64

30. Hallar el complejo que resulta de efectuar:

$$z = \frac{[2(\cos 7^\circ + i \sin 7^\circ)]^8 [2(\cos 8^\circ + i \sin 8^\circ)]^9}{[16(\cos 17^\circ + i \sin 17^\circ)]^4}$$

A) $\sqrt{3}i$ B) i C) $1 - \sqrt{3}i$
D) $1 - \sqrt{3}i$ E) $2 + i$

31. Calcular la suma:

$$S = i^2 + 2i^4 + 3i^6 - 4i^8 + \dots + 2ni^{4n}$$

donde: $i = \sqrt{-1}$

A) 1 B) 0 C) $2n$
D) $n - 1$ E) n

32. Hallar $\operatorname{Re}(z)$, si $z(1 + ai) = 1 - ai$; $a \in \mathbb{R}$

A) $\frac{1}{1 + a^2}$ B) $\frac{2a}{1 + a^2}$ C) $\frac{-2a}{1 + a^2}$
D) $\frac{-1}{1 - a^2}$ E) $\frac{a}{1 - a^2}$

33. Si $\operatorname{Re}(z) = 11$, hallar: $A = |2 + z|^2 - |2 - z|^2$

A) 22 B) 44 C) 88
D) 121 E) 9

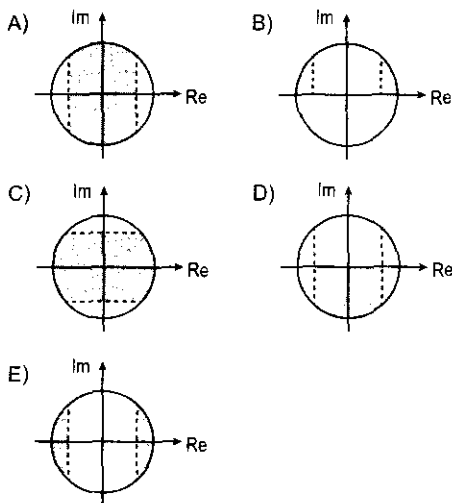
34. Determinar el número complejo que multiplicado por i da otro complejo cuyo módulo es 5, que su componente real sea (-4) y que esté en el tercer cuadrante.

A) $-4 - 2i$ B) $-4 + 2i$ C) $-4 + 3i$
D) $-4 - 4i$ E) $-4 - 3i$

35. Si B es un conjunto definido por:

$$B = \{z \in \mathbb{C} / |\operatorname{Re}(z)| > 1/2 \wedge |z| \leq 1\}$$

señalar la gráfica que mejor representa al conjunto B.



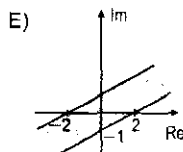
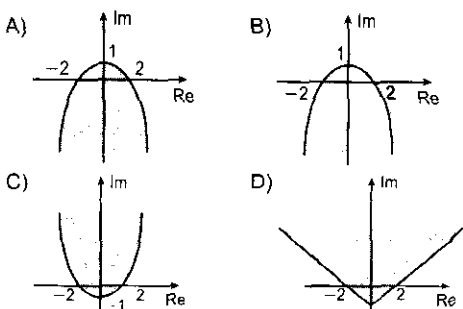
36. Dada la ecuación polinomial: $z^{12} + 1 = 0$, calcular la suma de las partes reales de las raíces que están en el primer cuadrante.

- A) 0 B) $2\sqrt{6}$ C) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\sqrt{6} + \sqrt{2}$

37. Sea $z \in \mathbb{C}$; $\alpha > 0 \wedge \alpha \neq 1$. Si $\left| \frac{1-z}{1+z} \right| = \alpha$, determinar el conjunto de puntos que representa la gráfica de esta igualdad.

- A) Circunferencia de radio: $\frac{2\alpha}{|\alpha^2 - 1|}$
B) Circunferencia de centro: $\left(-\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha - 1}, 0 \right)$
C) Elipse de centro $\left(\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha + 1}, \frac{1}{2} \right)$
D) Elipse de centro $\left(\frac{\alpha + 2}{3}, \frac{1}{2} \right)$
E) Parábola de vértice $\left(\frac{\alpha + 2}{5}, \frac{\alpha}{3} \right)$

38. Sea el conjunto: $A = \{z \in \mathbb{C} / |z| \leq 2 + \text{Im}(z)\}$, hallar la gráfica que mejor representa al conjunto A.



39. En la igualdad:

$$\frac{\cos(4\theta + \alpha) - i\sin(4\theta + \alpha)}{\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)} + \frac{\cos(4\theta + \alpha) + i\sin(4\theta + \alpha)}{\cos(2\theta) + i\sin(2\theta)} = A\cos(B\theta + \alpha)$$

determinar el valor de AB.

- A) -4 B) 2 C) -2 D) 1 E) 4

40. Determinar una de las raíces de la ecuación:

$$z^2 + (2 + i)z - 13(1 - i) = 0$$

- A) $3 + 5i$ B) $1 + 2i$ C) $3 - 2i$
D) $1 + i$ E) $2 + 3i$

41. Determinar el valor de x en:

$$z = (1 - i)^3 [\text{cis}(x + \pi)]^{1/2}, 0 \leq x < 2$$

Si z es un imaginario puro, indicar cuál(es) de los siguientes enunciados es (son) correcto(s):

- I. $x \in \emptyset$ II. $x \in \left\{ 0; \frac{\pi}{2} \right\}$
III. $x \in \left\{ \frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right\}$
A) I y II B) I y III C) II y III
D) Solo II E) Solo III

42. Indicar cuál(es) de las siguientes proposiciones es (son) correcta(s):

- I. $\left| \frac{1 + iz}{1 - iz} \right| > 1$
II. $|e^z + e^{\bar{z}}| \geq 2$
III. $\arg[1 + (2 - \sqrt{3}i)^{10}] = \frac{5\pi}{6}$

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

43. Si $n \in \mathbb{Z}^+$; $k \in (0; n - 1) \subset \mathbb{Z}$, indicar.

- I. $x^n = i \Rightarrow x = \text{cis}\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{2k\pi}{n}\right)$
II. $x^n = -1 \Rightarrow x = \text{cis}\left(\frac{\pi}{n} + 2k\pi\right)$
III. $x^n = 1 \Rightarrow x = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$
IV. $x^n = -i \Rightarrow x = \text{cis}\left(\frac{3\pi}{2n} + 2k\pi\right)$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

44. Si $w \in \mathbb{C}$, además: $w = \cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}$, calcular: $E = (1 + w)^n$, $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge n \geq 2008$

- A) $\cos \frac{n\pi}{3} + i\sin \frac{n\pi}{3}$ B) $\cos \frac{n\pi}{3} - i\sin \frac{n\pi}{3}$
C) $\cos \frac{\pi}{3} + i\sin \frac{\pi}{3}$ D) $\cos \frac{\pi}{3} - i\sin \frac{\pi}{3}$
E) $2\cos^2 \frac{n\pi}{3}$

45. Efectuar: $z = \frac{(\sqrt{2} \operatorname{cis} \frac{5\pi}{4})^4 (-3 + i)}{2(\operatorname{isen} \frac{\pi}{2})^2 (\sqrt{2} e^{\frac{7\pi}{4}})^2 (3 + i)}$
- A) $\frac{3-5i}{4}$ B) $\frac{-3-4i}{5}$ C) $\frac{1}{2} - \frac{3}{5}i$
 D) $\frac{5}{3} - \frac{5}{4}i$ E) $\frac{4}{5} + \frac{4}{5}i$
46. Sean z_1 y z_2 dos complejos, tales que:
 $2|z_1| = |\bar{z}_2| = 2$; además $\arg(z_1 z_2) = \frac{5\pi}{6}$
 Determinar el área del triángulo formado en el plano complejo por z_1 , z_2 y el origen de coordenadas.
- A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$
47. Si $z = 8 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$, determinar el argumento de:
 $w = z^2 - 16z$
- A) 180° B) 210° C) 215°
 D) 225° E) 240°
48. Sabiendo que: $\cos 5^\circ = \sqrt[3]{k}$ $\wedge$ $\sin 5^\circ = \sqrt[3]{p}$
 hallar: $T = \frac{(1 + \sin 80^\circ + i \cos 80^\circ)^7}{(1 - \sin 80^\circ + i \cos 80^\circ)^{11}}$
- A) $-\frac{k}{16p}$ B) $-\frac{k}{p}$ C) $\frac{k}{16p}$
 D) $\frac{k}{p}$ E) $-\frac{p}{k}$
49. Si $\bar{z}$ es el complejo conjugado de z , de argumento principal θ ($\theta \in \mathbb{R}$), además: $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^3 + \left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^3 = 1$
 Determinar el valor de $\cos(180)$
- A) 1 B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{1}{2}$
 D) 0 E) -1
50. Sea: $z = \operatorname{cis} \theta$; $z \in \mathbb{C} \wedge \theta \in \mathbb{R}$, determinar el valor de: $\operatorname{Im}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$
- A) $2\cos(n\theta)$ B) n C) 2
 D) 1 E) 0
51. Determinar el módulo y el argumento principal de:
- $$z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{1-i} i^i$$
- A) $e^{-\frac{\pi}{4}}; \frac{5\pi}{4}$ B) $e^{\frac{\pi}{2}}; \frac{\pi}{2}$ C) $e^{\frac{\pi}{2}}; \frac{\pi}{5}$
 D) $e^{\pi}; \frac{\pi}{6}$ E) $e^{-\pi}; \frac{\pi}{4}$
52. Sea $z \in \mathbb{C}$; tal que: $z = \sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)$, determinar el valor de: $\operatorname{Re}(z^{12})$

- A) 2^{12} B) -2^{18} C) 2^{18}
 D) -2^{16} E) 2^{15}

53. Indicar cuántas raíces complejas de la ecuación:
 $x^n - 1 = 0$, ($n \in \mathbb{N}$), tienen argumentos en el intervalo
 $\left[\frac{4\pi}{n}, \frac{16\pi}{n}\right)$.
- A) 3 B) 4 C) 5
 D) 8 E) 12
54. Hallar el argumento de: $z = -\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ$
- A) 70° B) 20 C) 110°
 D) -70° E) -20°
55. Si: $A = \{z \in \mathbb{C} / z^3 = 1\}$, indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- I. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \in A$ II. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in A$
 III. $-i \in A$
- A) FVV B) VVF C) FVF
 D) VVV E) VFF
56. Si z es un complejo, tal que: $|z| \sqrt{2} |z|^3 = \sqrt{2}^{3/2}$, calcular: $A = |1 + z|^2 + |1 - z|^2$
- A) 6 B) 18 C) A y B
 D) A o B E) 36
57. Si 1, w , w^2 son las raíces cúbicas de la unidad, calcular:
- $$M = (1 + w^{10})^{15} (1 + w^7)^{15} (1 + w^{11})^3 (1 + w^8)^3$$
- A) 0 B) w C) 1
 D) 2 E) 8
58. Sea z un número complejo, hallar el máximo valor de su módulo si se sabe que:
- $$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 1$$
- A) $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{4 + 2\sqrt{3}}{8}$
 D) $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$
59. Simplificar:
- $$W = i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5 + \dots + i^{4178}, i = \sqrt{-1}$$
- A) -1 B) $1 + i$ C) 0
 D) $i - 1$ E) -i
60. Reducir:
- $$z = i^{56/3} + i^{970/11} + i^{1314/5} + \dots + i^{5354/36}; i = \sqrt{-1}$$
- A) i B) 1 C) 13i
 D) 13 E) -1
61. Simplificar, si $z \in \mathbb{C}$
- $$W = [1 - \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)][1 - \operatorname{Re}(z) - i \operatorname{Im}(z)] + 2\operatorname{Re}(z)$$
- A) $1 + [z]^2$ B) $1 + [z]$ C) $1 - [z]$
 D) $1 - [z]^2$ E) $[z]$

62. Determinar el área de la región formada por el conjunto:

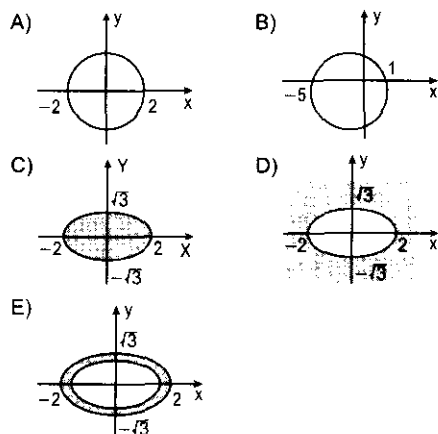
$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i - 1| \leq 1 \wedge |z| \leq 3 + 2\sqrt{2} \wedge \frac{\pi}{4} \leq \arg(z - i - 1) \leq \frac{3\pi}{4}\}$$

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{3}$ C) $\frac{\pi}{4}$
D) $\frac{\pi}{8}$ E) $\frac{\pi}{12}$

63. Hallar el lugar geométrico de los puntos que representan a los números complejos z que satisfacen $|z + 3 - i| \leq 8 - |z - 3 - i|$

- A) El interior de un círculo de radio $2\sqrt{2}$.
B) El interior y el contorno de un círculo de radio $2\sqrt{3}$.
C) El interior y el contorno de una elipse.
D) El contorno de un círculo y su parte externa.
E) El contorno de un círculo.

64. Siendo z un complejo, esbozar el gráfico de:
 $|z + 1| \leq 4 - |z - 1|$



65. Sabiendo que: $\omega_k = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}$

$$\text{calcular: } M = \sum_{k=1}^7 \frac{(\omega_k - 1)^2}{\omega_k}$$

- A) 7 B) -7 C) 14
D) -14 E) 0

66. Calcular "a" y "b" de modo que el sistema:

$$|z - 2| = a \quad \dots (1)$$

$$|z - 4| \leq b \quad \dots (2)$$

presenta solución única, donde $z \in \mathbb{C}$. Indicar un valor de $a + b$.

- A) 2 B) 6 C) 8
D) 10 E) -5

67. Determinar el valor máximo que puede adquirir el módulo del número complejo z .

$$\text{Si: } \left| z + \frac{1}{z} \right| = 1; \quad z \neq (0; 0)$$

- A) $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ C) $1+\sqrt{3}$
D) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

68. Sabiendo que z es un número complejo, resolver la ecuación $z^2 + \overline{z} - 2 = -2$.

Señalar la suma de los módulos de todas sus soluciones.

- A) 3 B) 1 C) 8 D) 9 E) 5

69. Si: $z, \omega \in \mathbb{C}, |z| = 2 \wedge |\omega| = 1$, calcular:

$$\left| \frac{|z|^2 \overline{\omega} + \overline{z\omega} z}{z\omega + \overline{z\omega}} \right|^{|\omega|}$$

- A) 4 B) 8 C) 16
D) 64 E) 1

70. Efectuar: $S = \frac{1+i}{1-i} - \left(\frac{1-i}{1+i} \right) - \sqrt{-4}$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

71. Sea el número complejo z , tal que:

$$z = \frac{(1+i)^2 + (1-i)^3}{(1-i)^2 + (1+i)^3}, \text{ halle el valor de: } \frac{\operatorname{Re}(z) + 1}{\operatorname{Im}(z) - 1}$$

- A) 4 B) -3 C) 3
D) -2 E) 1

72. Calcule el valor de: $3i^{27} + 4i^{37} - i^{30}$

- A) $1 + i$ B) i C) $3i$
D) $5i$ E) $-2i$

73. Si: $E = \frac{(\sqrt{3} + i)^n}{(1 - i)^{n-3}}$, calcule n , si: $|E| = 32$

- A) 3 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

74. Sea: $z = (1 + i)^{10}$, halle: $\operatorname{Im}(z)$

- A) 32 B) 10 C) 64
D) 128 E) 256

75. Efectuar: $S = \frac{(1+i)^2(3-5i)}{3i+5} / i^2 = -1$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

76. Dado $a \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$ simplificar:

$$\left| \frac{100 - ai}{a - 100i} \right| + \left| \frac{\sqrt{3} - ai}{\sqrt{3} + ai} \right|$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

77. Si: $a + bi = \sqrt{7 + 24i}$, calcular: $a^2 + b^2$

- A) 20 B) 25 C) 30
D) 27 E) 32

78. Simplificar: $T = \frac{5-5i}{1-\frac{1+i}{1-i}}$
 A) 2 B) 7 C) 20 D) 5 E) 24

79. Reducir: $S = \sqrt{2\sqrt{i} - \sqrt{2i}}; i = \sqrt{-1}$
 A) $1+i$ B) $2+i$ C) $3+i$
 D) $4+i$ E) $1-i$

80. Calcular el módulo del complejo:

$$T = \sum_{n=2}^{15} \frac{(1+i)^2 - (1-i)^2}{(2n-1)(2n+1)}; i = \sqrt{-1}$$

- A) 56/93 B) 3/7 C) 31/7
 D) 34/3 E) 51/93

81. Dado: $F(x; y) = x + yi; i = \sqrt{-1}$,
 calcular el módulo de: $\sum_{k=-5}^5 F(k; -k)$
 A) $\sqrt{5}$ B) 3 C) 2 D) 1 E) 0

82. Si: $\sqrt{a+bi} = m + ni; a, b, m, n \in \mathbb{R} - \{0\}$
 calcular: $\frac{2(a^2 + b^2)}{(m^2 + n^2)^2}$
 A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

83. Sea el complejo:
 $z = (\operatorname{sen} \alpha + i \operatorname{cos} \alpha)(\operatorname{sen} 2\alpha + i \operatorname{cos} 2\alpha) \dots$
 $(\operatorname{sen} n\alpha + i \operatorname{cos} n\alpha);$
 $n\alpha \in \mathbb{IC}$, para $n \in \mathbb{Z}^+$. Además: $|z| = a^a + bi$
 Calcular: $a^3 + b^3$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$
 A) 29 B) 13 C) 8 D) 2 E) 1

84. Halle el módulo del complejo z , si

$$z = \left[\frac{7i^3 + 5i^5 + 3i^7}{3i^{-3} + 5i^{-5} + 7i^{-7}} \right]^{4/27} + 2i^{2/3}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

85. Sean: $z = 1 + i, w = 1 - i$, calcular: $\left(\frac{z}{w}\right)^{100}$
 A) 5 B) 4 C) 3 D) 2 E) 1

86. Sean: $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, hallar: $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_1 + z_2}\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{z_2}{z_1 + z_2}\right)$
 A) -2 B) 2 C) -1 D) 0 E) 1

87. Dados los complejos:

$$z_1 = 3 + 5i; z_2 = -5 + i; z_3 = 1 - i$$

$$\text{hallar: } S = \frac{z_1 + 2z_2}{iz_3}$$

- A) 2i B) 5i C) 4i D) 7i E) -2i

88. Indicar el valor de verdad:

I. $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z); z \in \mathbb{C}$

II. $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z); z \in \mathbb{C}$

III. $z\bar{z} = |z|^2$

IV. $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ es un complejo real

- A) VFVV B) VVVV C) VFVF
 D) FFFF E) FVVF

89. Sea $z \in \mathbb{C}$, tal que: $(z + \bar{z})^3 + \operatorname{Re}(z) = 0$
 calcular: $\operatorname{Re}(z)$
 A) -5 B) -3 C) 2 D) 1 E) 0

90. Dado: $\frac{z+1}{z-1} = mi; m \in \mathbb{R}; z \in \mathbb{C}$. Determine: $|z|$
 A) 5 B) 3 C) -3 D) 1 E) 2

91. Si: $z = 3 + 2i$, hallar: $T = |z + \bar{z} + \bar{z}^*| + 2\sqrt{13}$
 A) $2\sqrt{13}$ B) $3\sqrt{13}$ C) $5\sqrt{13}$
 D) $\sqrt{15}$ E) 0

92. Si: $z, w \in \mathbb{C}; |z| = |w|$ y $\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w) = 0$,
 calcular: $|1 + z|^2 - |1 + w|^2$
 A) -2 B) -1 C) 2 D) 1 E) 0

CLAVES

1. A	13. C	25. C	37. A	49. E	61. A	73. C	85. E
2. D	14. B	26. C	38. C	50. E	62. C	74. A	86. E
3. C	15. C	27. C	39. E	51. A	63. C	75. B	87. D
4. A	16. B	28. D	40. C	52. B	64. C	76. B	88. A
5. C	17. B	29. E	41. E	53. C	65. D	77. B	89. E
6. C	18. E	30. C	42. B	54. C	66. A	78. D	90. D
7. B	19. D	31. E	43. C	55. C	67. B	79. A	91. B
8. A	20. C	32. C	44. A	56. D	68. A	80. A	92. E
9. E	21. E	33. C	45. B	57. C	69. A	81. E	
10. C	22. B	34. E	46. B	58. D	70. E	82. B	
11. E	23. C	35. C	47. B	59. D	71. D	83. E	
12. E	24. B	36. C	48. A	60. C	72. A	84. C	

Matrices y Determinantes

14

capítulo

Gabriel Cramer nació en Ginebra el 31 de julio de 1704 y murió el 4 de enero de 1752. Fue un matemático suizo que mostró gran precocidad, pues a los 18 años recibió su doctorado y a los 20 era profesor adjunto de Matemática. También fue profesor de Matemática en la Universidad de Ginebra durante el periodo 1724-1727 y en 1750 ocupó la cátedra de Filosofía en la misma casa de estudios. En 1731 presentó ante la Academia de las Ciencias de París, una memoria sobre las múltiples causas de la inclinación de las órbitas de los planetas.

Editó las obras de Johann Bernoulli (1742) y de Jacques Bernoulli (1744) y el *Comercium epistolarum* de Leibniz. Su obra

fundamental fue la *Introduction à l'analyse des courbes algébriques* (1750), en la que se desarrolla la teoría de las curvas algebraicas según los principios newtonianos. La regla de Cramer es un teorema en álgebra lineal que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes. Recibe este nombre en honor a Gabriel Cramer (1704-1752), quien la publicó en su *Introduction...*, aunque Colin Maclaurin también publicó el método en su *Treatise of Geometry* de 1748 (y probablemente sabía del método desde 1729).



Fuente: Wikipedia

◀ MATRICES

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas.

Para representar a una matriz, se utiliza letras mayúsculas.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \leftarrow \text{Fila} \\ \text{columna} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 8 \end{bmatrix}$$

◀ ORDEN DE UNA MATRIZ

Viene dada por la representación $m \times n$, donde "m" es el número de filas y "n" el número de columnas de la matriz. Para los ejemplos citados anteriormente, tenemos:

A es una matriz de orden 2×3

B es una matriz de orden 3×3

Forma general de una matriz de m filas y n columnas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & & & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Donde: a_{ij} es el elemento genérico, ubicado en la fila "i", columna "j".

En forma abreviada se tendrá:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \begin{array}{l} i = 1; 2; 3; \dots; m = 1; m \\ j = 1; 2; 3; \dots; n = 1; n \end{array}$$

◀ MATRICES ESPECIALES

Matriz fila

Es aquella matriz que tiene una sola fila.

$$[1 \ 5 \ 7 \ 10]$$

Matriz columna

Es aquella matriz que tiene una sola columna.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Matriz rectangular

Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son diferentes.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada

Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son iguales.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz nula

Es aquella matriz, donde todos sus elementos son iguales a cero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◀ IGUALDAD DE MATRICES

Dadas las matrices:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \wedge \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

Si estas son iguales, es decir: $A = B$, se verifican simultáneamente las condiciones:

- 1.° A y B son de igual orden $m \times n$.
- 2.° Los elementos correspondientes son iguales.

$$a_{ij} = b_{ij}; \quad \forall i, j$$

◀ OPERACIONES CON MATRICES

Adición

Dadas las matrices de igual orden:

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \wedge \quad B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

Se define: $A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

Por ejemplo:

Hallar la matriz $A + B$, a partir de:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \wedge \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (2+1) & (1+2) & (3+5) \\ (0-1) & (-1+4) & (2+3) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Multipliación

Multipliación de un escalar por una matriz. Sean:

$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \wedge \quad k \in \mathbb{R}$, se define:

$$kA = k[a_{ij}]_{m \times n} = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

Por ejemplo:

Multipliquemos por 2 a la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad 2A = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna. Sean: $A = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \dots a_{1n}]$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

Se define:

$$A \cdot B = [a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} + \dots + a_{1n}b_{n1}]$$

Por ejemplo: multipliquemos A por B, donde:

$$A = [2 \ 1 \ 3] \wedge B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = [2 \ 1 \ 3] \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = [(2)(2) + (1)(4) + (3)(6)]$$

$$\therefore A \cdot B = [4 + 4 + 18] = [26]$$

Multiplicación de las matrices. Dadas las matrices A y B, existe el producto matricial de A por B denotado por A.B, si se verifica lo siguiente:

$$\boxed{N.^\circ \text{ de columnas de } A = N.^\circ \text{ de filas de } B}$$

$$\text{Luego: } A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

Por ejemplo: Hallar AB y BA

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Veamos si existe AB

A tiene orden $2 \times 2 \Rightarrow N.^\circ \text{ columnas} = 2$

B tiene orden $2 \times 3 \Rightarrow N.^\circ \text{ filas} = 2$

Como: $N.^\circ \text{ columnas de } A = N.^\circ \text{ filas de } B$, se afirma que si existe AB, cuyo orden es de 2×3 .

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Ahora se multiplican:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} (2)(2) + (-1)(1) & (2)(-2) + (-1)(2) & (2)(5) + (-1)(-3) \\ (3)(2) + (1)(1) & (3)(-2) + (1)(2) & (3)(5) + (1)(-3) \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 4-1 & -4-2 & 10+3 \\ 6+1 & -6+2 & 15-3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 13 \\ 7 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

Veamos si existe BA

$N.^\circ \text{ columnas de } B = 3 \text{ y } N.^\circ \text{ filas de } A = 2$

Como: $N.^\circ \text{ columnas de } B \neq N.^\circ \text{ filas de } A$

Se podrá afirmar que BA no existe.

En general: el producto matricial no es conmutativo.

Teorema

Sean A, B y C matrices para las cuales se define la adición y/o multiplicación, además al escalar k.

1. $k(A + B) = kA + kB$
2. $A + B = B + A$
3. $ABC = (AB)C = A(BC)$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $AB = 0$; no implica $A = 0 \vee B = 0$
6. $AB = AC$ no implica $B = C$

Propiedades

Sean las matrices A y B, de modo que existen AB y BA.

1. Si: $AB = BA$, se dice que A y B son matrices conmutables.
2. Si: $AB = -BA$, se dice que A y B son matrices anti-conmutables.

Potenciación

Siendo A una matriz cuadrada y "n" un entero positivo, se define:

$$A^n = \begin{cases} A & ; n = 1 \\ \underbrace{A \cdot A \cdot A \dots A}_{n \text{ veces}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

Por ejemplo:

$$\text{Hallar } A^2, \text{ si: } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} (2)(2) + (-1)(3) & (2)(-1) + (-1)(1) \\ (3)(2) + (1)(3) & (3)(-1) + (1)(1) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4-3 & -2-1 \\ 6+3 & -3+1 \end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

TRANSPUESTA DE UNA MATRIZ

Dada una matriz A, existe su matriz transpuesta denotada por A^T y definida como aquella matriz que se obtiene al transformar todas las filas de A en columnas.

$$\boxed{A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A^T = [a_{ji}]_{n \times m}}$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades

Siendo A y B matrices, y el escalar k.

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(kA)^T = kA^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Estudio de las matrices cuadradas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

DS DP

Observaciones

1. Toda matriz cuadrada de n filas y n columnas es de orden n .
2. La diagonal trazada de izquierda a derecha recibe el nombre de diagonal principal (DP).
3. La diagonal trazada de derecha a izquierda recibe el nombre de diagonal secundaria (DS).

◀ TRAZA DE UNA MATRIZ A [Traz(A)]

Se denomina así, a la suma de todos los elementos de la diagonal principal.

$$\text{Traz}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

Por ejemplo:

Para la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad \text{DP}$$

$$\text{Traz}(A) = (2) + (8) + (-4)$$

$$\therefore \text{Traz}(A) = 6$$

✓ Propiedades

Siendo A y B matrices y el escalar k.

1. $\text{Traz}(A+B) = \text{Traz}(A) + \text{Traz}(B)$
2. $\text{Traz}(kA) = k[\text{Traz}(A)]$
3. $\text{Traz}(AB) = \text{Traz}(BA)$

◀ MATRICES CUADRADAS ESPECIALES

Matriz diagonal

Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

Ejemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz escalar

Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz identidad (I)

Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.

Ejemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular superior

Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son ceros.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Matriz triangular inferior

Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados encima de la diagonal principal son ceros.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

◀ CARACTERÍSTICAS NOTABLES DE ALGUNAS MATRICES CUADRADAS

Matriz simétrica

Si A es una matriz simétrica, verifica:

$$A^T = A$$

Matriz antisimétrica

Si A es una matriz antisimétrica, verifica:

$$A^T = -A$$

Matriz idempotente

Si A es una matriz idempotente, verifica:

$$A^2 = A$$

Matriz involutiva

Si A es una matriz involutiva, verifica:

$$A^2 = 1; (\text{matriz identidad})$$

Matriz nilpotente

Si A es una matriz nilpotente, verifica:

$$A^p = 0; (\text{matriz nula}) \quad p: \text{índice de nilpotencia}$$

◀ DETERMINANTES

Un determinante es la relación funcional que aplicada a una matriz cuadrada la transforma en un escalar (número real).

Si A es una matriz cuadrada, su determinante se denota así: $\det(A)$ o $|A|$.

Determinante de orden uno

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$|A| = ad - bc$$

Determinante de orden tres

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$|A| = a(ei - hf) + b(fg - di) + c(dh - ge)$$

Según la regla de Sarrus

$$|A| = M - N$$

◀ MENOR COMPLEMENTARIO DE UNA COMPONENTE

El menor complementario de la componente (elemento) a_{ij} denotado por M_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila i y la columna j de la matriz dada.

Ejemplo:

Para $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

hallar el menor complementario de: $a_{12} = 4$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (5)(3) - (1)(2)$$

$$M_{12} = 15 - 2 = 13$$

Cofactor de una componente

El cofactor de la componente (elemento) a_{ij} denotado por A_{ij} , se define de la manera siguiente:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Para: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

El cofactor de la componente a_{13} es:

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (1)((1)(3) - (2)(-1))$$

$$\therefore A_{13} = 3 + 2 = 5$$

Teorema: el determinante de una matriz será igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

Para: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Con los elementos de la primera fila:

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2)(9) + (-1)(7) + (-3)(-13)$$

$$|A| = 18 - 7 + 39 \quad \therefore |A| = 50$$

Nota

Para aplicar el teorema anterior, se recomienda escoger la fila (o columna) que presente más ceros.

✓ Propiedades

Dadas las matrices cuadradas A , B y el escalar k .

1. $|AB| = |A||B|$
2. $|A^T| = |A|$
3. $|kA| = k^n |A|$; n orden de A .
4. Si dos filas (o columnas) son proporcionales, el determinante será igual a cero.
5. Si todos los elementos de una fila (o columna) son ceros, el determinante será igual a cero.
6. Si se permutan dos filas (o columnas) consecutivas, el determinante cambia de signo.
7. El determinante no varía si a todos los elementos de una fila (o columna) se les aumenta un múltiplo de otra.
8. El determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior y diagonal se obtiene multiplicando todos los elementos de la diagonal principal.

◀ DETERMINANTE DE VANDERMONDE

De orden dos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

De orden tres

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c - b)(c - a)(b - a)$$

De orden cuatro

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d - c)(d - b)(d - a)(c - b)(c - a)(b - a)$$

Definición: Una matriz cuadrada A es no singular, si $|A| \neq 0$, asimismo, si: $|A| = 0$, la matriz A será singular.

◀ MATRIZ INVERSA

Dada una matriz cuadrada no singular A , si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que:

$AB = BA = I$ (matriz identidad), entonces, definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1} .

Teorema

Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si es una matriz no singular, en tal caso se dice que la matriz es inversible.

Propiedades

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar k .

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$

Cálculo de matrices inversas

De orden uno

$$A = [a] \Rightarrow A^{-1} = \left[\frac{1}{a} \right]; a \neq 0$$

De orden dos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Nota

Para matrices de orden mayores o iguales a tres se recomienda utilizar el método de Gauss-Jordan, el cual consiste en construir una matriz ampliada $(A : I)$ donde por operaciones elementales debemos encontrar otra matriz ampliada $(I : B)$, con lo cual se podrá afirmar que B es la inversa de A , es decir: $B = A^{-1}$.

Ejemplos:

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

determinar: $A^2 + B^2$

Resolución:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow A^2 = A \Rightarrow A$ es idempotente

$$B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow B^2 = B \Rightarrow B$ es idempotente

$$A^2 + B^2 = A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

2. Sean el polinomio: $F(x) = x^2 + 3x - 2$ y la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ determinar la suma de los elementos de } F(A).$$

Resolución:

$$F(x) = x^2 + 3x - 2 \wedge A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(A) = A^2 + 3A - 2I.$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$F(A) = \begin{bmatrix} -2 & -9 \\ 6 & -5 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow F(A) = \begin{bmatrix} 2 & -18 \\ 12 & -4 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ La suma de elementos es: -8

3. Resolver la ecuación matricial en x , si

$$(A^T + B)^T + 3(x^T - I) = 2B^T A, \text{ además:}$$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Indicar luego la traza de x .

Resolución:

$$(A^T + B)^T + 3(x^T - I) = 2B^T A$$

$$(A^T)^T + B^T + 3x^T - 3I = 2B^T A$$

$$3x^T = 2B^T A - A - B^T + 3I$$

$$3x^T = 2B^T A - 4B^T + 3B^T - A + 2I + I$$

$$= 2B^T(A - 2I) - (A - 2I) + 3B^T + I$$

$$= (2B^T - I)(A - 2I) + 3B^T + I$$

$$2B^T - I = 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 3x^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3x^T = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 18 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3x^T = \begin{bmatrix} 1 & 11 \\ 18 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Traz}(3x^T) = 1 + 10$$

$$\Rightarrow 3\text{traz}(x^T) = 11 \Rightarrow \text{traz}(x) = \frac{11}{3}$$

4. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, hallar el valor de:

$$E = A^{25} - A^{15} + A^5 + 15I$$

Resolución:

$$\text{Sea } A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_m A_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m+n & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_m A_n = A_{m+n}$$

$$\text{De donde: } (A_m)^k = A_{km} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ km & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix}, \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow E = A^{25} - A^{15} + A^5 + 15I$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -25 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -15 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow E = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ -15 & 16 \end{bmatrix}$$

5. Si las matrices A y B son conmutables, determinar ab.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 5 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$$A \wedge B \text{ Conmutan} \Rightarrow AB = BA$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2a-b & -3 \\ 3a+b & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a+3 & 1-a \\ 2b+15 & 5-b \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 1-a = -3 \wedge 5-b = 8$$

$$\Rightarrow a = 4 \wedge b = -3 \therefore ab = -12$$

6. Dadas las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \wedge D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hallar A^4 , donde: $A = C + D$

Resolución:

$$\text{Tenemos: } A^4 = (A^2)^2 = [(C+D)^2]^2 = (C^2 + CD + DC + D^2)^2,$$

Notemos que:

$$C^2 = 0 \wedge D^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como:

$$CD = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \wedge DC = \begin{bmatrix} 8 & 16 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$CD + DC = \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$A^4 = \left(\begin{bmatrix} 16 & 20 \\ -5 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^2$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 20 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 & 20 \\ -5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 924 & 580 \\ -145 & -91 \end{bmatrix}$$

7. Dadas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{determinar: } B = (x^{-1}Ax)^n$$

Resolución:

$$x^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge A^n = \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ahora: } B = (x^{-1}Ax)^n = x^{-1}A^n x$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & n-1 \\ 1/2 & \frac{n-1}{2} & \frac{n^2-3n+4}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & n \\ \frac{n}{2} & 1 & \frac{n(n-1)}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Si las matrices A y B son iguales, hallar:

$$E = x + y + z, \text{ siendo:}$$

$$A = \begin{bmatrix} (0,2)^{x-1} & 3^{x-2y} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^z & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 25 & 27 \\ y & 4 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Las matrices A y B son iguales.

Entonces:

$$(0,2)^{x-1} = 25 \Rightarrow (5^{-1})^{x-1} = 5^2 \Rightarrow x = -1$$

$$3^{x-2y} = 27 \Rightarrow x + 2y = 3 \Rightarrow y = 2$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^z = y \Rightarrow 3^{-z} = 2 \Rightarrow z = -\log_3 2$$

$$\Rightarrow E = x + y + z = -1 + 2 - \log_3 2$$

$$\therefore E = 1 - \log_3 2$$

9. Sea A una matriz simétrica, tal que:

$$A = \begin{bmatrix} x^3 & x+y & x^2+z \\ -3 & y^2 & 3y \\ 5 & -3 & y^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{determinar: } E = xyz$$

Resolución:

$$A = \begin{bmatrix} x^3 & x+y & x^2+z \\ -3 & y^2 & 3y \\ 5 & -3 & y^2 \end{bmatrix} \text{ es simétrica}$$

$$\Rightarrow -3 = x + y \wedge 5 = x^2 + z \wedge -3 = 3y$$

$$\Rightarrow y = -1 \wedge x = -2 \wedge z = 1$$

$$\therefore E = xyz = 2$$

10. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sea $A_{n \times n}$ entonces $A + A^T$ es simétrica.

II. Sea $A_{n \times n}$ entonces $A - A^T$ es antisimétrica.

III. Toda matriz cuadrada es igual a la suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

Resolución:I. $M_{n,n}$ es simétrica $\Leftrightarrow M^T = M$

$$(A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T \\ \Rightarrow A + A^T \text{ es simétrica} \quad (V)$$

II. $M_{n,n}$ es antisimétrica $\Leftrightarrow M^T = -M$

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) \\ \Rightarrow A - A^T \text{ es antisimétrica} \quad (V)$$

$$\text{III. } A = \frac{1}{2}(A + A) = \frac{1}{2}(A + A^T + A - A^T)$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{2}(A + A^T)}_{\text{simétrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}(A - A^T)}_{\text{antisimétrica}} \quad (V)$$

 $\therefore VVV$ **PROBLEMAS****RESUELTOS**1. Si $A = (a_{ij})_{3,4}$; tal que $a_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{si } i = j \\ 2, & \text{si } i \neq j \end{cases}$

$$B = (b_{ij})_{4,2}; \text{ tal que } b_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{si } i = j \\ 2i - j, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Siendo $C = AB$, determinar: $D = \frac{C_{32} - C_{11}}{C_{22} - C_{31}}$ **Resolución:**

$$A = (a_{ij})_{3,4}/a_{ij} = \begin{cases} 3, & \text{si } i = j \\ 2, & \text{si } i \neq j \end{cases} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = (b_{ij})_{4,2}/b_{ij} = \begin{cases} i + j, & \text{si } i = j \\ 2i - j, & \text{si } i \neq j \end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = AB = (C_{ij})_{3,2}$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ C_{31} & C_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 36 & 28 \\ 37 & 32 \\ 39 & 32 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow C_{32} = 32 \wedge C_{11} = 36 \wedge C_{22} = 32; C_{31} = 39$$

$$\text{Luego: } D = \frac{32 - 36}{32 - 39} = \frac{4}{7}$$

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

determinar la $\text{traz}(C)$, en la siguiente ecuación matricial: $B^5 A^9 - B^4 A^4 C = A^8 B^6$ **Resolución:**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = I \Rightarrow A \text{ es involutiva.}$$

$$\Rightarrow A^n = \begin{cases} A; & n \text{ impar} \\ I; & n \text{ par} \end{cases}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B^2 = I \Rightarrow B \text{ es involutiva}$$

$$\Rightarrow B^n = \begin{cases} B; & \text{si } n \text{ es impar} \\ I; & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\text{Luego: } B^5 A^9 - B^4 A^4 C = A^8 B^6$$

$$\Rightarrow BA - IIC = II$$

$$\Rightarrow C = BA - I \Rightarrow \text{Traz}(C) = \text{Traz}(BA - I)$$

$$\text{Traz}(C) = \text{Traz}(BA) - \text{Traz}(I)$$

$$BA = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 \\ -2 & -4 & -5 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Traz}(BA) = 3 - 4 - 3 = -4$$

$$\therefore \text{Traz}(C) = -4 - (3) = -7$$

$$3. \text{ Calcular } x + y, \text{ si: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$$\text{Si: } A^{-1} = B \Rightarrow AB = I$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 0 & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & 1 & 0 \\ 2y+4 & y+2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x + 2 = 0 \wedge y + 2 = 0$$

$$x = -2 \wedge y = -2$$

$$\therefore x + y = -4$$

4. Si $A^5 = I$, A matriz de orden n , I la matriz identidad. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:I. A es la inversa de A^4 .II. A^2 es la inversa de A^3 .III. A^6 es la inversa de I .**Resolución:**

$$A^5 = I$$

$$\text{I. } A^4 A = I \Rightarrow (A^4)^{-1} = A \quad (V)$$

$$\text{II. } A^3 A^2 = I \Rightarrow (A^3)^{-1} = A^2 \quad (V)$$

$$\text{III. } A^5 = I A^5 = I \Rightarrow I^{-1} = A^5 \quad (V)$$

Recuerde que:

$$\text{Si } MN = I \Rightarrow M^{-1} = N$$

$$\therefore \text{Valor de verdad: VVV}$$

5. Hallar B^{-1} , si $B = |B| \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$; $|B| > 0$.

Resolución:

Tenemos de: $B = |B| \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \dots (I)$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \dots (II);$$

Por otro lado, de (I) también:

$$|B| = |B|^3 \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}, |B|^3 \cdot (2) \Rightarrow |B| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Reemplazando en (II): $B^{-1} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1}$

$$\Rightarrow B^{-1} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -3 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} & -3\sqrt{2} \\ -\frac{3\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

6. Sea $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, donde $a_i = a_j = 1$.

Para $i, j = 1; 2; 3$ y $a_{ij} = a_{(i-1)j} + a_{i(j-1)}$, ($i, j = 2; 3$)
Hallar $|A|$.

Resolución:

De la ley de formación de a_{ij} se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_{22} & a_{23} \\ 1 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Donde: $a_{22} = a_{21} + a_{12}$
 $a_{23} = a_{22} + a_{13}$
 $a_{32} = a_{31} + a_{22}$
 $a_{33} = a_{32} + a_{23}$

Entonces:

$$a_{22} = 1 + 1 = 2; \quad a_{23} = 2 + 1 = 3$$

$$a_{32} = 1 + 2 = 3; \quad a_{33} = 3 + 3 = 6$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

7. Sea $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ indicar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

- I. Si A es antisimétrica, entonces, A^2 es antisimétrica.
 II. Si A es simétrica, entonces, A^2 es simétrica.
 III. Si A es simétrica, entonces, $\text{Traz}(A) \neq 0$.

Resolución:

$$A = (a_{ij})_{n \times n}$$

- I. A es antisimétrica $\Rightarrow A^T = -A$

$$(A^2)^T = (AA)^T = A^{T \cdot AT} = (-A)(-A) = A^2$$

$$\Rightarrow A^2 \text{ es simétrica} \quad (F)$$

- II. A es simétrica $\Rightarrow A^T = A$

$$(A^2)^T = (AA)^T = A^{T \cdot AT} = AA = A^2$$

$$\Rightarrow A^2 \text{ es simétrica} \quad (V)$$

III. La matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ es simétrica.

$$\Rightarrow \text{Traz}(A) = 3 + (-3) = 0 \quad (F)$$

$\therefore$ FVF

8. Si $B^T A^T = I$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, calcular $|B|$

(donde I : matriz identidad)

Resolución:

$$|B^T A^T| = |I| \Rightarrow |B^T| |A^T| = 1 \Rightarrow |B| |A| = 1 \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(0 - 6) = -6$$

$$\therefore \text{Se tiene: } |B| = -\frac{1}{6}$$

9. Dada la matriz: $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$; tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} j - i, & \text{si } i \geq j \\ i - j, & \text{si } i < j \end{cases}, \text{ calcular } \det(A).$$

Resolución:

$$A = (a_{ij})_{4 \times 4} / a_{ij} = \begin{cases} j - i; & i \geq j \\ i - j; & i < j \end{cases}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$|A| = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{vmatrix} = -(-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2(1)(1)(2)(-3) = -12$$

10. Dada las matrices:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} / a_{ij} = \begin{cases} i + j, & i = j \\ i - j, & i \neq j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 3} / b_{ij} + b_{ji} = 0 \text{ y } b_{ii} = 1$$

si: $i < j$, hallar $\det(A + B)$.

Resolución:

$$A = (a_{ij})_{3 \times 3} / a_{ij} = \begin{cases} i + j, & i = j \\ i - j, & i \neq j \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 3} / b_{ij} + b_{ji} = 0 \wedge b_{ii} = 1; i < j$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A + B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Por la regla de Sarrus:

$$\therefore \det(A + B) = 48 - (-4) = 52$$

11. Suponga que A es una matriz cuadrada inversible de orden n. Determinar el valor de verdad de cada una de las afirmaciones siguientes:

I. $\det(A^T)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$

II. $\det(cA) = c^n \det(A)$

III. Si n es impar, entonces $A - A^T$ es singular.

Resolución:

A inversible de orden n.

I. $\det(A^T)^{-1} = \frac{1}{\det(A^T)} = \frac{1}{\det(A)}$ (V)

II. $\det(cA) = c^n \det(A)$ (V)

III. $A - A^T$ es antisimétrica de orden n impar
 $\Rightarrow \det(A - A^T) = 0 \Rightarrow A - A^T$ es singular (V)
 $\therefore \vee \vee \vee$

12. Determinar todos los valores de k para que:

$$\det(A) = 0, \text{ si } A = \begin{bmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-4 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} k-1 & -2 \\ 1 & k-4 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = (k-1)(k-4) + 2 = 0$$

$$\det(A) = k^2 - 5k + 6 = 0 = (k-2)(k-3) = 0$$

$\therefore$ Si $k = 2$ o $k = 3$, se tendrá $\det(A) = 0$

13. Si $\det(A) = 5$, donde $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$; hallar:

I. $\det \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{bmatrix}$

II. $\det \begin{bmatrix} 3a & 3b & 3c \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{bmatrix}$

Resolución:

I. Como aquí se han efectuado 2 intercambios de filas, entonces: $\det(A_i) = (-1)^2 |A| = 5$

II. La primera fila se multiplica por 3, entonces, $|A|$ queda multiplicado por 3, y como la tercera fila se multiplica por 4, entonces $|A|$ queda multiplicado por 4. Luego: $\det(A_{ii}) = 3 \times 4 \times 5 = 60$.

14. Si $A^T B^T = I$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$; calcular $|B|$

donde I: matriz identidad

Resolución:

$$|A^T B^T| = |I| \Rightarrow |A^T| |B^T| = 1$$

$$|A| |B| = 1 \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} \dots (I)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(0 - 6) = -6$$

$$\text{Luego, en (I): } |B| = -\frac{1}{6}$$

15. Si: $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$; $|A| = 2$; $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$; $|B| = 3$

$$\text{simplificar: } E = \frac{|A|^2 |B^T|}{|2B|^3 |A^3|}$$

Resolución:

Simplificando E:

$$E = \frac{|A|^2 |B^T|}{|2B|^3 |A^3|} = \frac{|A|^2 |B|}{(2^3 |B|)^3 |A|^3} = \frac{|B|}{2^9 |B|^3 |A|} = \frac{1}{2^6 |B|^2 |A|}$$

$$E = \frac{1}{(2^6)(3^2)(2)} = \frac{1}{(2^7)(3^2)} = \frac{1}{(128)(9)} = \frac{1}{1152}$$

16. Calcular el valor del determinante de la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 9 & 11 \\ 16 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix}$$

$$C_3 - C_2 \quad C_4 - C_3$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 7 & 2 & 2 \\ 16 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

idénticas

17. Si $B = (b_{ij})_{m \times n}$; tal que: $b_{ij} + b_{ji} = \begin{cases} 2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

$AB + AB^T = 6I$, hallar $|A|$.

Resolución:

$$B = (b_{ij})_{n \times n} / b_{ij} + b_{ji} = \begin{cases} 2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$AB + AB^T = 6I \Rightarrow A(B + B^T) = 6I$$

$$\det(A(B + B^T)) = \det(6I)$$

$$\det(A) \det(B + B^T) = 6^n \det(I)$$

$$\text{Pero: } B + B^T = (b_{ij} + b_{ji})_{n \times n}$$

$$B + B^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B + B^T) = 2^n$$

$$\Rightarrow \det(A) \cdot 2^n = 6^n \det(I) = 6^n \quad \therefore \det(A) = 3^n$$

18. Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

- I. Sea A una matriz cuadrada de orden impar, entonces $|A - A^T| = 0$.
- II. Sea A regular, tal que $A^2 = A$, entonces $|A| = 1$.
- III. Sea A regular, entonces $|A - \lambda I| = |A^T - \lambda I|$.

Resolución:

Propiedad:

Si matriz M es antisimétrica de orden impar $\Rightarrow \det(A) = 0$

I. $A - A^T$ es antisimétrica de orden impar $\Rightarrow |A - A^T| = 0$ (V)

II. A es regular $\Rightarrow \det(A) \neq 0$.
 $A^2 = A \Rightarrow \det(A^2) = \det(A)$
 $\Rightarrow \det(A) \cdot \det(A) = \det(A) \Rightarrow \det(A) = 1$ (V)

III. A es regular $\Rightarrow \det(A) = |A| \neq 0$
 $|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^T| = |A^T - (\lambda I)^T|$
 $= |A^T - \lambda I| = |A^T - \lambda I|$ (V)

$\therefore$ VVV

19. Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Sumando } C_2, C_3 \text{ y } C_4 \text{ a la } C_1; \\ \text{se obtiene:} \end{array}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6(2 \times 2 \times 2) = 48$$

20. Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, calcular $\begin{vmatrix} a-b & c \\ -d & e-f \\ g-h & i \end{vmatrix}$

Resolución:

$$\begin{vmatrix} a-b & c \\ -d & e-f \\ g-h & i \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} a-b & c \\ d & e-f \\ g-h & i \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-1)(-1)(5) = 5$$

21. Dados los siguientes enunciados (con $A_n \times n$ y $B_n \times n$)

- I. Si A, y B, conmutan, entonces A y B^{-1} conmutan.
- II. Si A, y B, conmutan, entonces A^{-1} y B^{-1} conmutan.

III. Si $M = A^{-1}BA$ y A es inversible, entonces:
 $M^n = A^{-1}B^{2^n}A$.

Indicar cuáles son correctas.

Resolución:

I. Si A y B conmutan $\Rightarrow B \cdot A = A \cdot B$

$$\text{Por } B^{-1}: BAB^{-1} = \underbrace{AB}_{B^{-1}A}B^{-1}$$

$$\Rightarrow BAB^{-1} = A$$

$$\text{Por } B^{-1}: \underbrace{B^{-1}BAB^{-1}}_{B^{-1}AB^{-1}} = B^{-1}A$$

$$\Rightarrow AB^{-1} = B^{-1}A$$

$\therefore$ A y B^{-1} conmutan $\Rightarrow$ (I) es V

II. Usando lo anterior: $B^{-1}A = AB^{-1}$

$$\text{Por } A^{-1}: \underbrace{B^{-1}A}_{A^{-1}B^{-1}A}A^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$$

$$\text{Por } A^{-1}: A^{-1}B^{-1} = \underbrace{A^{-1}AB^{-1}}_{B^{-1}A^{-1}A}A^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1}B^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Coef: A^{-1} y B^{-1} conmutan $\Rightarrow$ (II) es V

III. Si $M = A^{-1}BA$

$$\Rightarrow M^2 = M \cdot M = A^{-1} \underbrace{BAA^{-1}}_B BA$$

$$\Rightarrow M^2 = A^{-1}BIBA \Rightarrow M^2 = A^{-1}B^2A$$

$$\text{Por } M: M^3 = MA^{-1}B^2A$$

$$\Rightarrow M^3 = A^{-1}B \underbrace{AA^{-1}}_I B^2A \Rightarrow M^3 = A^{-1}B^3A$$

Si seguimos así sucesivamente, se tiene:

$$M^n = A^{-1}B^nA \Rightarrow \text{(III) es F}$$

$\therefore$ (I) y (II) son correctos.

22. Sea $A = (a_{ij})_{5 \times 5}$, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} j & i < j \\ 0 & i = j \\ i & i > j \end{cases}$

calcular el determinante de A.

Resolución:

Luego de construir la matriz A, se tiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ -3 & -3 & 0 & 4 & 5 \\ -4 & -4 & -4 & 0 & 5 \\ -5 & -5 & -5 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Observar que la matriz es antisimétrica de orden impar (orden 5). Por tanto, por propiedad, el determinante de toda matriz de este tipo vale 0.

23. Sea A una matriz cuadrada de orden 4×4 con $|A| = 2$. Determinar el valor de $|A^{TA-1}(2A)^T|$

Resolución:

Aplicando propiedades:

$$|(A^{TA-1}(2A)^T| = |(A^{TA})^{-1}| |(2A)^T|$$

$$|(A^{TA})^{-1}(2A)^T| = |A^{TA-1}| |2A|$$

$$|(A^{TA})^{-1}(2A)^T| = (|A^T| |A|)^{-1} 2^4 |A|$$

$$|(A^{TA})^{-1}(2A)^T| = \frac{1}{|A| |A|} 2^4 |A| = \frac{2^4}{|A|}$$

$\therefore$ Reemplazando el valor: $16/2 = 8$

24. Si A es de orden 4×4 y $|A| = 50\sqrt{2}$, determinar el valor de $T = ||A^2| A^T| |A|$

Resolución:

$$\text{De: } T = ||A^2| A^T| |A|; |A| = 50\sqrt{2}$$

$$T = |A^2| \cdot |A^T| \cdot |A|$$

$$T = |A|^{2 \cdot 4} \cdot |A| \cdot |A| = |A|^{10}$$

$$\text{Luego: } T = (50\sqrt{2})^{10} \therefore T = 5\sqrt{2}$$

25. De las siguientes afirmaciones, cual(es) son correctas:

I. $|11A^T| = 11^{-n}|A|$, A de orden $n \times n$.

ii. $|A|A| = |A|^{n-1}$, A de orden $n \times n$.

III. Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $a_{ij} = \left\{ \frac{i}{j} \right\}$, sabiendo que $|x| = m$,

$m \in \mathbb{Z}$, si $m \leq x < m+1$, entonces $|A| = n$.

Resolución:

i. A de orden $n \times n$, entonces:

$$|11A^T| = 11^n |A^T| = 11^n |A| \quad (F)$$

II. $|A|A| = |A|^{n \cdot |A| - |A|n - 1} \quad (V)$

III. $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $a_{ij} = \left\{ \frac{i}{j} \right\}$

$$\Rightarrow \forall i < j: 0 < \frac{i}{j} < 1 \Rightarrow \left\{ \frac{i}{j} \right\} = 0$$

$$\forall i = j: \left\{ \frac{i}{j} \right\} = 1, \text{ entonces:}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \quad (F)$$

$\therefore$ Es correcto solo II.

26. Sea A una matriz definida por:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & 11 \\ 3 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 11 & 6 & 5 \\ 10 & -6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

hallar: $|A|$.

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 9 & 2 & 11 \\ 3 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 11 & 6 & 5 \\ 10 & -6 & 7 & -2 \end{vmatrix} = f_1 - f_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 8 & 7 & 8 \\ 5 & 11 & 6 & 5 \\ 10 & -6 & 7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = f_2 - 3f_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 22 & -1 \\ 0 & 6 & 31 & -10 \\ 0 & -16 & 57 & -32 \end{vmatrix}$$

$$|A| = f_2 - f_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -9 & 9 \\ 0 & 6 & 31 & -10 \\ 0 & -16 & 57 & -32 \end{vmatrix}$$

$$= f_3 + 6f_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -9 & 9 \\ 0 & 0 & -23 & 44 \\ 0 & 0 & 201 & -176 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = - \begin{vmatrix} -23 & 44 \\ 201 & -176 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & -44 \\ 201 & -176 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |A| = 23(-176) - 201(-44) = 4796$$

27. Siendo A una matriz cuadrada de orden 4, tal que:

$$|A| = 4 \wedge H = |4A^{-1}|A^T \wedge M = |A^T \times A|(4A^{-1})^T$$

calcular: $|H \times M|$

Resolución:

A matriz cuadrada de orden 4 / $|A| = 4$

$$H = \left| \frac{4}{A} \right| A^T = \frac{4^4}{|A|} \cdot A^T$$

$$M = |A^T| |A| \cdot 4(A^{-1})^T$$

$$HM = \frac{4^4}{|A|} \cdot A^T \cdot \frac{|A^T| \cdot |A|}{4} \cdot A^T \cdot 4(A^{-1})^T = 4^6$$

$$\therefore |HM| = |4^6| = 4^{24} = 2^{48}$$

28. Sea A una matriz involutiva, tal que:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

calcule: $(x^y)^z(w^w)^x$

Resolución:

$$A^2 = I$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} xw & 0 & 0 & 0 \\ 0 & yz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & zy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & wx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow xw = 1 \wedge yz = 1$$

Luego:

$$(x^y)^z(w^w)^x = x^{yz} = 1 \cdot w^{wx} = 1 = xw = 1$$

29. Indicar si es verdadero o falso las siguientes proposiciones:

I. Si A es una matriz nilpotente de orden (2), entonces $A(I \pm A)^n = A$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

II. Dados A y B dos matrices, donde $AB = 0$ (AB es nula), entonces por lo menos una de ellas es nula.

III. Si $AB = -BA \Rightarrow$ las matrices son anticonmutables.

IV. Dadas dos matrices cuadradas A y B tal que $B = A + \alpha I$; α : escalar $\Rightarrow AB = BA$

Observación: I es la matriz identidad

Resolución:

I. Es verdadero debido a que:

$$A^2 = \theta = \text{matriz nula}$$

$$\Rightarrow A^n = \theta \Leftrightarrow I \pm A^n = I$$

$$\Rightarrow A(I \pm A^n) = A \cdot I = A$$

$$\Rightarrow A(I \pm A^n) = A$$

 II. Es falso, basta ver: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

No necesariamente las matrices son nulas

III. Es verdadero, por definición de matrices anti-conmutables.

IV. Es verdadero.

$$B = A + \alpha I \Rightarrow AB = AA + \alpha AI$$

$$\Rightarrow AB = (A + \alpha I)A = BA$$

$$\Rightarrow AB = BA$$

30. Si:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ a & b & a & b \\ c & d & c & d \end{pmatrix}$$

 además: $(x_1 x_4 - x_2 x_3)(bc - ad) = 10$; $abcd \neq 0$
 Calcular $|A|$
Resolución:

Mediante las operaciones elementales:

$$F_1 - \frac{x_1}{x_4} F_2 \wedge F_3 - \frac{b}{d} F_4, \text{ "A" queda}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_2 x_3}{x_4} & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & x_4 & 0 & 0 \\ a - \frac{cb}{d} & 0 & a - \frac{cb}{d} & 0 \\ c & d & c & d \end{pmatrix}$$

La cual es triangular inferior:

$$\Rightarrow |A| = \left(x_1 - \frac{x_2 x_3}{x_4}\right)(x_4)\left(a - \frac{cb}{d}\right)(d)$$

$$|A| = (x_1 x_4 - x_2 x_3)(ad - cb) \quad \therefore |A| = -10$$

 31. Definamos la matriz: $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2^n}$

 hallar la matriz: $B = A_1 A_2 A_3 \dots A_n A_{n+1} \dots$

(Nótese que "n" no crece indefinidamente)

Resolución:

$$\text{Si: } n = 1 \Rightarrow A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$n = 2 \Rightarrow A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2$$

$$n = 3 \Rightarrow A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2^3}$$

$$n = 4 \Rightarrow A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2^4}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2^{n+1}}$$

$$\text{Luego: } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^4 \dots \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2^n} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2^{n+1}}$$

Multiplicamos por partes:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ como } n \rightarrow \infty$$

$$\therefore B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

32. Resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \quad \dots(I)$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x - y = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \quad \dots(II)$$

 y luego calcular la suma de los elementos de la matriz $(x + y)$.

Resolución:

$$y = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 22 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y = \begin{pmatrix} -8 & 4 \\ 22 & -5 \end{pmatrix}$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 29 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 29 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 29 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego: } x = \begin{pmatrix} -206 & -15 \\ -147 & -10 \end{pmatrix}$$

 $\therefore$ La suma de elementos de $x + y$ es: -365

 33. Sea: $N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, hallar: N^5
Resolución:

$$N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sea: } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ entonces } N = \alpha J$$

$$\text{Luego: } N^5 = (\alpha J)^5 = \alpha^5 J^5 \quad \dots(I)$$

$$\text{Pero: } J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$\text{De aquí: } J^2 = -I$$

$$J^3 = J^2 \times J = -J$$

$$J^4 = J^2 \times J^2 = I$$

$$J^5 = J^4 \times J = J$$

$$\text{De (I): } N^5 = \alpha^5 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^5 \\ \alpha^5 & 0 \end{pmatrix}$$

34. Dada las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \wedge D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces se puede afirmar que $C^8 D^9$ es:

Resolución:

Inductivamente:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \dots C^8 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \dots D^9 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore C^8 D^9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 73 \end{pmatrix}$$

35. A es una matriz de orden 3. Se intercambian la primera y tercera filas y se obtiene la matriz A_0 . En A_0 a la primera fila se le multiplica por 3 y a la tercera por 2 obteniéndose la matriz A_1 , de manera que $\det(A_1) = 66$. Halle $\det(A^{-1})$

Resolución:

$$\text{Sea la matriz: } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

De las operaciones indicadas se obtiene la matriz A_1

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \end{pmatrix}$$

Por dato: $|A_1| = 66$

Hallando el determinante de A_1

$$|A_1| = 6 \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}$$

Cambiando f_1 por f_3 : $|A_1| = -6|A|$

Por dato: $-6|A| = 66 \Rightarrow |A| = -11$

$$\therefore \text{Nos piden: } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{11}$$

36. Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \wedge B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Si se cumple que $A + B = I$, donde:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ halle } a + b + 2c$$

Resolución:

De: $A + B = I$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a+2 & 2b \\ b & 2b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego: $a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$

También: $2c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}; b = 0$

$$\therefore a + b + 2c = 0$$

37. La solución de un sistema no homogéneo es (x_0, y_0) donde $x_0 = y_0$, dada según la regla de Cramer por:

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} m & -1 \\ n & 2 \end{vmatrix}}{d} \quad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} -4 & m \\ 5 & n \end{vmatrix}}{d}$$

Si m y n son primos relativos, hallar un valor para: $m + n + d$

Resolución:

$$\text{Por dato: } \frac{x_0}{d} = \frac{y_0}{d} \Rightarrow \frac{2m+n}{d} = \frac{-4n-5m}{d}$$

De aquí: $7m = -5n$

De esta última condición y por dato, m y n son primos relativos, tenemos:

$$(m = -5 \wedge n = 7) \vee (m = 5 \wedge n = -7)$$

Luego: $m + n + d = -1 \vee m + n + d = -5$

38. Sean: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

tales que: $A^2 - 2A - B = C$

hallar la matriz A con elementos no negativos que satisfice esa ecuación. Dar como respuesta la suma de los elementos de la matriz A.

Resolución:

$$\text{Dato: } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Además:

$$A^2 - 2A - B = C$$

$$A^2 - 2A = B + C$$

$$A^2 - 2A + I = B + C + I, I: \text{matriz identidad}$$

$$(A - I)^2 = B + C + I$$

$$\text{Reemplazando datos: } (A - I)^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Del cual obtenemos:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vee A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \vee$$

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \vee A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Como A es una matriz de elementos no negativos, tendremos:

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \therefore \text{Suma: } 7$$

39. Si $x \in \mathbb{R}^2$ es solución del sistema $Ax = b$, calcule:

$$\text{Traz}(x^T b). \text{ Donde: } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolución:

Como: $|A| = -1$; entonces A es invertible

$$A^{-1} = \frac{1}{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$Ix = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow x^T = (-1 \ 3)$$

$$\Rightarrow x^T b = (-1 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = (1) \quad \therefore \text{Traz}(x^T b) = 1$$

40. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Entonces podemos afirmar que:

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-a)(c-b)(b-a) \quad \dots(I)$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b & c \\ a+b & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 - C_3} |B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & b-c & c \\ a+b & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow |B| = (b-c)(b+c) - (a+b)c = (b-c)(c-a) \dots(II)$$

Usando (I) y (II), se tiene:

$$\frac{|A|}{|B|} = \frac{(c-a)(c-b)(b-a)}{(b-a)(c-a)} = a-b$$

$$\therefore |A| = (a-b)|B|$$

41. Se define el conjunto A mediante:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \begin{vmatrix} 2x & x+1 & -1 \\ 3x+1 & 2x+2 & -x-2 \\ 2x & x+1 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

Resolución:

En el determinante, hacemos: $f_1 - f_3$; $f_2 - 2f_3$

$$\begin{vmatrix} -0 & -0 & 2x \\ -x+1 & 0 & -5x \\ 2x & x+1 & 2x-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-2x) \begin{vmatrix} -x+1 & 0 \\ 2x & x+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{De aquí: } -2x(1-x^2) = 0 \Rightarrow x(1+x)(1-x) = 0$$

$$\text{Donde: } x = 0; x = -1; x = 1$$

$$\text{Luego: } A = \{0; -1; 1\}$$

$$\therefore \text{Número de elementos de } A: 3$$

42. Determine el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 9 \\ 7 & 6 & 7 & 2 \\ 8 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Sumamos a C_1 todas las demás columnas:

$$\begin{vmatrix} 22 & 5 & 6 & 7 \\ 22 & 4 & 6 & 9 \\ 22 & 6 & 7 & 2 \\ 22 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 22 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 9 \\ 1 & 6 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Restamos f_1 a todas las demás filas:

$$\Rightarrow 22 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \Rightarrow 22 \times 1 \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -5 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 22(2 - 2 + 2 + 5) = 22(7) = 154$$

43. De la siguiente igualdad:

$$\sqrt{\begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -20 \\ 5 & -4 & 1 & -15 \\ -1 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}} + 6 = \overline{ab}$$

determine: $a + b + a^2 + b^2$

Resolución:

$$\text{Calculemos: } \begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 & -5 \\ -4 & -3 & -2 & -20 \\ 5 & -4 & 1 & -15 \\ -1 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$f_3 + f_1 \Rightarrow \begin{vmatrix} -3 & 6 & -1 & -5 \\ 2 & -15 & 0 & -10 \\ 2 & 2 & 0 & -20 \\ -1 & -5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos respecto a C_3 :

$$(-1) \begin{vmatrix} 2 & -15 & -10 \\ 2 & 2 & -20 \\ -1 & -5 & 5 \end{vmatrix} = (1)(-250) = 250$$

$$\text{Reemplazando: } \sqrt{256} = \overline{ab} \Rightarrow \overline{ab} = 16$$

$$\Rightarrow a = 1 \wedge b = 6$$

$$\therefore a + b + a^2 + b^2 = 44$$

44. Determine el valor del siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-b \end{vmatrix}$$

$$\text{para: } a = \sqrt[5]{72}; b = \sqrt[5]{108}$$

Resolución:

$$C_4 - C_3; C_3 - C_2; C_2 - C_1$$

$$\begin{vmatrix} 1+a & -a & 0 & 0 \\ 1 & -a & a & 0 \\ 1 & 0 & b & -b \\ 1 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$C_1 - \frac{1}{b}C_4: \begin{vmatrix} 1+a & -a & 0 & 0 \\ 1 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$C_1 - \frac{1}{a}C_2: \begin{vmatrix} a & -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & 0 \\ 0 & 0 & b & -b \\ 0 & 0 & 0 & -b \end{vmatrix} = (ab)^2$$

Reemplazando valores:

$$(\sqrt[5]{72} \times \sqrt[5]{108})^2 = (\sqrt[5]{3^2 \times 2^3 \times 2^2 \times 3^3})^2$$

$$\therefore (ab)^2 = \left[\sqrt[5]{(3 \times 2)^5} \right]^2 = 36$$

45. Para: $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha \end{pmatrix}$, $\cos \alpha \neq \pm 1$

cuál(es) de los siguientes enunciados son verdaderos.

I. $\text{Traz}(A^{-1}) = 2\cos \alpha + 3$

II. $|A^2| = (\cos^2 \alpha - 1)^2$

III. $|(A^T)^{-1}A^2| = \cos^2 \alpha + 1$

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$I. A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -1 \\ -1 & \cos \alpha \end{pmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha \end{vmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -1 \\ -1 & \cos \alpha \end{pmatrix}}{\cos^2 \alpha - 1} = \frac{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -1 \\ -1 & \cos \alpha \end{pmatrix}}{-\sin^2 \alpha}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = -\csc^2 \alpha \begin{pmatrix} \cos \alpha & -1 \\ -1 & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Traz}(A^{-1}) = -\csc^2 \alpha (2\cos \alpha) \Rightarrow \text{(I) es F}$$

II. $|A^2| = |A|^2 = (\cos^2 \alpha - 1)^2 \Rightarrow \text{(II) es V}$

III. $|(A^T)^{-1}A^2| = |(A^T)^{-1}| |A^2| = |A^T|^{-1} |A|^2$
 $= |A|^{-1} |A|^2 = |A|$
 $= \cos^2 \alpha - 1 \Rightarrow \text{(III) es F}$

$\therefore$ Solo (II) es verdadero.

46. Los polinomios:

$$P(x) = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$Q(x) = x^3 - 1$$

tienen una raíz común, indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

I. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0$ II. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & c & b \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0$ III. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix} = 0$

Resolución:

$$P(x) = ax^2 + bx + c; \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$Q(x) = (x-1)(x^2 + x + 1)$$

La raíz común no puede ser del trinomio $x^2 + x + 1$ porque estas son complejas y tendrían que presentarse por pares conjugadas; y en este caso, tendrían 2 raíces comunes.

$\Rightarrow$ La raíz común es: $x = 1$

$$\text{Luego: } P(1) = a + b + c = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = ?$$

Sumemos a C_1 todas las demás columnas:

I. $\begin{vmatrix} a+b+c & b & c \\ a+b+c & c & a \\ a+b+c & a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & c & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{(I) es V.}$

II. En forma similar al anterior se obtiene que (II) es F.

III. En forma igual a la 1.ª obtenemos que (III) es V.

$\therefore$ (I) y (III) son correctos

47. Halle x , si se definen las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & x & 0 \\ 0 & 2x & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ x-1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Reemplazando las matrices, se tiene:

$$|2A - B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 3-x & 2x-2 & -1 \\ -3 & 4x-2 & -3 \end{vmatrix}$$

Desarrollando:

$$|2A - B| = -18x + 18 - 2(3-x)(4x-2) + 6 - 6(2x-2) + 3(4x-2) + 6(3-x)$$

Efectuando y reduciendo:

$$8x^2 - 52x + 60 = 8x^2 - 20x - 4$$

$$\Rightarrow 32x = -64 \quad \therefore x = -2$$

48. Determine el mayor valor que debe tomar "k" para que la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}; \text{ no tenga inversa}$$

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & k \\ 4 & 0 & -k \end{pmatrix}; \text{ no tiene inversa, si } |A| = 0$$

$$\text{Luego: } |A| = -2k^2 + 4k + 8 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{2 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k = 1 \pm \sqrt{5}$$

$\therefore$ Mayor valor de k : $1 + \sqrt{5}$

49. Si $A^T B^T = I$; $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, calcular $|B|$.

I: matriz identidad

Resolución:

$$|A^T B^T| = |B| \Rightarrow |A^T| |B^T| = |B|$$

$$|A| |B| = |B| \Rightarrow |B| = \frac{1}{|A|} \quad \dots (I)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(0 - 6) = -6$$

$$\text{Luego en (I): } |B| = -\frac{1}{6}$$

$$50. \text{ Si: } A = [a_{ij}]_{3 \times 3}; |A| = 2 \wedge B = [b_{ij}]_{2 \times 2}; |B| = 3$$

$$\text{calcular: } E = \frac{|A|^2 |B|^T}{|2B|^3 |A^3|}$$

Resolución:

$$E = \frac{|A|^2 |B|}{(2^3 |B|)^3 |A|^3} = \frac{|B|}{2^6 |B|^3 |A|} = \frac{1}{2^6 |B|^2 |A|}$$

$$E = \frac{1}{2^6 \times 3^2 \times 2} = \frac{1}{2^7 \times 3^2} \Rightarrow E = \frac{1}{1152}$$

$$51. \text{ Calcular el valor del determinante de la matriz A:}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 9 \\ 9 & 7 & 9 & 11 \\ 16 & 9 & 11 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 2 \\ 9 & 7 & 2 & 2 \\ 16 & 9 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$C_2 - C_1 \quad C_3 - C_1 \quad C_4 - C_1 \quad C_2 - C_1 \quad C_3 - C_1 \quad C_4 - C_1$ idénticas

$$\therefore |A| = 0$$

$$52. \text{ Si } p, q \in \mathbb{R} \text{ determinar la matriz: } Q = pA^2 + qB^2$$

$$\text{sabiendo que: } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\therefore Q = pA^2 + qB^2 = pI + qI = (p + q)I$$

$$53. \text{ Se define la matriz: } E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \text{ determinar la}$$

suma de los elementos de la primera columna de la matriz E^n ($n \in \mathbb{Z}^+$).

Resolución:

$$E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2I + A; \text{ donde: } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow A^n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 3$$

Como $AI = IA$; $\forall A$ matriz cuadrada

$$(kI + A)^n = \binom{n}{0}(kI)^n + \binom{n}{1}(kI)^{n-1}A + \binom{n}{2}(kI)^{n-2}A^2 + \dots + \binom{n}{n}A^n$$

Se tiene:

$$E^n = (2I + A)^n = \binom{n}{0}(2I)^n + \binom{n}{1}(2I)^{n-1}A + \binom{n}{2}(2I)^{n-2}A^2 + \binom{n}{3}(2I)^{n-3}A^3 + \dots$$

$$E^n = 2^n I^n + 2^{n-1} \cdot n \cdot I^{n-1} \cdot A + 2^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} \cdot I^{n-2} \cdot A^2$$

$$E^n = 2^{n-3}(8I + 4nA + n(n-1)A^2)$$

$$E^n = 2^{n-3} \left\{ \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4n \\ 4n & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E^n = 2^{n-3} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ n(n-1) & 8 & 4n \\ 4n & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$1.^\circ \text{ columna: } S = 2^{n-3}[8 + n(n-1) + 4n]$$

$$\therefore \text{ Suma: } 2^{n-3}(n^2 + 3n + 8)$$

$$54. \text{ Si } A \text{ y } B \text{ son matrices simétricas de orden } n \text{ y } C, \text{ es una matriz cuadrada de orden } n \text{ que cumplen la condición: } C^t + AB^t + (C - I)^t = A^t(BC - I)$$

Determinar la matriz C .

Resolución:

A y B son matrices simétricas:

$$\Rightarrow A^t = A \wedge B^t = B \wedge I^t = I$$

$$C^t + AB^t(C - I)^t = A^t(BC - I)$$

$$C^t + AB^tC - AB^tI = A^tBC - A^tI$$

$$C^t + ABC - ABI = ABC - AI$$

$$C^t - AB = -AI \Rightarrow C^t = AB - AI$$

$$C^t = A(B - I) = A^t(B^t - I^t)$$

$$C^t = A^t(B - I)^t = [(B - I)A]^t$$

$$\Rightarrow C = (B - I)A \quad \therefore C = BA - A$$

55. Si B es la matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}; \text{ calcule el } |A|$$

Resolución:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando respecto a C_3 :

$$|A| = 3 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3(-30 + 4 + 12 - 12 + 3 - 40)$$

$$\therefore |A| = 3(-63) = -189$$

56. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 20 & 10 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Restamos C_1 a todas las demás columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 19 & 9 \end{vmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_4 - f_3 \\ f_3 - f_2 \\ f_2 - f_1 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 14 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore E = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \\ 1 & 14 & 0 \end{vmatrix} = 42 + 12 - 9 - 84 = -39$$

57. Si S es una matriz definida por:

$$S = \begin{bmatrix} x-y & x+y & x+y & x+y \\ x-y & x+y & x+y & x-y \\ x-y & x+y & x-y & x-y \\ x+y & x-y & x-y & x-y \end{bmatrix}, \text{ hallar } |S|$$

Resolución:

$$S = \begin{bmatrix} x-y & x+y & x+y & x+y \\ x-y & x+y & x+y & x-y \\ x-y & x+y & x-y & x-y \\ x+y & x-y & x-y & x-y \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 - f_2 \\ f_2 - f_3 \\ f_3 - f_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 2y & 0 \\ -2y & 2y & 0 & 0 \\ x+y & x-y & x-y & x-y \end{vmatrix}$$

$$f_1 + f_2: \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2y \\ 0 & 0 & 2y & 0 \\ 0 & 2y & 0 & 0 \\ 2x & x-y & x-y & x+y \end{vmatrix}$$

Desarrollando respecto a f_1 :

$$\begin{matrix} -(2y) \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2y \\ 0 & 2y & 0 \\ 2x & x-y & x-y \end{vmatrix}$$

$$= -(2y)(-8xy^2) = 16xy^3$$

58. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$\begin{matrix} C_1 - C_2 \\ C_2 - C_3 \\ C_3 - C_4 \\ C_4 - C_5 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

59. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$\begin{matrix} f_5 + \frac{1}{2}f_1 \\ f_4 + f_5 \\ f_1 - 4f_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} -6 & -2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 6 & 2 & 0 & -2 & -6 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

De f_1 extraemos (-2) :

$$\begin{matrix} (-2) \end{matrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 6 & 2 & 0 & -2 & -6 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \leftarrow \end{matrix} (=)$$

$$= (-2)(0) = 0$$

60. Calcule el valor del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Sumamos a f_1 todas las demás filas y luego extraemos 16 a f_1 :

$$\begin{vmatrix} 16 & 16 & 16 & 16 & 16 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_5 - 3f_1 \\ f_4 - 3f_1 \\ f_3 - 3f_1 \\ f_2 - 3f_1 \end{aligned} = 16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 16(1) = 16$$

61. Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, definido por:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$A = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Desarrollamos respecto a la 1.ª columna:

$$A = a \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}$$

Det. de una matriz triangular superior

$$+ (-1)^{n+1} b \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \end{vmatrix}$$

Det. de una matriz triangular inferior

$$\Rightarrow A = a(a^n - 1) + (-1)^{n+1} b(b^n - 1)$$

$$\therefore A = a^n + (-1)^{n+1} b^n$$

62. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$, hallar el valor de: M^{1003}

Resolución:

$$\text{De la matriz: } M = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se tiene: } M^2 = \alpha^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^2 = -\alpha^2 I$$

Luego:

$$M^{1003} = (M^2)^{501} M = (-\alpha^2 I)^{501} \alpha \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\alpha^{1003} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

63. Determinar el valor de la verdad de las siguientes proposiciones:

- Si AB^{-2} tiene inversa, entonces A y B separadamente poseen inversas.
- Existen matrices A y B de orden $n \times n$, tal que $AB = BA + I$
- Si A y B son no singulares, entonces AB es no singular.

Resolución:

I. AB^{-2} posee inversa, entonces AB^{-2} es no singular: $\det(AB^{-2}) \neq 0$

$$\Rightarrow \det(A) \det(B^{-2}) \neq 0$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \wedge \det(B^{-2}) \neq 0$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \wedge \det(B^{-1}) \neq 0$$

$$\Rightarrow \det(A) \neq 0 \wedge \det(B) \neq 0$$

Luego, A y B poseen inversa

(V)

II. Recuerde que:

$$\text{Traz}(A + B) = \text{Traz}(A) + \text{Traz}(B)$$

$$\text{Traz}(AB) = \text{Traz}(BA)$$

Sean A y B de orden n, tales que: $AB = BA + I$

$$\Rightarrow \text{Traz}(AB) = \text{Traz}(BA + I)$$

$$\Rightarrow \text{Traz}(AB) = \text{Traz}(BA) + \text{Traz}(I)$$

$$\Rightarrow \text{Traz}(I) = 0;$$

absurdo, pues $\text{Traz}(I) = n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ (F)

III. A y B son no singulares, entonces:

$$\det(A) \neq 0 \wedge \det(B) \neq 0$$

$$\Rightarrow \det(AB) = \det(A)\det(B) \neq 0$$

$\Rightarrow AB$ es no singular

(V)

$\therefore$ VFV

$$64. \text{ Si: } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & 26 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\text{y } A - (3I)^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 12A^{-1}$$

Hallar el valor de: $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

Resolución:

De la primera:

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & 26 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 14 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 & 13 \\ 14 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 & 26 \\ 25 & 24 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

De la segunda:

$$A - (3I)^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - 12A^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4 + 9 + 4 + 1 = 18$$

65. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, determinar la suma de los elementos de la matriz A^{-2}

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 25 \\ 5 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^2) = [\det(A)]^2 = 1 = |A^2|$$

$$\text{Luego: } A^{-2} = (A^2)^{-1} = \frac{1}{|A^2|} \text{Adj}(A^2) = \begin{pmatrix} 14 & -25 \\ -5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma \text{ elementos: } 14 - 5 - 25 + 9 = -7$$

66. Si A, B y P son matrices cuadradas del mismo orden con $|P| \neq 0$, y $A = P^{-1}BP$. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones:

I. $B = P^{-1}AP$

II. $|A^T B^T| = |B|^2$

III. $A^2 = P^{-1}B^2P$

Resolución:

A, B y P matrices cuadradas del mismo orden, con $|P| \neq 0$, es decir, existe: $P^{-1} \wedge A = P^{-1}BP$

I. $P(A)P^{-1} = P(P^{-1}BP)P^{-1}$

$$PAP^{-1} = \underbrace{(PP^{-1})} \underbrace{B(PP^{-1})}$$

$$\Rightarrow B = PAP^{-1}$$

(F)

II. $BA = BP^{-1}BP$

$$|A^T B^T| = |(BA)^T| = |BA| = |BP^{-1}BP|$$

$$|A^T B^T| = |B||P^{-1}||B||P|$$

$$|A^T B^T| = |B||P|^{-1}|B||P| = |B|^2$$

(V)

III. $A^2 = AA = (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)$

$$A^2 = P^{-1} \underbrace{B(PP^{-1})} B P = P^{-1}BBP$$

$$A^2 = P^{-1}B^2P$$

(V)

$$\therefore \text{FVV}$$

67. Si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; hallar A^{50}

Resolución:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ en general, sea: } A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & a+ab \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+ab+b^2 \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}$$

⋮

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & a+ab+ab^2+\dots+ab^{n-1} \\ 0 & b^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a\left(\frac{b^n-1}{b-1}\right) \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$$

$$\text{Reemplazando: } n = 50; a = 7; b = 5$$

$$\therefore A^{50} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{7}{4}(5^{50}-1) \\ 0 & 5^{50} \end{pmatrix}$$

68. Sean las matrices A y B, tales que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

Encontrar $u + v + w + x + y + z$, si cumple que $AB = I$ (I: matriz identidad).

Resolución:

$AB = I$, reemplazando:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & v & w \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u & v-x & w-y+z \\ 0 & \frac{1}{2}x & \frac{1}{2}y-z \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{De donde: } u = 1; \frac{1}{2}x = 1 \Rightarrow x = 2$$

$$\frac{1}{4}z = 1 \Rightarrow z = 4;$$

$$v - x = 0 \Rightarrow v = x = 2$$

$$\frac{1}{2}y - z = 0 \Rightarrow y = 2z \Rightarrow y = 8$$

$$w - y + z = 0 \Rightarrow w = y - z \Rightarrow w = 4$$

$$\therefore u + v + w + x + y + z = 21$$

69. Calcular $a + b + m$, para que A sea la matriz identidad:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2a}{5} - 15 & 20 - b & 40 - a \\ \frac{a}{2} - b & \frac{3b}{5} - 11 & \frac{m}{4} - 11 \\ \frac{a}{10} - \frac{b}{5} & \frac{a}{40} - 1 & \frac{4m}{11} - 15 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$A = I$, entonces:

$$\bullet \frac{2a}{5} - 15 = 1 \Rightarrow a = 40$$

$$\bullet \frac{3b}{5} - 11 = 1 \Rightarrow b = 20$$

$$\bullet \frac{4m}{11} - 15 = 1 \Rightarrow m = 44$$

Con esto, los demás elementos son nulos.

$$\therefore a + b + m = 104$$

$$\text{Teniendo en cuenta que: } \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para: } A_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2^n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$70. \text{ Hallar } ab \text{ en: } \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 0 & 2 \\ 30 & 15 & 18 \\ 36 & 0 & -51 \end{pmatrix}$$

Resolución:

$$\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 0 & 2 \\ 30 & 15 & 18 \\ 36 & 0 & -51 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7a+9 & 0 & 35+3b \\ 4a+6 & 15 & 40+2b \\ 3a+18 & 0 & 15+6b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 0 & 2 \\ 30 & 15 & 18 \\ 36 & 0 & -51 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{De donde: } 7a + 9 = 51 &\Rightarrow a = 6 \\ 35 + 3b = 2 &\Rightarrow b = -11 \end{aligned}$$

$$\therefore ab = -66$$

71. Calcular:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$\text{Sea: } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$f_2 - f_1; \quad f_3 - 2f_1; \quad f_4 - f_1:$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

Tomando menores complementos respecto a la primera columna:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -3 & -5 & -8 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & -5 & -8 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$f_2 + 3f_1; \quad f_3 - f_1:$$

$$\Delta = -3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -3 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \Delta = -3(12 - 15) = 9$$

72. Dada la matriz $A = (a_{ij})_{4 \times 4}$ definida por: $a_{ij} = \begin{cases} i & i > j \\ 1 & i = j \\ j & i < j \end{cases}$

calcule: $\det(A)$

Resolución:

$$A = (a_{ij})_{4 \times 4} \Rightarrow a_{ij} = \begin{cases} i & i > j \\ 1 & i = j \\ j & i < j \end{cases}$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$f_2 - 2f_1; \quad f_3 - 3f_1; \quad f_4 - 4f_1:$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & -8 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -15 \end{vmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -4 \\ -3 & -8 & -8 \\ -4 & -8 & -15 \end{vmatrix}; \quad f_1 - f_3$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 11 \\ -3 & -8 & -8 \\ -4 & -8 & -15 \end{vmatrix} \begin{matrix} f_2 + 3f_1 \\ f_3 + 4f_1 \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 11 \\ 0 & 7 & 25 \\ 0 & 12 & 29 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 25 \\ 12 & 29 \end{vmatrix}$$

$$\therefore |A| = 7 \times 29 - 12 \times 25 = -97$$

73. Hallar el valor de la determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 98 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 98 \end{vmatrix}$$

La matriz es de orden 98.

Restando a cada fila, a partir de la segunda, la primera; se obtiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 97 \end{vmatrix}$$

Ha resultado una matriz triangular superior.

Luego: $\Delta = 1 \times 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 97 = 97!$

74. Dada la matriz: $A = [a_{ij}]_{2 \times 3} / a_n = \begin{cases} 1+j; & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

hallar: $E = \text{Traz}(A^T A) + [AA^T]$

Resolución:

$$A = [a_{ij}]_{2 \times 3} \wedge a_{ij} = \begin{cases} 1+j; & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = [b_{ij}]_{3 \times 3}$$

$$b_{11} = (1 \ 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5$$

$$b_{22} = (3 \ 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

$$b_{33} = (4 \ 4) \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 32$$

$$\Rightarrow \text{Traz}(A^T A) = b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

$$\text{Traz}(A^T A) = 5 + 10 + 32 = 47$$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 21 \\ 21 & 21 \end{pmatrix}$$

$$|AA^T| = 26 \times 21 - 21^2 = 21 \times 5 = 105$$

$$\therefore \text{Traz}(A^T A) + |AA^T| = 152$$

75. Resolver la ecuación y hallar x:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Resolución:

$$f_2 - xf_1; \quad f_3 - xf_1 \quad \wedge \quad f_4 - xf_1:$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-x & -x & -x \\ 0 & -x & b-x & -x \\ 0 & -x & -x & c-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a-x & -x & -x \\ -x & b-x & -x \\ -x & -x & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$$c_1 - c_2: \begin{vmatrix} a & -x & -x \\ -b & b-x & -x \\ 0 & -x & c-x \end{vmatrix} = 0$$

Tomando menores complementarios con respecto a la primera columna:

$$a \begin{vmatrix} b-x & -x \\ -x & c-x \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} -x & -x \\ -x & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$$a[(b-x)(c-x) - x^2] + b[x(x-c) - x^2] = 0$$

$$a[bc - (b+c)x + x^2] + b[-cx - x^2] = 0$$

$$abc - a(b+c)x - bcx = 0 \quad \therefore x = \frac{abc}{ab+bc+ac}$$

76. Sea la matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} b & i < j \\ a & i = j \\ a & i > j \end{cases}$

hallar: $|A|$

Resolución:

$$A = (a_{ij})_{n \times n} / a_{ij} = \begin{cases} b; & i < j \\ a; & i = j \\ a; & i > j \end{cases} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ a & a & b & \dots & b \\ a & a & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}$$

Restando a cada fila, a partir de la segunda, la primera:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a-b & a-b & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

Tomando menores con respecto a la primera columna, resulta:

$$|A| = a \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a-b & a-b & 0 & \dots & 0 \\ a-b & a-b & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a-b & a-b & a-b & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

La matriz que resulta es triangular inferior de orden $(n-1)$.

$$\text{Luego: } |A| = a \overbrace{(a-b)(a-b)\dots(a-b)}^{n-1 \text{ veces}}$$

$$\therefore |A| = a(a-b)^{n-1}$$

77. Sean las matrices:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 2} / a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & i < j \\ i & i \geq j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{2 \times 2} / b_{ij} = \begin{cases} i+2j & i \leq j \\ 2+j & i > j \end{cases}$$

Además $AX = B$. Calcular el determinante de X.

Resolución:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 2} / a_{ij} = \begin{cases} 2i-j & i < j \\ i & i \geq j \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 2$$

$$B = (b_{ij})_{2 \times 2} / b_{ij} = \begin{cases} i+2j & i \leq j \\ 2+j & i > j \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 3$$

$$AX = B \Rightarrow |AX| = |B|$$

$$\Rightarrow |A||X| = |B|, \text{ reemplazando: } 2|X| = 3$$

$$\therefore |X| = \frac{3}{2}$$

78. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

Resolución:

$$\text{Sea: } A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observa que: $A^T = -A$; es decir, A es antisimétrica de orden 3, luego:

$$|A^T| = |-A| \Rightarrow |A^T| = (-1)^3 |A|$$

$$|A| = -|A| \Rightarrow 2|A| = 0 \quad \therefore |A| = 0$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI


PROBLEMA 1 (UNI 2011 - II)

Considere la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & k & k \end{bmatrix}$

Determinar el conjunto de valores de k para que A sea invertible.

- A) $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ B) $k \in \mathbb{R}$ C) $k \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$
 D) $k = -4$ E) $k = 0$

Resolución:

Si es invertible, entonces $|A| \neq 0$

Siendo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & k \\ 1 & k & 4 \\ 1 & k & k \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1}} \begin{vmatrix} 1 & 4 & k \\ 0 & (k-4) & (4-k) \\ 0 & 0 & (k-4) \end{vmatrix}$$

Luego:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & k \\ 0 & (k-4) & (4-k) \\ 0 & 0 & (k-4) \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow (k-4)(k-4) \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 4$$

Luego afirmamos: $k \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ determine la matriz P ; tal

que $PAP = \begin{bmatrix} a & c & b \\ g & i & h \\ d & f & e \end{bmatrix}$

- A) $\begin{bmatrix} -a & 1 & 0 \\ 0 & -b & 1 \\ 1 & 0 & -c \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Resolución:

Con los elementos dados de las matrices A y PAP , observamos que: $|A| = |PAP|$

Luego: $|P^2| = 1$

Igualdad que verifica la matriz involutiva P ,

tal que $P^2 = I$

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Si: $\begin{vmatrix} c & 2c & c \\ 5b & a & 3b \\ b+5c & b+d & b+3c \end{vmatrix} = -4$

halle: $\begin{vmatrix} c & 0 & c \\ a & b & 0 \\ d & c & b \end{vmatrix}$

Donde: $a, c, d \in (0; \infty)$ y $b \in (-\infty; 0)$

- A) -4 B) -2 C) 2
 D) 4 E) 6

Resolución:

Dado: $\begin{vmatrix} c & 2c & c \\ 5b & a & 3b \\ b+5c & b+d & b+3c \end{vmatrix} = -4$

A partir de:

$$\begin{vmatrix} c & 2c & c \\ 5b & a & 3b \\ b+5c & b+d & b+3c \end{vmatrix} \xrightarrow{C_2 - C_3} \begin{vmatrix} 0 & 2c & c \\ 2b & a & 3b \\ 2c & b+d & b+3c \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_3 - \frac{3}{2}C_2} \begin{vmatrix} 0 & 2c & c \\ 2b & a & 0 \\ 2c & b+d & b \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1 - C_3} \begin{vmatrix} 0 & c & c \\ 2b & a & 0 \\ 2c & d & b \end{vmatrix}$$

Factorizando el 2 de la columna 1, tenemos: $2 \begin{vmatrix} 0 & c & c \\ b & a & 0 \\ c & d & b \end{vmatrix}$

Intercambiamos la columna C_1 por C_2 :

$$-2 \begin{vmatrix} c & 0 & c \\ a & b & 0 \\ d & c & b \end{vmatrix} = -4 \quad \therefore \begin{vmatrix} c & 0 & c \\ a & b & 0 \\ d & c & b \end{vmatrix} = 2$$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

Las siguientes operaciones elementales:

$C_1 \leftrightarrow C_2$; $3f_3$; $f_2 - f_3$, en este orden, transformar la ma-

triz A en: $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -4 & 6 & -8 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$, la cual se puede expresar

como $(RPQ)A$, donde RPQ son matrices de orden 3×3 no singulares.

Determine A .

A) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Resolución:

En la matriz transformada: $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -4 & 6 & -8 \\ 6 & -3 & 9 \end{bmatrix}$

$$f_2 + f_3: \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\frac{f_3}{3}: \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Corrección: $f_1 \Leftrightarrow f_2$

$$\text{Se obtiene: } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

Sea A una matriz cuadrada de orden 2×2 , si se sabe que su determinante es Δ y la traza de la matriz A^2 es T . Determine el valor $[\text{Traz}(A)]^2$

- A) $T + \Delta$ B) $T^2 + 2\Delta$ C) $2\Delta + T$
 D) $\Delta + 2T$ E) $\Delta^2 + 2T$

Resolución:

Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$|A| = \Delta = ad - bc \quad \dots (1)$$

$$\text{Traz}(A^2) = T = a^2 + d^2 + 2bc \quad \dots (2)$$

Piden:

$$\begin{aligned} [\text{Traz}(A)]^2 &= (a + d)^2 = \underbrace{a^2 + d^2} + 2ad \\ &\quad (T - 2bc) + 2(ad + bc) \\ &= T - 2bc + 2\Delta + 2bc \\ &= T + 2\Delta \end{aligned}$$

Clave: C

Clave: A



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Si: $AA^T B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, hallar: $(ab + cd)$

- A) 243 B) 633 C) 121
D) 181 E) 377

2. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & -9 \\ 6 & 12 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular d_{22} , si: $D = (2A - \frac{1}{3}B)C$

- A) 24 B) 12 C) -2
D) -6 E) 30

3. Dado el polinomio:
- $P(x) = 2x^{19} + 2x - 4$
- y la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ hallar la traza de } P(A)$$

- A) -1 B) 1 C) 0
D) 4 E) -4

4. Si
- $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$
- /
- $a_{ij} = \begin{cases} 2i - j; & i \geq j \\ 2i + j; & i < j \end{cases}$

Además, de la igualdad matricial:

$$A^T B = \begin{bmatrix} n \\ 2n \\ 17 \end{bmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

Calcular la suma de los elementos de la matriz B.

- A) 6 B) 2 C) 10 D) 3 E) 8

5. Si
- $A = (a_{ij})_{n \times n}$
- , tal que
- $A^{11} = A$
- ; hallar:
- $A^{4563} + A^{503}$

- A) $2I$ B) $A^5 + A^6$ C) $2A^4$
D) $A + I$ E) $2A^3$

6. Si
- $A^2 = I$
- , hallar la traza de:
- $A^6 + A^4 + A^2 + I$
- ;
- $A_{2 \times 2}$
- .

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) Faltan datos

7. Si
- $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

hallar: $\text{Traz}(AB + BA)$

- A) 10 B) 24 C) -12
D) -24 E) 36

8. Si
- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$
- , hallar la suma de los elementos de la primera fila de:
- $A^{102} + A^{103}$
- .

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

9. Hallar la suma de los elementos de la matriz B, donde:
- $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^n$
- ;
- $n \geq 2$
- ;
- $n \in \mathbb{N}$
- .

Siendo: $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

- A) $\frac{n(n-1)}{2}$ B) $n(n+1)$ C) $-n(n+1)$
D) $n(1-n)$ E) $\frac{n(1-n)}{2}$

10. Dada la matriz
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
- , hallar la suma de elementos de la matriz
- A^n
- .

- A) $3^n + 2^n$ B) 2×3^n C) $n^2 + 2^n$
D) $5^n + 1$ E) 2^n

11. Sea
- $B = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{200}$
- , hallar la traza de

B, si: $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- A) 200 B) 300 C) 400
D) 500 E) 600

12. Si las matrices A y B son iguales, hallar la traza de
- $2A + 3C$
- , siendo:

$$A = \begin{bmatrix} 2w - 2z & 2z \\ -3 & -w \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & w - 3 \\ -3 & 2z - 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

$$C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- A) 4 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

13. Sea
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \wedge A + I = K$
- , calcular:
- $K + A^{2002}$
- .

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

14. Calcular
- $(A + B)(A - B)$
- , si:

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$

15. Si
- $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
- , calcular:
- $A + A^2 + A^3 + A^4$

$$\begin{array}{lll} \text{A)} \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} & \text{B)} \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{C)} \begin{bmatrix} 16 & 20 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \\ \text{D)} \begin{bmatrix} 10 & 16 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} & \text{E)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

16. Sea: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ a & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & b \end{bmatrix}$

hallar ab , si $AB = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 14 & 16 \end{bmatrix}$

- A) 6 B) 8 C) 12
D) 4 E) 10

17. Hallar la suma de todos los elementos de la matriz A, que satisface:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

18. Sea: $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ / $\text{Traz}(A) = 0 \wedge a_{12} + a_{21} = 0$
Además: $a_{11} = 5$; $a_{21} = -4$.
Hallar A^n , si n es par.

- A) $9^n I$ B) $9^{n/2} I$ C) $9^{n/4} I$
D) $9^{n/8} I$ E) $9^{n/10} I$

19. Escribir explícitamente la matriz:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 3} / a_{ij} = \begin{cases} 3 - j; i \geq j \\ i - j; i < j \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \text{A)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 6 \end{bmatrix} & \text{B)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix} & \text{C)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 8 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{D)} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 8 & 7 & -1 \end{bmatrix} & \text{E)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

20. Sean: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

hallar X, si: $2(x - 3A) = (B - C) + 4(X - A - B)$

$$\begin{array}{lll} \text{A)} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} & \text{B)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{C)} \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \text{D)} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} & \text{E)} \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

21. Sea la matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, definida de la siguiente forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j; i < j \\ ij; i = j \\ i + j; i > j \end{cases}$$

hallar la traza de AA^T

- A) -3 B) 0 C) 12
D) 24 E) 68

22. Si $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, además $F(x) \equiv x^2 - 5x + 3I$

hallar la traza de $F(A)$.

- A) 0 B) 5 C) 8 D) 12 E) 24

23. Dado el sistema matricial:

$$X + Y = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \wedge X - Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

hallar la traza de: $X^T Y^T$

- A) -3/4 B) 1/4 C) -15/4 D) 5/2 E) 5

24. En la igualdad:

$$\begin{bmatrix} a & 3 & 1 \\ 1 & c & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2 \\ 1 & b \\ d & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d + 12 & 29 \\ 7d + 4 & d + 21 \end{bmatrix}$$

Calcular d , si: $a, b, c, d \in \mathbb{N}$.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

25. Si:

$$A = (a_{ij})_{4 \times 5} \quad a_{ij} = \begin{cases} i - j; i < j \\ i + j; i \geq j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{5 \times 9} \quad b_{ij} = \begin{cases} i + j; i = j \\ i / j; i \neq j \end{cases}$$

hallar: $C_{25} + C_{11}$; si $C = AB = (C_{ij})_{4 \times 9}$

- A) 89/6 B) 18/7 C) -38
D) -66 E) -113

26. Si: $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{16} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{15} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{15}$$

hallar el valor de: $a_{12} + a_{21}$

- A) 3×2^{15} B) -3×2^{15} C) 0
D) 2^{15} E) 3^{15}

27. Si: $A = (a_{ij})_{4 \times 3}$ / $a_{ij} = \begin{cases} 2; i = j \\ -1; i \neq j \end{cases}$

hallar la suma de los elementos de A.

- A) 0 B) 3 C) -3 D) 2 E) -2

28. Sea $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcular la traza de A^{20} .

- A) 3 B) 0 C) 4
D) 24 E) 18

29. Hallar $w + x + y + z$ de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ w & x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 8 & 5 \\ 5 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

- A) 5 B) 6 C) 0 D) 7 E) 1

30. Determinar la suma de los valores de x que satisfacen la siguiente ecuación:

$$\begin{bmatrix} P(x) & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & x + 1 \end{bmatrix} = 0$$

donde: $P(x) = 2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2$

- A) -7/2 B) -7 C) 7/2 D) 3 E) 7

31. Hallar la traza de $(A - 5I)^{-1}$, sabiendo que la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} a & 7 & 5 \\ 0 & -a & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ verifica } A^2 - A - 21I = 0$$

- A) 13 B) 14 C) 15
D) 32 E) 3

32. Si $A^5 = 33I$, hallar la inversa de:

$$A^4 + 2A^3 + 4A^2 + 8A + 16I$$

- A) $A + 2I$ B) $A + 3I$ C) $A + I$
D) $A - 2I$ E) $A - 3I$

33. Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

hallar x en la ecuación $(Ax)^T = -A + 1$.

Dar como respuesta la suma de los elementos de la segunda fila de x .

- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

34. Si: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ¿cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

- A) $A^n = 1 \quad \forall n \text{ par}, n \in \mathbb{N}$
B) $A^n = A \quad \forall n \text{ impar}, n \in \mathbb{N}$
C) $|A^n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$
D) $|I + A^n| \neq 0 \quad \forall n \text{ par}, n \in \mathbb{N}$
E) $|I + A^n| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

35. Dada la matriz simétrica: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 2 & 0 \\ b & c & 4 \end{bmatrix}$

hallar la $\text{Traz}(A + A^{-1})$

- A) $35/4$ B) $17/4$ C) 3
D) 8 E) $19/2$

36. Resolver la ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e indicar la traza de X .

- A) 2 B) $11/10$ C) $9/10$
D) 0 E) $1/2$

37. Sea: $D = A^{-1}BA$; A es inversible, hallar: D^n ; $n \in \mathbb{N}$

- A) $A^{-n}BA$ B) $A^{-1}B^nA$ C) $A^{-1}BA^n$
D) $A^{-n}B^nA^n$ E) $-ABA$

38. Sean las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

hallar el determinante de:

$$A^3 + B^3 + ABA + BA^2 + B^2A + A^2B + AB^2 + BAB$$

- A) 1 B) 8 C) 36
D) 64 E) 1000

39. Si $A = |B| \cdot B^2$, hallar el valor de: $C = |A \cdot A^T| |A|$
Sabido que $|B| = 4$ y la matriz B es de orden 4.

- A) 4^{24} B) 4^{32} C) 4^{36}
D) 4^{42} E) 4^{64}

40. Si: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $A^2X = A^T$

hallar el mayor elemento de la matriz X .

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

41. Si: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, al resolver la ecuación

matricial $AX = B$, indicar el valor de verdad:

- I. X es singular
II. X es simétrica
III. Existe X^{-1}

- A) VVV B) VFV C) FFF
D) FFV E) VVF

42. Calcular $|A|$, si: $A = (a_{ij})_{8 \times 8}$, tal que: $a_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i \neq j \\ i & ; i = j \end{cases}$

- A) -120 B) 120 C) 7
D) 70 E) 36

43. Si $a = b + c + d$, hallar el valor de: $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

- A) $-2a$ B) $2a$ C) $-a$
D) a E) $3a$

44. Indicar el valor de verdad de:

- I. Si $A^n = 1$, entonces $|A| = 1$
II. Si $|A| \neq 0$, entonces $\det(3A^{-1}) = \frac{3}{|A|}$; A es de orden n .
III. $\det(A) = 0$, entonces A es la matriz nula.

- A) FVV B) VFF C) FFF
D) FVF E) FVF

45. Si $|A| = 3$, hallar: $||A| \cdot A| - ||A|A^{-1}|$. La matriz A es de orden n .

- A) 3^{n-1} B) 8×3^n C) $8 \times 3^{n-1}$
D) $10 \times 3^{n+1}$ E) 3^{n+1}

46. Calcular el valor del determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

- A) 54 B) 108 C) 81
D) 243 E) 27

47. Sean A y M , dos matrices de orden n , donde: $M = I - A(A^T A)^{-1} A^T$. Hallar $|M^T|$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) 2^n E) 3×2^n

48. Si: $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$; $A^2 = A$, hallar el valor de: $\det(A^{-1}) + \text{Traz}(2A)$

- A) 9 B) 7 C) 8
D) 27 E) Faltan datos

49. Calcular:
$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

- A) 4 B) 44 C) 43
D) 0 E) 42

50. Calcular:
$$\begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 \\ -a_1 & 0 & a_3 \\ -a_2 & -a_3 & 0 \end{vmatrix}$$

- A) 1 B) 0 C) $-a_1 a_2$
D) $a_3 a_1$ E) $a_1 a_2 a_3$

51. Indicar un factor de:
$$\begin{vmatrix} x+y & y & x \\ x & x+y & y \\ y & x & x+y \end{vmatrix}$$

- A) y^3 B) x^3 C) $x^2 y^2$
D) $2x^3 + 2y^3$ E) $x - 1/y$

52. Resolver la ecuación:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

- A) $\frac{abc}{ab+c}$ B) $\frac{abc}{ab+ac+bc}$ C) $\frac{2bc}{a}$
D) $a+b+c$ E) $\frac{2a+b}{c}$

53. Calcular:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

- A) 0 B) 3 C) -9 D) 9 E) 81

54. Hallar el valor de
$$\begin{vmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{11} - a_{12} \\ a_{21} + a_{22} & a_{21} - a_{22} \end{vmatrix}$$

si:
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 10$$

- A) -10 B) 8 C) -15
D) -20 E) 18

55. Si la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ x-3 & 0 & x-1 \\ 1 & x+2 & 3 \end{bmatrix}$ es singular,

hallar el menor valor de x .

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

56. Dada la ecuación:
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 2 & 0 & x & 0 \\ 3 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Indicar el cuadrado de una de las soluciones.

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 9 E) 14

57. Hallar el valor de:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 100 \end{vmatrix}$$

- A) 91! B) 100! C) 98!
D) 97! E) 96!

58. Resolver la ecuación matricial:

$$X \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix}$$

Indicar la suma de elementos de X .

- A) 2 B) 4 C) 0
D) -4 E) -2

59. Sea A una matriz cuadrada, tal que: $A^2 = 10I$, determinar: $(A - 3I)^{-1}$

- A) A B) $A - 2I$ C) $A + 3I$
D) $A - I$ E) No existe

60. Consideremos la matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$, tal que: $a_{ij} = 2i + 3j$, para todo valor admisible del i y de j . Hallar A .

- A) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 5 & 10 & 13 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 10 \\ 11 & 13 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

61. Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt[5]{2} & 0 \\ \sqrt[5]{8} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt[5]{4} \end{bmatrix}$

hallar: $\text{Traz}(A^{10})$

- A) 192 B) 144 C) 16
D) 48 E) 0

62. Hallar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a & b & c \\ 0 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 3 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

- A) 45 B) 45a C) 0
D) 15a E) 15

63. Sean B y C dos matrices definidas por:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 3/4 & -5/2 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Si A y X son matrices que satisfacen las ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A + C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ B + AB^T = (X - BC)^T \end{cases}$$

hallar la suma de los elementos de la matriz X .

- A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

64. Hallar la suma de los elementos de la diagonal principal de la matriz x ; que satisface la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- A) 8 B) 4 C) 10
D) 12 E) 16

65. Si A es una matriz antisimétrica definida por:

$$A = \begin{bmatrix} a-b & d & c \\ a & b+1 & -4 \\ e & 4 & c-2 \end{bmatrix}$$

hallar el valor de: $T = a + b + c + d + e$

- A) -1 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

66. Si A es una matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ y } B = A + A^3 + A^5 + \dots + A^{19} - A^{20}$$

hallar el valor de la traza de B^T .

- A) 1 B) 2 C) -10
D) -20 E) -2

67. Si la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & a-b & -1 \\ 2 & 3 & b \\ b-x & a-x & 4 \end{bmatrix}$

es simétrica, hallar $\text{Traz}(A^2)$.

- A) 30 B) 40 C) 34
D) 42 E) 38

68. Calcular el valor de:

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{2t}{1+t^2} \\ -\frac{2}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$$

- A) 1 B) $1+t$ C) $1-t$
D) $1+t^2$ E) $1-t^2$

69. Si la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x & 1 \\ x-3 & 0 & x-1 \\ 1 & x+2 & 3 \end{bmatrix}$$

es singular, hallar el menor valor de x .

- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

70. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

calcular: $|A|$

- A) 14 B) 7 C) 1 D) 28 E) 0

71. Resolver la ecuación:

$$\begin{bmatrix} 2+x & x & x \\ x & 3+x & x \\ x & x & 4+x \end{bmatrix} = 0$$

- A) $-\frac{12}{13}$ B) $-\frac{11}{13}$ C) $-\frac{9}{13}$
D) $\frac{8}{13}$ E) $\frac{11}{13}$

72. Si la matriz: $P = \begin{bmatrix} 0 & 3' & -1 \\ x+y & 2 & x \\ x-y & x & 0 \end{bmatrix}$ es simétrica,

entonces ¿qué se puede afirmar de $\begin{bmatrix} x & 2x-y \\ y-2 & y-x \end{bmatrix}$?

- A) Es nula.
B) Es matriz antisimétrica.
C) No es una matriz idempotente.
D) Es la matriz identidad.
E) No es involutiva.

73. Si se cumple que $\begin{bmatrix} a+1 & x \\ y & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & b \\ a-1 & y \end{bmatrix}$,

calcular: $\frac{x+y}{a}$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) -2

74. Si: $A = \begin{bmatrix} x-2 & 5 & y \\ -5 & y-3 & x \\ w & -x & z-x \end{bmatrix}$

es antisimétrica, calcular: $x + y + z + w$

- A) 0 B) 2 C) 4
D) 6 E) 10

75. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

calcular $\text{Traz}(AB)$.

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 4 E) 3

76. Dada la matriz: $A_n = \begin{bmatrix} n & 1 \\ 0 & 1-n \end{bmatrix}$

calcular: $A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

- A) $\begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

77. Hallar el valor de verdad acerca de las siguientes proposiciones.

- I. $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$; $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
II. Si: $AB = CB \Rightarrow A = C$
III. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; A es involutiva $\Leftrightarrow A^2 = I$

- A) FFV B) FVV C) FFF
D) VVF E) VFV

78. Hallar $\text{Traz}(A + B)$, al resolver el sistema matricial:

$$\begin{cases} A + 2B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\ A - 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- A) 1 B) 3 C) 4
D) 2 E) 5

79. Hallar la traza de A^{2004} , dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A) 3 B) 4 C) 5
D) 2004 E) 4008

80. Dada las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1+2i \\ i & 10 \end{bmatrix}; \quad i = \sqrt{-1},$$

calcular: $|\det(AB)|$

- A) 5 B) 25 C) 10
D) 15 E) 20

81. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} x^2+2x+2 & x^2-1 \\ x^2+1 & x^2-2x+2 \end{bmatrix}$;

calcular $|A|$, para: $x = 2004$

- A) 2004 B) 2000 C) 532 048
D) 10 E) 5

82. Dada la matriz $M = aI + bJ$; donde a, b son reales y $J^2 = -I$. Calcular $\det(M)$.

- A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) a^2-b^2 C) $\sqrt{a^2-b^2}$
D) a^2+b^2 E) a^2b^2

83. Sea la matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2^3 & 3^3 \\ 1 & 2^6 & 3^5 \end{bmatrix}$, calcular $|A|$.

- A) 72 B) 720 C) 780
D) 360 E) 120

84. Dado $A = \begin{bmatrix} n & 0 \\ -1 & 1-n \end{bmatrix}$; $n \in \mathbb{R}^+$, además:

$$A^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \text{ hallar } |A|$$

- A) 1 B) 2 C) 0
D) -1 E) -2

85. Sean las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} a-3b & a \\ 1 & a \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6-b \\ 1 & 6-a \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Si $A = B$, calcular: $|3A + 2C|$

- A) 1 B) 2 C) -30
D) 4 E) -35

86. Hallar el valor de: $\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 4 \\ 1 & 27 & 3 & 9 \\ 1 & 125 & 5 & 25 \\ 1 & 343 & 7 & 49 \end{vmatrix}$

- A) 120 B) 160 C) 180
D) 240 E) 264

87. Si A es una matriz cuadrada de orden n , tal que $A^{-1} = A \cdot A^T$. Hallar $|A|$.

- A) 1 B) 2 C) -2 D) $2n$ E) 1

88. Si S es el conjunto solución de la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2x-1 & 3x & x-2 \\ 2x+1 & x & 2x+1 \\ 2x-1 & 3x & 3x-2 \end{vmatrix} = 0$$

Indicar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

- I. $n(S) = 3$
II. $S = \emptyset$
III. La ecuación posee 3 raíces
IV. $S \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset$

- A) FFVV B) FFFF C) FVVF
D) VFVV E) VFVF

89. Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$, tal que $|A| \neq 0$, además: $f(x) = |A - xI|$;
 $g(x) = |A^{-1} - xI| \neq 0$ y $g(x) = h(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Determinar la función h .

- A) $\frac{x^n}{|A|^n}$ B) $x^n|A|$ C) $x^n(-1)^n|A|$
D) $\frac{x^n(-1)^n}{|A|^n}$ E) $\frac{x^n(-1)^n}{|A|}$

90. Si $A = (a_{ij})_{n \times n}$ es una matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

hallar el valor de $\det(A)$.

- A) $a^n + b^n$ B) $a^n + (-1)^{n+1} \cdot b^n$
C) $a^n + b^{n-1}$ D) $2a^n$
E) b^n

91. Si: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 8$, calcular

$$R = 6 \begin{vmatrix} b & a & c \\ e & d & f \\ h & g & i \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix}$$

- A) 24 B) -24 C) -100
D) -120 E) -150

92. Hallar $|A^{-1}|^2$, si: $\text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

- A) 1/27 B) 1/9 C) 1/81
D) 1/243 E) 1/4

93. Calcular el valor de: $\frac{y}{x+z}$, si: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = 0$

- A) 1/2 B) 1/4 C) 1/3 D) 1/5 E) 1/6

94. Si A es de orden 3×3 , $|A| = 2$, calcular $E = |A|A^2|A^T|$

- A) 32 B) 36 C) 216
D) 256 E) 264

95. Si B es una matriz definida por:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \sec^2 x & \tan^2 x & 3 \\ 4 & 4\cos^2 x & -4\sec^2 x & 1 \\ 5 & 5\sec^2 x & -5\cos^2 x & 7 \\ 6 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

hallar el valor de $|B|$.

- A) $\sec x \cos x$ B) $(\sec x \cos x)^2$
C) $\sec^2 x \tan^2 x$ D) $\sec^2 x + \tan^2 x$
E) 0

96. Si A es una matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}; \text{ hallar el valor de } |A|.$$

- A) $(a-b)^2$ B) $(a+b)^2$ C) $a^2 - b^2$
D) $(a^2 - b^2)^2$ E) 0

97. Si A es una matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a & 1 \\ a^2 & a^2 + 2a & 2a + 1 & 1 \\ a & 2a + 1 & a + 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

hallar el valor del $\det(A)$.

- A) $2a^3(a-1)^3$ B) $a^2(a-1)^4$ C) $a^4(a-1)^2$
D) $a(a-1)^5$ E) $(a-1)^6$

98. Hallar el valor de:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 97 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 98 \end{bmatrix}$$

- A) 92! B) 97! C) 98!
D) 99! E) 102!

99. Dada la matriz $J = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{bmatrix}$, si $n \in \mathbb{Z}^+$.

hallar: J^{4n+1}

- A) $\begin{bmatrix} 0 & -\alpha^{4n+1} \\ \alpha^{4n+1} & 0 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 0 & -\alpha^{4n-1} \\ -\alpha^{4n-1} & 0 \end{bmatrix}$
C) $\begin{bmatrix} -\alpha^{4n+1} & 0 \\ 0 & -\alpha^{4n+1} \end{bmatrix}$ D) $\begin{bmatrix} 0 & \alpha^{4n+1} \\ -\alpha^{4n-1} & 0 \end{bmatrix}$
E) $\begin{bmatrix} 0 & -2\alpha^{4n-1} \\ \alpha^{4n-1} & 0 \end{bmatrix}$

100. Suponga que A y B son matrices de orden n. Determinar el valor de verdad de:

- I. $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$
II. Si $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$, entonces A y B conmutan.
III. Si: A y B conmutan, entonces:
 $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

- A) FFV B) VVF C) FVV
D) VVV E) VVF

101. Indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. La matriz identidad es una matriz periódica.
II. Toda la matriz idempotente es una matriz periódica.

III. La matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, es periódica.

- A) VVV B) VFF C) FVF
D) FFF E) VVF

102. Dadas las matrices:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

se puede afirmar que $C^8 \cdot D^9$ es igual a:

- A) $\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 71 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} 72 & 8 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 73 & 9 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 73 \end{bmatrix}$

103. Considerar la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; n \in \mathbb{N}, \text{ calcular:}$$

$$A^n + (A^T)^n + A^{n-1} + (A^T)^{n-1} + \dots + A + (A^T)$$

- A) $\begin{bmatrix} 4n & -n \\ -n & -2n \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 4n & n \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} n & n \\ 1 & n \end{bmatrix}$
D) $\begin{bmatrix} 4n & 0 \\ 4n & 0 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 1 & 4n \\ 0 & -4n \end{bmatrix}$

104.

105. Indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

- I. A y B del mismo orden n ; conmutan $\Leftrightarrow A + KI$ y $B + KI$ conmutan.
 II. Si A es una matriz nilpotente de índice 2, entonces: $A(I + A)^{10} = A$.
 III. Si A es involutiva, entonces $1/2(I + A)$ y $1/2(I - A)$ son idempotentes.

A) VFF B) VVV C) FFF
 D) FVF E) FFV

106. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

hallar la suma de los elementos de A^{40} .

A) 6^{11} B) 6^4 C) 6^{14}
 D) 6^{18} E) 6^{30}

107. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. Si $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$, tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \leq j \\ 0, & i > j \end{cases}$,

entonces la suma de todos los elementos de la matriz $A^3 + 1$ es 6.

II. Si $A = \begin{bmatrix} a & 5 & 7 \\ a+2b & 2b & a+3c \\ 2b+3c & 20 & 3c \end{bmatrix}$, es una matriz

simétrica, entonces la traza de la matriz A es 16.

III. Si $B = \begin{bmatrix} a-3 & 4 \\ 3 & a-1 \\ -4 & 1 & a \end{bmatrix}$ es una matriz

antisimétrica, entonces el valor de $a = 0$

A) FVF B) VVV C) FVV
 D) VFF E) FFV

108. Sea la matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$, definida de la siguiente forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} i-j; & i > j \\ ij; & i = j \\ i+j; & i < j \end{cases}$$

Determinar la traza de matriz AA^T .

A) 15 B) 18 C) 48 D) 62 E) 68

109. Sean A y B dos matrices definidas por:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 3} / a_{ij} = \begin{cases} 0; & i = j \\ 1; & i < j \\ 2; & i > j \end{cases}$$

$$B = (b_{ij})_{3 \times 2} / b_{ij} = \begin{cases} 0; & i = j \\ 1; & i \neq j \end{cases}$$

hallar la suma de elementos de la matriz $A^T + B$.

A) 6 B) 7 C) 8
 D) 9 E) 10

110. Sea $N = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$.

determinar R, tal que $N + 1 = R$, e indicar $R + N$.

A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ B) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ C) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ E) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

111. Calcular $a - b$, si la matriz:

$$\begin{bmatrix} a+b & a+6 & b+9 \\ a-b & 2a & a+b+15 \\ 2a-b & 4b & 7a \end{bmatrix}$$

es triangular inferior.

A) 1 B) 0 C) 3
 D) 6 E) 9

CLAVES

1. B	15. B	29. E	43. D	57. A	71. A	85. E	99. A
2. D	16. A	30. A	44. B	58. A	72. D	86. D	100. C
3. A	17. A	31. C	45. C	59. C	73. B	87. A	101. A
4. A	18. C	32. D	46. E	60. B	74. C	88. A	102. E
5. D	19. E	33. C	47. A	61. E	75. A	89. D	103. A
6. E	20. A	34. E	48. B	62. B	76. D	90. B	104. B
7. C	21. C	35. A	49. D	63. D	77. A	91. D	105. C
8. E	22. A	36. D	50. B	64. C	78. E	92. B	106. C
9. B	23. E	37. D	51. D	65. A	79. A	93. A	107. E
10. D	24. B	38. A	52. B	66. E	80. A	94. D	108. D
11. B	25. D	39. C	53. A	67. E	81. E	95. E	109. C
12. B	26. B	40. D	54. D	68. A	82. A	96. D	110. C
13. C	27. C	41. D	55. C	69. C	83. B	97. E	111. C
14. B	28. A	42. B	56. E	70. E	84. E	98. B	

Teoría de ecuaciones

15

capítulo

Abu Abdallah Muḥammad ibn Mūsā al-Jwārizmī (Abu Yāffar), conocido generalmente como Al-Juarismi, fue un matemático, astrónomo y geógrafo persa musulmán, que vivió aproximadamente entre los años 780 y 850. Estudió y trabajó en Bagdad en la primera mitad del siglo IX, en la corte del califa Al-Mamun. Para muchos fue el más grande de los matemáticos de su época.

Debemos a su nombre y al de su obra principal, nuestras palabras «álgebra», «guarismo» y «algoritmo». De hecho, es considerado como el padre del álgebra y como el introductor de nuestro sistema de numeración denominado arábigo. En su tratado de álgebra *Hisāb al-ʿabr wa'l muqābala* (Compendio de cálculo por compleción y comparación), obra eminentemente didáctica, se pretende enseñar un álgebra aplicada a la resolución de problemas de la vida cotidiana del imperio islámico de entonces. La traducción de Rosen de las palabras de Al-Juarizmi describiendo los fines de su libro dan cuenta de lo que el sabio pretendía enseñar: la solución de ecuaciones. Sus ecuaciones son lineales o cuadráticas y están compuestas de unidades, raíces y cuadrados.



Fuente: Wikipedia

soluciones extrañas a dicha ecuación; para esto las soluciones encontradas deben comprobarse en la ecuación original y tomar como soluciones correctas a aquellas que se verifiquen.

Ejemplo:

1. Resolver: $x + \sqrt{x+5} = 7$

Resolución:

Transponiendo x al segundo miembro:

$$\sqrt{x+5} = 7 - x$$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$$(\sqrt{x+5})^2 = (7-x)^2$$

$$x+5 = 49 + x^2 - 14x \Rightarrow 0 = x^2 - 15x + 44$$

$$\Rightarrow (x-11)(x-4) = 0$$

$$\text{Luego: } x = 11 \wedge x = 4$$

Para saber cual es la solución que se ha introducido al elevar al cuadrado, se verifican los valores encontrados en la ecuación original.

$$\text{Para } x = 11: 11 + \sqrt{11+5} = 7$$

$$15 \neq 7 \text{ (no cumple)}$$

$$x = 4: 4 + \sqrt{4+5} = 7$$

$$7 = 7 \text{ (cumple)}$$

$\therefore$ La única solución es: $x = 4$

- IV. Si a los miembros de una ecuación se les extrae una misma raíz, es posible que se estén eliminando soluciones de dicha ecuación, para esto se debe recurrir a otros criterios.

Ejemplo:

1. Resolver: $(3x+7)^2 = (2x-5)^2$

Resolución:

Sacando raíz cuadrada a ambos miembros:

$$3x+7 = 2x-5 \Rightarrow x = -12$$

La otra solución se halla por el siguiente criterio:

$$a^2 = b^2 \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = -b \end{cases}$$

$$\text{Luego: } 3x+7 = -(2x-5) = -2x+5$$

$$x = -\frac{2}{5}$$

◀ ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Forma general: $ax + b = 0$

Resolución: $ax = -b$

Siendo: $a \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$

Análisis de la ecuación: $ax + b = 0$

- Si: $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow ax + b = 0$
La ecuación es compatible determinada.
- Si: $a \neq 0 \wedge b = 0 \Rightarrow ax + 0 = 0$
La ecuación es compatible.
- Si: $a = 0 \wedge b = 0 \Rightarrow 0x + 0 = 0$
La ecuación es compatible indeterminada.
- Si: $a = 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow 0x \pm b = 0$
La ecuación es incompatible o absurda.

Ejemplos:

1. Resolver: $\frac{2x+2}{9x^2-4} - \frac{x-2}{9x^2+12x+4} = \frac{x+4}{9x^2-4}$

Resolución:

Agrupando en un solo término las expresiones que tengan el mismo denominador:

$$\frac{x-2}{9x^2-4} = \frac{x-2}{9x^2+12x+4}$$

Si eliminamos $(x-2)$; hacemos:

$$x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Pero: } 9x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2/3$$

$$\text{Luego: } 9x^2 + 12x + 4 = 9x^2 - 4$$

$$-8 = 12x \Rightarrow x = -2/3$$

$\therefore$ Conjunto solución: 2

2. Resolver $\frac{(12\ 346)^2 - (24\ 961)^2}{(12\ 344)^2 - (24\ 689)^2} = \frac{3x+2}{3x-2}$

Resolución:

Desdoblado las diferencias de cuadrados:

$$\frac{(37\ 037)(-12\ 345)}{(37\ 033)(-12\ 345)} = \frac{3x+2}{3x-2}$$

Por la propiedad de proporciones.

$$\text{Si: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$$

$$\Rightarrow \frac{37\ 037 - 37\ 033}{37\ 033} = \frac{(3x+2) - (3x-2)}{3x-2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{37\ 033} = \frac{4}{3x-2} \Rightarrow \frac{1}{37\ 033} = \frac{1}{3x-2}$$

$$\text{Efectuando: } 3x-2 = 37\ 033 \therefore x = 12\ 345$$

3. Hallar x en las siguientes ecuaciones:

$$\bullet \quad 7x/6 - 5/3 = 3x/5 - 1/4$$

$$\bullet \quad \frac{x}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2x+7}{3} = \frac{2x+1}{9} + 3$$

$$\bullet \quad \frac{x-1}{4} = 7 - \frac{4+x}{4} - \frac{23-x}{5}$$

$$\bullet \quad (x+1)(2x-1) - (2x+1)(x-3) = 3[3(x+1) - 3] + 4$$

$$\bullet \quad 2/3x - 5/x = 7/10 - 3/2x + 1.$$

$$\bullet \quad \frac{x-a}{ab} - \frac{x-b}{ac} = \frac{x-c}{bc}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{a} + \frac{x}{a+b} = \frac{x}{a-b}$$

$$\bullet \quad \frac{4ax+1}{b} - 3 = \frac{3x}{b} + 2$$

Resolución:

- Trasladando las incógnitas a un solo miembro y los datos al otro se tendrá:

$$\frac{7x}{6} - \frac{3x}{5} = \frac{5}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{35x - 18x}{30} = \frac{20 - 3}{12}$$

$$\frac{17x}{30} = \frac{17}{12} \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

- Análogo al anterior, incógnitas a un miembro y los datos al otro:

$$\frac{x}{2} + \frac{2x+7}{3} - \frac{2x+1}{9} = 3 + \frac{1}{6}$$

$$\frac{9x + 12x + 42 - 4x - 2}{18} = \frac{18 + 1}{6}$$

$$\frac{17x + 40}{3} = 19 \Rightarrow 17x + 40 = 57$$

$$17x = 17 \quad \therefore x = 1$$

- Agrupando en un solo miembro a las fracciones que tienen igual denominador:

$$\frac{x-1}{4} + \frac{4+x}{4} = 7 - \frac{23-x}{5}$$

$$\frac{x-1+4+x}{4} = \frac{35-23+x}{5}$$

$$\frac{2x+3}{4} = \frac{12+x}{5} \Rightarrow 10x + 15 = 48 + 4x$$

$$6x = 33 \Rightarrow x = \frac{33}{6} \quad \therefore x = \frac{11}{2} = 5,5$$

- Efectuando en ambos miembros:

$$2x^2 + 2x - x - 1 - 2x^2 + 6x - x + 3 = 9x + 4$$

$$-2 = 3x \quad \therefore x = -\frac{2}{3}$$

- La ecuación puede escribirse:

$$\frac{2}{3x} - \frac{5}{x} + \frac{3}{2x} = \frac{7}{10} + 1$$

$$\frac{4-30+9}{6x} = \frac{7+10}{10}$$

$$-\frac{17}{6x} = \frac{17}{10} \Rightarrow -10 = 6x \quad \therefore x = -5/3$$

- Desdoblando cada fracción:

$$\frac{x}{ab} - \frac{1}{b} - \frac{x}{ac} + \frac{b}{ac} = \frac{x}{bc} - \frac{1}{b}$$

$$\frac{x}{ab} - \frac{x}{ac} - \frac{x}{bc} = \frac{-b}{ac} \Rightarrow \frac{x}{abc} (c-b-a) = \frac{-b^2}{abc}$$

$$\therefore x = \frac{b^2}{a+b-c}$$

- $\frac{1}{a} = \frac{x}{a-b} - \frac{x}{a+b}$

$$\frac{1}{a} = x \left(\frac{1}{a-b} - \frac{1}{a+b} \right) \Rightarrow \frac{1}{a} = x \left(\frac{a+b-a-b}{(a-b)(a+b)} \right)$$

$$x = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$$

- $\frac{4ax+1}{b} - \frac{3x}{b} = 3 + 2$

$$\frac{4ax+1-3x}{b} = 5 \Rightarrow 4ax - 3x + 1 = 5b$$

$$\Rightarrow x(4a-3) = 5b-1 \quad \therefore x = \frac{5b-1}{4a-3}$$

4. Resolver las ecuaciones irracionales:

- $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$

- $\sqrt{5+a} + \sqrt{a} = \frac{15}{\sqrt{5+a}}$

Resolución:

- Debe tenerse en cuenta que es una ecuación irracional, entonces una vez encontradas las

soluciones habrá que comprobarla en la ecuación original

$$\sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x-1}$$

Elevando al cuadrado:

$$x+4 = 1 + (x-1) + 2\sqrt{x-1} \Rightarrow 2 = \sqrt{x-1}$$

Nuevamente al cuadrado:

$$4 = x-1 \Rightarrow x = 5$$

Comprobando: $\sqrt{5+4} - \sqrt{5-1} = 1$

$$3 - 2 = 1 \text{ (cumple)}$$

$\therefore$ Única solución: $x = 5$

- Efectuando:

$$5 + a + \sqrt{5a+a^2} = 15$$

$$\sqrt{5a+a^2} = 10 - a$$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$$5a + a^2 = 100 - 20a + a^2$$

$$25a = 100 \Rightarrow a = 4$$

Comprobando:

$$\sqrt{5+4} + \sqrt{4} = \frac{15}{\sqrt{5+4}} = 3 + 2 = \frac{15}{3} \text{ (cumple)}$$

$\therefore$ Única solución: $a = 4$

5. Resolver:

$$\frac{2x^2}{x+1} - \frac{3x-2}{x} = \frac{x+2}{x} + \frac{2}{x+1}$$

Resolución:

Agrupando en un solo miembro aquellas fracciones con igual denominador.

$$\frac{2x^2}{x+1} - \frac{2}{x+1} = \frac{x+2}{x} + \frac{3x-2}{x}$$

$$\frac{2x^2-2}{x+1} = \frac{x+2+3x-2}{x}$$

$$\frac{2(x^2-1)}{x+1} = \frac{4x}{x} \Rightarrow 2(x-1) = 4 \quad \therefore x = 3$$

6. Resolver:

$$\frac{a+b}{x} + \frac{2b^2}{a^2-b^2} = \frac{a-b}{x} + \frac{a+b}{a-b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$$

Resolución:

De modo análogo al anterior:

$$\frac{a+b}{x} - \frac{a-b}{x} = -\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{2b^2}{a^2-b^2} + \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{a+b-a+b}{x} = \frac{-a^2-b^2-2b^2}{a^2-b^2} + \frac{(a+b)^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$\frac{2b}{x} = \frac{-a^2-b^2-2b^2+a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)}$$

$$\frac{2b}{x} = \frac{2ab-2b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{2b}{x} = \frac{2b(a-b)}{(a+b)(a-b)}$$

$\therefore$ Despejando: $x = a+b$

7. Si: $ax^3 + 2ax^2 - (a+3)x + 3a - 1 = 0$
determinar el valor de "a" para que la ecuación admita como raíz a (-2).

Resolución:

Si la ecuación admite como raíz a $x = -2$, implica que al reemplazar en la ecuación original, la verifica:

$$\begin{aligned} a(-2)^3 + 2a(-2)^2 - (a+3)(-2) + 3a - 1 &= 0 \\ -8a + 8a + 2a + 6 + 3a - 1 &= 0 \\ \Rightarrow 5a + 5 &= 0 \quad \therefore a = -1 \end{aligned}$$

8. Resolver:

$$\frac{x-3}{x-4} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x+2}{x+1} - \frac{x+3}{x+2}$$

Resolución:

Escribiendo cada numerador en función de su denominador. Por ejemplo, veamos para el primero:

$$\frac{(x-4)+1}{x-4} = \frac{x-4}{x-4} + \frac{1}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4}$$

Hagamos este artificio para todas las fracciones y se tendrá:

$$1 + \frac{1}{x-4} - 1 - \frac{1}{x-3} = 1 + \frac{1}{x+1} - 1 - \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{x-3-x+4}{(x-4)(x-3)} = \frac{x+2-x-1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= x^2 + 3x + 2 \\ \Rightarrow 10x &= 10 \quad \therefore x = 1 \end{aligned}$$

9. Resolver:

$$\frac{8}{3x-1} + \frac{2}{9x^2-1} = \frac{2}{3x-1}$$

Resolución:

Transponiendo el primer sumando del primer miembro al segundo:

$$\frac{2}{9x^2-1} = \frac{2}{3x-1} - \frac{8}{3x-1}$$

$$\frac{2}{(3x+1)(3x-1)} = \frac{-6}{3x-1}$$

$$\frac{1}{3x+1} = -3; \quad x \neq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow -9x - 3 = 1 \quad \therefore x = -\frac{4}{9}$$

10. Resolver para x cada caso siguiente:

$$\frac{x+a}{x-a} - \frac{x-a}{x+a} = \frac{a(2x+ab)}{x^2-a^2}$$

$$\frac{2(a+x)}{b} - \frac{3(b+x)}{a} = \frac{6(a^2-2b^2)}{ab}$$

Resolución:

Dando común denominador en el primer miembro:

$$\frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{a(2x+ab)}{x^2-a^2}$$

$$4ax = a(2x+ab); \quad x \neq \pm a$$

$$\Rightarrow 4x = 2x + ab \Rightarrow x = (ab/2)$$

Dando común denominador

$$\frac{2a(a+x) - 3b(b+x)}{ab} = \frac{6(a^2-2b^2)}{ab}$$

$$2a^2 + 2ax - 3b^2 - 3bx = 6a^2 - 12b^2$$

$$(2a-3b)x = 4a^2 - 9b^2$$

$$(2a-3b)x = (2a+3b)(2a-3b)$$

$$\therefore x = 2a + 3b$$

11. Hallar el valor de x en: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4} = 4$

Resolución:

La ecuación puede escribirse:

$$\sqrt{x+4} = 4 - \sqrt{x-4}$$

$$x+4 = 16 - 8\sqrt{x-4} + x-4$$

$$-8 = -8\sqrt{x-4} \Rightarrow \sqrt{x-4} = 1$$

$$\text{De donde: } x-4 = 1 \Rightarrow x = 5$$

Comprobando en la ecuación original:

$$\sqrt{5+4} + \sqrt{5-4} = 4 \text{ (cumple)}$$

$$\therefore \text{Única solución: } x = 5$$

12. Si la edad de Alberto es 3 veces la edad de Julio y juntos suman 52 años. ¿Cuántos años le llevará Alberto a Julio dentro de 5 años?

Resolución:

Sea x la edad de Julio, entonces Alberto tendrá $3x$

$$\text{Por dato: } x + 3x = 52$$

$$\Rightarrow x = 13$$

$$\text{Dentro de 5 años Julio tendrá: } x + 5 = 18$$

$$\text{Alberto tendrá: } 3x + 5 = 44$$

$$\therefore \text{Alberto le llevará a Julio dentro de 5 años:}$$

$$44 - 18 = 26 \text{ años}$$

13. Un número es tal que multiplicado por 2, por 3 y por 5 da tres números cuyo producto es 15 360. ¿Cuál es el número?

Resolución:

Sea a el número; del enunciado:

$$(2a)(3a)(5a) = 15\,360 \Rightarrow a^3 = 512 \Rightarrow a = 8$$

$$\therefore \text{El número es: } 8$$

14. Si el séxtuplo de la edad que tenía hace 5 años le resto el doble de la edad que tendré dentro de 15 años, obtengo mi edad. ¿Qué edad tengo?

Resolución:

Sea x mi edad, entonces:

$$6(x-5) - 2(x+15) = x$$

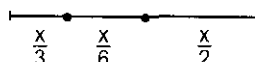
$$6x - 30 - 2x - 30 = x \Rightarrow x = 20$$

$$\therefore \text{Tengo 20 años.}$$

15. Un automovilista estima que si recorre 75 km más, completa la mitad de su viaje, del cual ya ha recorrido la tercera parte. Hallar la distancia que ha recorrido.

Resolución:

Del enunciado se puede esbozar el gráfico:



Por dato: $\frac{x}{6} = 75 \Rightarrow x = 450$

$\therefore$ Lo recorrido: $\frac{x}{3} = 150 \text{ km}$

16. Una persona tiene S/.120 y otra tan solo S/.50, después que cada una de ellas gastó la misma cantidad de dinero, a la primera le queda el triple de lo que le sobra a la segunda, ¿Cuánto les queda en conjunto a ambas personas?

Resolución:

Sea x la cantidad que gastaron:

$$120 - x = 3(50 - x)$$

Resolviendo: $x = 15$

Luego la primera queda con: $120 - 15 = 105$

La segunda queda con: $50 - 15 = 35$

$\therefore$ Les queda en conjunto: $105 + 35 = 140$

17. Una persona compra un grabado y paga por el marco lo mismo que el grabado. Si el marco costase 25 soles menos y el grabado 18,75 soles más, el marco costaría la mitad del grabado. ¿Cuál es el valor del grabado?

Resolución:

Sea x el costo del grabado. Luego el costo del marco también será x

Peró por dato:

$$x - 25 = \frac{x + 18,75}{2}$$

$$2x - 50 = x + 18,75 \Rightarrow x = 68,75$$

$\therefore$ El grabado cuesta: 68,75 soles

18. Al preguntar un padre a su hijo qué cantidad habla gastado de los 350 soles que le dio, este le contesta: "Las tres cuartas de lo que no gasté". ¿Cuánto gastó?

Resolución:

Sea x la cantidad que ha gastado el hijo.

No gastó: $350 - x$

Del enunciado: $x = \frac{3}{4}(350 - x)$

$$4x = 1050 - 3x \Rightarrow 7x = 1050 \Rightarrow x = 150$$

$\therefore$ Gastó 150 soles.

19. Se ha repartido 3900 soles entre dos obreros en partes proporcionales a sus jornales. Al primero le correspondió S/.1700 y su jornal es 50 soles menos que el del segundo. ¿Cuál es el jornal del primero?

Resolución:

Sea x el jornal del primero; luego del segundo será $x + 50$. Luego la constante de proporcionalidad estará dada por:

$$\frac{3900}{2x + 50}$$

Como al primero le toca 1700, entonces:

$$\left(\frac{3900}{2x + 50}\right)x = 1700$$

$$3900x = 3400x + 50(1700) \Rightarrow x = 170$$

$\therefore$ El jornal del primer obrero es de 170 soles.

20. Viajando a 100 km/h un piloto llegaría a su destino a las 19:00 horas, pero viajando a 150 km/h llegaría a las 17:00 horas, ¿A qué velocidad debe ir para llegar a las 18:00 horas?

Resolución:

Sea: x horas el tiempo de partida:

Primer caso

$$v = 100$$

$$t = 19 - x$$

Segundo Caso

$$v = 150$$

$$t = 17 - x$$

Como el espacio recorrido es el mismo en ambos casos puede establecerse que:

$$e = 100(19 - x) = 150(17 - x)$$

Resolviendo:

$$190 - 10x = 255 - 15x \Rightarrow x = 13$$

Se pide la velocidad para que llegue a las 18 horas es decir el tiempo empleado sería $18 - 13 = 5$

$$\text{Luego: } v = \frac{e}{t} = \frac{100(19 - 13)}{5} = \frac{600}{5}$$

$\therefore v = 120 \text{ km/h}$

21. Considerando: $x \neq 0$

Resolver:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}$$

Resolución:

Formando trinomios cuadrados perfectos en los numeradores:

$$\frac{(x+1)^2 + 1}{x + 1} + \frac{(x+4)^2 + 4}{x + 4} = \frac{(x+2)^2 + 2}{x + 2} + \frac{(x+3)^2 + 3}{x + 3}$$

Descomponiendo cada fracción:

$$\frac{(x+1)^2}{x+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{(x+4)^2}{x+4} + \frac{4}{(x+4)} = \frac{(x+2)^2}{x+2} + \frac{2}{x+2} + \frac{(x+3)^2}{x+3} + \frac{3}{x+3}$$

$$x+1 + \frac{1}{x+1} + x+4 + \frac{4}{x+4} = x+2 + \frac{2}{x+2} + x+3 + \frac{3}{x+2}$$

$$\frac{1}{x+1} - \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x+3} - \frac{4}{x+4}$$

$$\frac{-x}{x+2-2x-2} = \frac{-x}{(x+3)(x+4)} \Rightarrow -x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Por condición esta solución esta descartada, luego:

$$x^2 + 3x + 2 = x^2 + 7x + 12$$

$$4x = -10 \quad \therefore x = -\frac{5}{2}$$

22. Resolver:

$$\frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)} - \frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)} = \frac{5}{84}$$

Resolución:

Desdoblando el segundo miembro como:

$$\frac{5}{84} = \frac{1}{7} - \frac{1}{12}$$

$$\frac{(x+2)(x-4)}{7(x+3)(x-5)} - \frac{1}{7} = \frac{(x+4)(x-7)}{12(x+5)(x-8)} - \frac{1}{12}$$

Dando común denominador en ambos miembros:

$$\frac{x^2 - 2x - 8 - x^2 + 2x + 15}{7(x+3)(x-5)} = \frac{x^2 - 3x - 28 - x^2 + 3x + 40}{12(x+5)(x-8)}$$

$$x^2 - 2x - 15 = x^2 - 3x - 40 \quad \therefore x = -25$$

 23. Sean: $A = \sqrt{x+4}$; $B = \sqrt{x-1}$
 si al restar B de A se obtiene 1, hallar el valor de A:

Resolución:

$$A - B = 1$$

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$(\sqrt{x+4})^2 = (1 + \sqrt{x-1})^2$$

$$x + 4 = 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1$$

$$4 = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow 2 = \sqrt{x-1} \Rightarrow 4 = x - 1$$

$$x = 5 \text{ (comprobando, verifica en la ecuación original)}$$

$$\therefore A = \sqrt{x+4} = \sqrt{5+4} = 3$$

24. Hace 3 años, yo tenía el doble de tu edad en ese entonces. Dentro de 17 años yo tendré 5 veces la edad que tu tenías cuando yo tenía la edad que tu tendrás dentro de 7 años. ¿Que edad tengo?

Resolución:

	Pasado	Presente	Futuro
A	2x	2x + 3	2x + 20
B	x	x + 3	x + 20
	$2x + 20 = 5(z) \quad \dots (1)$		

 Dentro de 7 años B tendrá $x + 10$:

$$2x + 3 - (x + 10) = x - 7$$

x: es el tiempo entre presente y el pasado:

$$z = x + 3 - (x - 7) = 10$$

$$\text{En (1): } 2x + 20 = 5 \times 10$$

$$x = 15$$

$$\therefore A \text{ tendrá: } 2x + 3 = 33 \text{ años}$$

25. Dos alumnos A y B en el intermedio de clase van al pinball a jugar en la máquina Defender que les proporciona 3 naves a cada uno. Si los puntajes obtenidos por cada nave, antes de que la derriben, aparece en la tabla y además sabiendo que cada 30 000 puntos la máquina les proporciona otra nave. Determinar si seguirán jugando con una cuarta nave. Si A posee en total 2000 puntos más que B.

Nave Jugador	1. ^a	2. ^a	3. ^a
A	4x	5x - 500	3x + 3000
B	4x - 1000	4x + 4000	3x

Resolución:

PT(A): puntaje total de A

$$PT(A) = (4x + 5x - 500 + 3x + 3000)$$

PT(B): puntaje total de B

$$PT(B) = (4x - 1000) + 4x + 4000 + 3x$$

$$\text{Por dato: } PT(A) - PT(B) = 2000$$

$$(12x + 2500) - (11x + 3000) = 2000$$

$$x = 2500$$

$$PT(A) = (12x + 2500) = 32\,500 \quad \text{son mayores}$$

$$PT(B) = (11x + 3000) = 30\,500 \quad \text{que } 30\,000$$

 $\therefore$ Siguen jugando ambos

◀ SISTEMAS DE ECUACIONES

Es un conjunto formado por dos o más ecuaciones para dos o más incógnitas, las cuales se verifican simultáneamente para los mismos valores de las incógnitas.

Se llaman también ecuaciones simultáneas.

Por Ejemplo: $x^2y^2 + xy = 6 \quad \dots (I)$

$$x + y = 3 \quad \dots (II)$$

(I) y (II) forman un sistema de ecuaciones.

Conjunto solución de un sistema

Se llama solución particular o simplemente solución de un sistema a los correspondientes valores de las incógnitas que lo verifican, al conjunto de todas estas soluciones se les denomina conjunto solución del sistema (y es único).

Se tiene de (I): $(xy)^2 + xy - 6 = 0$

$$(xy + 3)(xy - 2) = 0$$

Donde: $xy = -3 \vee xy = 2$

$$\bullet \quad xy = -3; x + y = 3; t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{3 + \sqrt{21}}{2}$$

$$\bullet \quad xy = 2; x + y = 3 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = +2 \Rightarrow t = 1$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow y_3 = 1$$

$$x_4 = 1 \Rightarrow y_4 = 2$$

$$\therefore CS = \left\{ \left(\frac{3 + \sqrt{21}}{2}, \frac{3 - \sqrt{21}}{2} \right); \left(\frac{3 - \sqrt{21}}{2}, \frac{3 + \sqrt{21}}{2} \right); (2; 1); (1; 2) \right\}$$

Clases de sistemas

1. Sistema compatible: es aquel que al menos admite una solución. A su vez puede ser:

- **Sistema compatible determinado:** si el número de soluciones se puede enumerar, esto

ocurre cuando el número de ecuaciones independientes del sistema es igual al número de incógnitas.

Por ejemplo: $x^2y^2 + xy = 6$
 $x + y = 3$

- **Sistema compatible indeterminado:** si el número de soluciones no se puede enumerar, esto ocurre cuando el número de ecuaciones independientes del sistema es menor que el número de incógnitas.

Por ejemplo: $x + 2y + z = 5$
 $x + 4y + 3z = 11$

2. **Sistema incompatible:** denominado también sistema absurdo o inconsistente, es aquel que no admite alguna solución, esto ocurre cuando el número de ecuaciones independientes del sistema es mayor que el número de incógnitas.

Por ejemplo: $x + 5y = 7$
 $2x + 10y = 14$

3. **Sistemas equivalentes:** dos sistemas son equivalentes si tienen las mismas soluciones particulares, es decir el mismo conjunto solución.

◀ SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO

Sistema lineal de dos incógnitas

Ejemplo:

$$\begin{aligned} a_1x + a_2x &= a_3 & \dots(I) \\ b_1x + b_2y &= b_3 & \dots(II) \end{aligned}$$

Resolución:

1. **Método de reducción o eliminación**

$$\begin{aligned} b_2(I) : a_1b_2x + a_2b_2y &= a_3b_2 \\ a_2(II) : b_1a_2x + b_2a_2y &= b_3a_2 \end{aligned} \quad (-)$$

$$(a_1b_2 - b_1a_2)x = a_3b_2 - b_3a_2$$

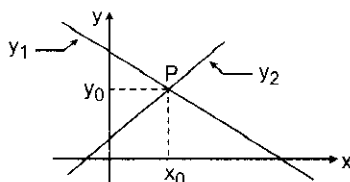
$$x = \frac{a_3b_2 - b_3a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Análogamente: $y = \frac{a_1b_3 - b_1a_3}{a_1b_2 - a_2b_1}$

2. **Método de Cramer**

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

3. **Método gráfico**



$$\text{De (I): } y_1 = \frac{-a_1}{a_2}x + \frac{a_3}{a_2}$$

$$y_2 = \frac{-b_1}{b_2}x + \frac{b_3}{b_2}$$

Donde: $(x_0; y_0)$ es la solución del sistema.

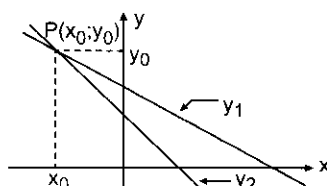
Análisis del sistema lineal. El sistema está formado por (I) y (II). Puede ser:

1. **Compatible determinado**

$$\text{Si: } \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_3}{b_3} \vee \Delta s \neq 0$$

$$\text{Gráficamente: } \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{-a_1}{a_2} \neq \frac{-b_1}{b_2}$$

Las rectas y_1 y y_2 tienen pendientes diferentes:

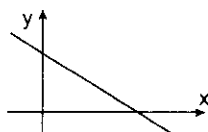


2. **Compatible indeterminado**

$$\text{Si: } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \vee \Delta x = \Delta y = \Delta s = 0$$

Gráficamente:

Las dos rectas y_1 y y_2 coinciden

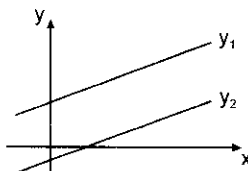


3. **Incompatible**

$$\text{Si: } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3} \vee \Delta s = 0, \Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0$$

Gráficamente:

$$\text{De: } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{-a_1}{a_2} = \frac{-b_1}{b_2}; \text{ de: } \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3} \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} \neq \frac{b_3}{b_2}$$



Sistema lineal de tres incógnitas

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y + a_3z &= a_4 & \dots(I) \\ b_1x + b_2y + b_3z &= b_4 & \dots(II) \\ c_1x + c_2y + c_3z &= c_4 & \dots(III) \end{aligned}$$

Resolución:

Por Cramer: $x = \frac{\Delta x}{\Delta s}; y = \frac{\Delta y}{\Delta s}; z = \frac{\Delta z}{\Delta s}$

$$\Delta s = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta x = \begin{vmatrix} a_4 & a_2 & a_3 \\ b_4 & b_2 & b_3 \\ c_4 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & a_4 & a_3 \\ b_1 & b_4 & b_3 \\ c_1 & c_4 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta z = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \end{vmatrix}$$

Análisis del sistema lineal de tres incógnitas. El sistema formado por (I), (II), (III) puede ser:

- Compatible determinado:** Si: $\Delta s \neq 0$
- Compatible indeterminado:** Si:
 $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta s = 0$
- Incompatible:** Si: $\Delta s = 0 \wedge \Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0, \Delta z \neq 0$

Ejemplos:

- Dado el sistema: $5xy = 12(x + y)$
 $5yz = 18(y + z)$
 $13xz = 36(x + z)$

Hallar: $x + y + z$

Resolución:

Las ecuaciones propuestas pueden escribirse:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{12} = \frac{15}{36} \quad \dots(1)$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} = \frac{5}{18} = \frac{10}{36} \quad \dots(2)$$

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{13}{36} \quad \dots(3)$$

$$(1) + (2) + (3): 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \frac{38}{36}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{36} \quad \dots(4)$$

$$(1) \text{ en } (4): z = 9$$

$$(2) \text{ en } (4): x = 4$$

$$(3) \text{ en } (4): y = 6$$

$$\therefore \text{ Se pide: } x + y + z = 4 + 6 + 9 = 19$$

- Calcular el valor de x del siguiente sistema:
 $ay + bx = c; \quad cx + az = b; \quad bz + cy = a$

Resolución:

Las ecuaciones pueden escribirse como:

$$bx + ay + 0z = c$$

$$cx + 0y + az = b$$

$$0x + cy + bz = a$$

Por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}} = \frac{a^3 - ac^2 - ab^2}{-abc - abc} = \frac{-a(c^2 + b^2 - a^2)}{-2abc}$$

$$\therefore x = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

- Resolver el sistema y dar como respuesta xy .

$$\sqrt{x + y + 5} - \sqrt{20x + 20y} = 0$$

$$\sqrt{x + 3} - \sqrt{\frac{2}{3}x - 1} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

Resolución:

Transformando el radical doble:

$$\underbrace{\sqrt{x + y + 5}}_{\text{suma}} - 2\underbrace{\sqrt{\frac{2}{3}(x + y)}}_{\text{producto}} = 0$$

Aplicando la regla práctica:

$$\sqrt{x + y} - \sqrt{5} = 0 \Rightarrow x + y = 5 \quad \dots(1)$$

Transformando la segunda ecuación:

$$\sqrt{x + 2} - \sqrt{\frac{9}{4}\left(\frac{2x}{3} - 1\right)} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{x + 2}}_{\text{suma}} - 2\underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)}}_{\text{producto}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{A radicales simples: } \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{x - \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{10} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{Despejando la incógnita: } \sqrt{x - \frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\text{Luego en (1): } x = 4; y = 1 \Rightarrow xy = 4$$

- Calcular el valor de m para que el sistema sea incompatible.

$$(m + 3)x + 2my = 5m - 9$$

$$(m + 4)x + (3m - 2)y = 2m + 1$$

Resolución:

Para que sea incompatible deberá cumplirse lo siguiente:

$$\frac{m + 3}{m + 4} = \frac{2m}{3m - 2} \neq \frac{5m - 9}{2m + 1} \quad \dots(I)$$

$$\text{Efectuando: } 3m^2 + 7m - 6 = 2m^2 + 8m$$

$$m^2 - m - 6 = 0$$

$$(m - 3)(m + 2) = 0 \Rightarrow m = 3 \wedge m = -2$$

$$\bullet \text{ Si } m = 3: \text{ en (I): } \frac{6}{7} = \frac{6}{7} \neq \frac{6}{7} \text{ (no puede ser)}$$

$$\bullet \text{ Si } m = -2: \text{ en (I): } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq \frac{-19}{-3} \therefore m = -2$$

- Resolver: $6x - 5y = -9$
 $4x + 3y = 13$

Dar como respuesta el valor de x .

Resolución:

Multiplicando por tres a la primera ecuación y por cinco a la segunda:

$$18x - 15y = -27$$

$$20x + 15y = 65$$

$$\text{Sumando: } 38x + 0 = 38 \therefore x = 1$$

- Hallar el valor de x si:
 $3 + 2(x + 4) = 5(y + 1) - 4$
 $5(x + 1) - 2y = 4(y + 1)$

Resolución:

Reduciendo cada ecuación:

$$2x - 5y = -10 \quad \dots(1)$$

$$5x - 6y = -1 \quad \dots(2)$$

La ecuación (1) por 6 y la ecuación (2) por 5:

$$\begin{array}{r} 12x - 30y = -60 \\ 25x - 30y = -5 \quad (-) \\ \hline -13x = -55 \end{array}$$

$$\therefore x = 55/13$$

7. Si $y = a + b/x$, con a y b constantes, determinar el valor de m en:

x	-1	-4	-2
y	2	5	m

Resolución:

Reemplazando valores de acuerdo al cuadro, se tendrá:

Para $x = -1$; $y = 2$, entonces.

$$2 = a - b \quad \dots(1)$$

Para $x = -4$; $y = 5$, luego:

$$\begin{aligned} 5 &= a - \frac{b}{4} \\ 20 &= 4a - b \quad \dots(2) \end{aligned}$$

Restando las relaciones (2) - (1)

$$18 = 3a \Rightarrow a = 6; \wedge b = 4$$

Finalmente para $x = -2$; $y = m$

$$m = 6 + \frac{4}{-2} \quad \therefore m = 4$$

8. Dado el sistema: $3x + 2y = a + 2$

$$2x - 3y = 2a - 1$$

determinar el valor de "a" para que x valga el doble de y .**Resolución:**Por dato: $x = 2y$

$$\bullet \quad 3(2y) + 2y = a + 2 \Rightarrow 8y = a + 2$$

$$\Rightarrow y = \frac{a+2}{8} \quad \dots(1)$$

$$\bullet \quad 2(2y) - 3y = 2a - 1$$

$$\Rightarrow y = 2a - 1 \quad \dots(2)$$

$$\text{Pero (1) = (2): } \frac{a+2}{8} = 2a - 1$$

$$a + 2 = 16a - 8 \quad \therefore a = 2/3$$

9. Si $P(x) = (a + b - c + 3)x^2 + (a - b + c - 2)x + (a - b - c - 1)$

es un polinomio idénticamente nulo, calcular:

$$a + b + c$$

Resolución:

Por ser idénticamente nulo:

$$a + b - c = -3 \quad \dots(1)$$

$$a - b + c = 2 \quad \dots(2)$$

$$a - b - c = 1 \quad \dots(3)$$

$$(1) + (2): 2a = -1 \Rightarrow a = -1/2$$

$$(1) - (3): 2b = -4 \Rightarrow b = -2$$

$$\text{En (2): } -\frac{1}{2} - (-2) + c = 2 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ Se pide: } a + b + c = -\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} = -2$$

10. Resolver el sistema:

$$mx + ny = m^2 + n^2$$

$$my + nx = m^2 - n^2$$

Resolución:Multiplicando a la primera ecuación por n y por m a la segunda:

$$mnx + n^2y = n(m^2 + n^2) \quad \dots(1)$$

$$m^2y + mnx = m(m^2 - n^2) \quad \dots(2)$$

Restando (1) - (2):

$$(n^2 - m^2)y = m^2n + n^3 - m^3 - mn^2$$

$$(n + m)(n - m)y = (n - m)(n^2 + nm + m^2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{m^2 + mn + n^2}{m + n}$$

$$\text{En (1): } mnx + n^2\left(\frac{m^2 + mn + n^2}{m + n}\right) = n(m^2 + n^2)$$

$$\Rightarrow x = \frac{m^2}{m + n} \quad \therefore x + y = \frac{2m^2 + mn + n^2}{m + n}$$

11. Una gallina le dice a otra: "Si yo triplicase mi producción diaria y tú la duplicaras, podríamos producir 151 huevos, pero si hiciéramos al revés solo produciríamos 139 huevos". ¿Cuántos huevos semanales recoge el dueño de estas dos gallinas?

Resolución:Sean x e y la producción de la primera y la segunda gallina, respectivamente:

$$3x + 2y = 151 \quad \dots(1)$$

$$2x + 3y = 139 \quad \dots(2)$$

La ecuación (1) por 3 y la ecuación (2) por 2:

$$9x + 6y = 453 \quad (-)$$

$$4x + 6y = 278$$

$$5x = 175 \Rightarrow x = 35$$

$$\text{En (1): } 3(35) + 2y = 151 \Rightarrow y = 23$$

$$\therefore \text{ Se pide: } 7(23 + 35) = 406 \text{ huevos}$$

12. Al dividir un terreno en dos partes, resulta que los $2/5$ de la primera parte miden igual que los $3/7$ de la segunda. Si el terreno mide 11 600 m², ¿Cuánto mide la parte mayor?

Resolución:Supongamos que el terreno se ha dividido en dos áreas que son x e y , respectivamente.

x	y
-----	-----

$$\text{Del enunciado: } \frac{2}{5}x = \frac{3}{7}y \Rightarrow y = \frac{14}{15}x \quad \dots(1)$$

Además: $x + y = 11\,600$... (2)

$$(1) \text{ en } (2): x + \frac{14}{15}x = 11\,600$$

$$\frac{29x}{15} = 11\,600 \Rightarrow x = 6000$$

En (1): $y = 5600$

∴ La mayor parte mide: 6000 m^2

13. En un teatro las entradas valen S/.65 y S/.25. Si al vender un total de 740 entradas se obtiene 38 500 soles, ¿cuántas entradas de S/.65 se vendió?

Resolución:

Sean: x : n.º de entradas vendidas de S/.65

y : n.º de entradas vendidas de S/.25

Del enunciado:

$$x + y = 740 \quad \dots(1)$$

$$65x + 25y = 38\,500$$

$$13x + 5y = 7700 \quad \dots(2)$$

Resolviendo (1) y (2): $x = 500$

∴ Se vendieron 500 entradas de S/.65

14. La razón del número de varones al de niñas, en un grupo era de 3 a 5. Después se fueron 24 niñas y llegaron 24 varones, con lo que la nueva razón de varones a niñas es de 5 a 3. ¿Cuántos varones había en el grupo?

Resolución:

Sea: V : n.º de varones y N : n.º de niñas.

Del enunciado:

$$\frac{V}{N} = \frac{3}{5} \Rightarrow N = \frac{5}{3}V \quad \dots(1)$$

Además:

$$\frac{V + 24}{N - 24} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3V + 72 = 5N - 120$$

$$3V + 72 = 5\left(\frac{5}{3}V\right) - 120 \Rightarrow V = 36$$

∴ El n.º de varones es: 36

15. Hallar la suma de dos números tales que dividiendo el mayor entre el menor su cociente sea 7 y el resto 4, y que la división del triple del mayor entre el doble del menor resulte de cociente 11 y resto 4.

Resolución:

Sean a y b los números ($a > b$)

$$1.^\circ \text{ caso: } \frac{a}{b} = 7 \Rightarrow r = 4$$

$$a = 7b + 4 \quad \dots(1)$$

$$2.^\circ \text{ caso: } \frac{3a}{2b} = 11 \Rightarrow r = 4$$

$$3a = 22b + 4 \quad \dots(2)$$

$$(1) \text{ en } (2): 3(7b + 4) = 22b + 4$$

$$21b + 12 = 22b + 4$$

De donde: $b = 8$; en (1): $a = 60$

∴ Se pide: $a + b = 68$

16. Dividir 46 en dos sumandos tales que dividiendo el primero por 7 y el segundo por 3, la suma de los cocientes sea 10. Dar como respuesta la diferencia de los mismos.

Resolución:

Sean a y b los sumandos:

De donde:

$$a + b = 46 \quad \dots(1)$$

$$\frac{a}{7} + \frac{b}{3} = 10 \Rightarrow 3a + 7b = 210 \quad \dots(2)$$

De (1) y (2): $b = 18$; $a = 28$

∴ Se pide: $a - b = 10$

17. Un estudiante se compromete a presentar a su padre la resolución de ocho problemas diarios. El padre da al hijo S/.9 por cada problema bien resuelto y el hijo abona a su padre S/.6 por cada problema que deje de presentar o este mal resuelto. Al cabo de 20 días el hijo ganó S/.540. ¿Cuántos problemas resolvió bien el estudiante?

Resolución:

Asumiendo que no se equivocó en ningún problema entonces debería haber cobrado:

$$(8)(9)(20) = 1440$$

Pero recibe: 540

Devolvió al padre: $1440 - 540 = 900$

Por cada problema mal resuelto pierde 15

Se equivocó en: $900 \div 15 = 60$

Recibió en total 160 problemas.

∴ Resolvió bien: $160 - 60 = 100$ problemas

18. Si un padre tiene ahora 2 años más que sus dos hijos juntos y hace 8 años tenía 3 veces la edad del hijo menor y dos veces la del mayor. ¿Qué edad tiene ahora el hijo mayor?

Resolución:

Sea: x : edad del hijo mayor

y : edad del hijo menor

Actualmente

$$P = x + y + 2$$

$$H = x$$

$$Hm = y$$

hace 8 años

$$x + y - 6$$

$$x - 8$$

$$y - 8$$

$$\text{Luego: } x + y - 6 = 3(y - 8) = 2(x - 8)$$

$$\bullet \quad x + y - 6 = 3(y - 8) \Rightarrow x + y - 6 = 3y - 24$$

$$x - 2y = -18 \quad \dots(1)$$

$$\bullet \quad 3(y - 8) = 2(x - 8) \Rightarrow 3y - 24 = 2x - 16$$

$$2x - 3y = -8 \quad \dots(2)$$

Resolviendo (1) en (2): $x = 38 \wedge y = 28$

∴ El hijo mayor tiene: $x = 38$ años.

19. Jaime le dice a Hugo: yo tengo el doble de la edad que tu tenías, cuando yo tenía la edad que tu tienes, si la suma de nuestras edades actuales es 42

años, ¿qué edad tendré cuando tengas la edad que yo tengo?

Resolución:

Haciendo un cuadro de edades:

	Pasado	Presente
Jaime	y	2x
Hugo	x	y

De donde: $2x + y = 42 \quad \dots(1)$

$y - x = 2x - y$
 $2y = 3x \quad \dots(2)$

(2) en (1): $2x + \frac{3x}{2} = 42 \Rightarrow \frac{7x}{2} = 42$
 $\Rightarrow x = 12$

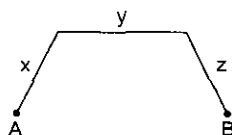
En (2): $y = 18$; luego la diferencia de edades es:
 $2x - y = 6$

$\therefore$ Cuando Hugo tenga 24 años Jaime tendrá 30.

20. Un automóvil sube una cuesta a 60 km/h y la baja a 90 km/h, el llano va a 80 km/h. Para recorrer 230 km de A hasta B, emplearía 3 horas, y en el regreso 10 min más. Calcular el camino llano que hay entre "A" y "B".

Resolución:

Graficando el recorrido:



Del enunciado: $x + y + z = 230 \quad \dots(1)$

Luego: $\frac{x}{60} + \frac{y}{80} + \frac{z}{90} = 3 \quad \dots(2)$

$\frac{x}{90} + \frac{y}{80} + \frac{z}{60} = 3 + \frac{10}{60} \quad \dots(3)$

$\therefore$ Resolviendo (1), (2) y (3): $y = 80$ km

21. Dado el sistema:

$(a+1)x + y + z = a+1 \quad \dots(1)$

$x + (a+1)y + z = a+3 \quad \dots(2)$

$x + y + (a+1)z = -2a-4 \quad \dots(3)$

Resolverlo si: $a \neq -3$

Resolución:

Sumando las tres expresiones:

$x(a+3) + y(a+3) + z(a+3) = 0$

$(a+3)(x+y+z) = 0$

Por condición: $a \neq -3$, lo que implica que:

$x + y + z = 0$

En (1): $ax + x + y + z = a+1$

$ax = a+1 \Rightarrow x = \frac{a+1}{a}$

En (2): $ay + y + x + z = a+3$

$ay = a+3 \Rightarrow y = \frac{a+3}{a}$

En (3): $az + x + y + z = -2a-4$

$az = -2a-4 \Rightarrow z = \frac{-2a-4}{a}$

22. Resolver: $x + y + z = 0 \quad \dots(1)$

$ax + by + cz = 0 \quad \dots(2)$

$bcx + cay + abz = 1 \quad \dots(3)$

Resolución:

Utilizando el criterio de reducción o eliminación:

(1)c: $xc + yc + zc = 0$
 (2): $ax + by + cz = 0 \quad (-)$
 $(a-c)x + (b-c)y = 0 \quad \dots(I)$

(1)ab: $abx + aby + abz = 0$
 (3): $bcx + cay + abz = 1 \quad (-)$
 $b(a-c)x + a(b-c)y = -1 \quad \dots(II)$

(I)b: $b(a-c)x + b(b-c)y = 0$
 (II): $b(a-c)x + a(b-c)y = -1 \quad (-)$
 $(b-c)(b-a)y = 1$

Luego: $y = \frac{1}{(b-a)(b-c)}$

Análogamente:

$x = \frac{1}{(a-b)(b-c)}; y = \frac{1}{(c-a)(c-b)}$

23. Resolver: $x + y + z = 1$

$ax + by + cz = d$

$a^2x + b^2y + c^2z = d^2$

Resolución:

Utilizando la resolución de Cramer:

$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-a & b-a & c-a \\ a^2-a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$\Delta s = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

$\Delta s = (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a)$

$\Delta s = (a-b)(b-c)(c-a)$

$\Delta x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (d-b)(b-c)(c-d)$

$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{(d-b)(b-c)(c-d)}{(a-b)(c-a)(b-c)} \Rightarrow x = \frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}$

Luego: $y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)} \wedge z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$

24. Un canal se puede hacer en 6 horas por 3 trabajadores, si el primero inicia su trabajo cuando los

otros dos han trabajado, entonces se necesita 4 horas y media más para la obra, si el segundo trabajador llega 3 horas más tarde que los otros dos, se necesita 4 horas más para la obra. ¿Cuántas horas necesita el trabajador más ocioso para acabar el canal sin la ayuda de los otros dos?

Resolución:

Trabajando solo en 1 hora

$$\begin{array}{lcl} 1 \text{ obrero} & \longrightarrow & x \longrightarrow 1/x \\ 2 \text{ obreros} & \longrightarrow & y \longrightarrow 1/y \\ 3 \text{ obreros} & \longrightarrow & z \longrightarrow 1/z \end{array}$$

Por dato: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{6} \quad \dots(1)$

$$7 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + 4 \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} \right) = 1 \quad \dots(2)$$

$$7 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right) + 4 \left(\frac{1}{y} \right) = 1 \quad \dots(3)$$

De (2): $6 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + 9 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 2$

$$6 \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{12} \quad \dots(4)$$

De (3): $7 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 3 \left(\frac{1}{y} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{18}$

$$\Rightarrow y = 18 \text{ horas}$$

En (4): $\frac{1}{z} = \frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36} \Rightarrow z = 36 \text{ horas}$

En (1): $\frac{1}{x} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} - \frac{1}{36} = \frac{1}{12} \Rightarrow x = 12 \text{ horas.}$

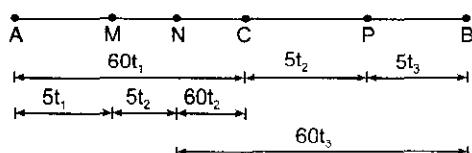
∴ El más ocioso necesitará 36 horas.

25. Dos poblaciones A y B distan 90 km. De A parten al mismo tiempo en dirección AB, un peatón y un automóvil con un pasajero, en un cierto punto intermedio C se baja el pasajero del auto y sigue caminando hasta B; el auto vuelve desde C en busca del peatón para llevarlo a B punto al que llegan al mismo tiempo el peatón que subió al auto y el pasajero que se bajó de él. Hallar el tiempo total que duró el viaje y el tiempo que anduvo a pie cada uno.

$$(v_{\text{auto}} = 60 \text{ km/h; } v_{\text{peatón}} = v_{\text{pasajero}} = 5 \text{ km/h})$$

Resolución:

Trasladando los datos a un gráfico:



Se pide: $t = t_1 + t_2 + t_3$

Se sabe: $e = vt$

Para el problema:

$$e_1 = 60t_1, e_2 = 5t_2, e_3 = 5t_3$$

Del dato: $60t_1 + 5(t_2 + t_3) = 90$

Simplificando: $12t_1 + t_2 + t_3 = 18 \quad \dots(1)$

También: $t_1 + t_2 + 12t_3 = 18 \quad \dots(2)$

$$\begin{array}{l} 60t_1 = 5t_1 + 5t_2 + 60t_2 \\ 11t_1 = 13t_2 \quad \dots(3) \end{array}$$

(1) = (2): $12t_1 + t_2 + t_3 = t_1 + t_2 + 12t_3 \Rightarrow t_1 = t_3$

En (1): $12t_1 + \frac{11}{13}t_1 + t_1 = 18 \Rightarrow t_1 = 1,3 \text{ horas}$

$$t_2 = 1,1 \text{ horas; } t_3 = 1,3 \text{ horas}$$

Luego: $t = 1,1 + 1,3 + 1,3 = 3,7 \text{ horas}$

$$t_p = t_2 + t_3 = 2,4 \text{ horas}$$

26. Resolver: $(b+c)(y+z) - ax = b-c$

$$(c+a)(z+x) - by = c-a$$

$$(a+b)(x+y) - cz = a-b$$

Resolución:

Desdoblando los factores en las ecuaciones se tendrá:

$$(b+c)y + (b+c)z - ax = b-c \quad \dots(1)$$

$$-by + (c+a)z + (c+a)x = c-a \quad \dots(2)$$

$$(a+b)y - cz + (a+b)x = a-b \quad \dots(3)$$

$$(1) + (2) + (3): (a+b+c)(x+y+z) = 0$$

Luego, podemos decir que: $x + y + z = 0$

En (1): $(b+c)(-x) - ax = b-c$

$$-x(a+b+c) = b-c$$

$$\therefore x = \frac{c-b}{a+b+c}$$

(1) + (2): $cy + (a+b+c)z + cx = b-a$

$$cy + (a+b+c)z + cz + cx = b-a$$

$$c(x+y+z) + (a+b+c)z = b-a$$

$$(a+b+c)z = b-a$$

$$\therefore z = \frac{b-a}{a+b+c}$$

Como: $x + y + z = 0$

$$y = - \left(\frac{b-a}{a+b+c} \right) - \left(\frac{c-b}{a+b+c} \right) = \frac{-b+a-c+b}{a+b+c}$$

$$\therefore y = \frac{a-c}{a+b+c}$$

27. Resolver:

$$(c+a)y + (a+b)z - (b+c)x = 2a^3$$

$$(a+b)z + (b+c)z - (c+a)y = 2b^3$$

$$(b+c)x + (c+a)y - (a+b)z = 2c^3, \text{ e indicar } z.$$

Resolución:

Haciendo: $(b+c)x = m; (c+a)y = n; (a+b)z = p.$

En las ecuaciones tendremos:

$$n + p - m = 2a^3 \quad \dots(1)$$

$$m + p - n = 2b^3 \quad \dots(2)$$

$$m + n - p = 2c^3 \quad \dots(3)$$

$$(1) + (2): 2p = 2(a^3 + b^3)$$

$$\text{Reponiendo a y b: } 2(a + b)z = 2(a^3 + b^3)$$

$$\Rightarrow (a + b)z = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore z = a^2 - ab + b^2$$

28. Calcular n para que el sistema:

$$nx + y = 1$$

$$x + y = 2$$

$$x - y = n, \text{ sea compatible.}$$

Resolución:

$$\text{Si el sistema: } ax + by = c$$

$$dx + ey = f$$

$$gx + hy = j$$

es compatible, se debe cumplir que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Para el problema: } \begin{vmatrix} n & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & n \end{vmatrix} = 0$$

$$n^2 - 1 + 2 - 1 + 2n - n = 0$$

$$n^2 + 2n - n = 0$$

$$n(n + 1) = 0 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow n = -1$$

Comprobando y reemplazando los valores de n :

$$\text{Si } n = 0: y = 1 \wedge x = 1$$

$$\text{Si } n = -1: x - y = -1 \wedge x + y = 2$$

$x - y$ no es independiente, el sistema tiene solución.

29. Cuando yo tenga la edad que el tiene, que es lo que tenías cuando el tenía la edad que yo tengo, el tendrá la edad que tienes y a ti te faltará 15 años para duplicar la edad que yo tengo. ¿Cuántos años tengo, si hace 10 años tenía la mitad de la edad que tienes?

Resolución:

	Pasado	Presente	Futuro
Yo		y	x
Tú	x	z	$2y - 15$
El	y	x	z

$$y - 10 = \frac{z}{2} \quad \dots(I)$$

$$x - y = z - x \Rightarrow 2x = y + z \quad \dots(II)$$

$$z - x = 2y - 15 - z \Rightarrow 2z = 2y + x - 15 \quad \dots(III)$$

$$\text{De (I): } z = 2y - 20$$

$$\text{En (II): } 2x = 3y - 20 \quad \dots(1)$$

$$\text{En (III): } 2y - x = 25 \quad \dots(2)$$

$$(1) + 2(2): 4y = 3y - 20 + 50 \quad \therefore y = 30$$

◀ SISTEMAS LINEALES: EL MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS Y GAUSS-JORDAN

En esta sección, presentaremos un método sistemático para la resolución de sistemas lineales de cualquier ta-

maño. La idea del método es bastante sencilla: ir reduciendo en cada paso el sistema a otro (equivalente) que tiene una ecuación menos y una incógnita menos. Este método es conocido como método de escalización, método de eliminación de Gauss o método de eliminación gaussiana. Los dos últimos nombres aluden a que en cada paso vamos eliminando a una o más incógnitas, y son un reconocimiento a quien introdujo el método: el matemático Carl Friederich Gauss (1777-1855).

La solución directa de sistemas de ecuaciones lineales conlleva esencialmente dos etapas: transformación del sistema original a otro sistema equivalente más simple y luego la solución del nuevo sistema equivalente. La transformación del sistema original a uno más simple toma muchas formas, la más importante de ellas es el proceso de eliminación gaussiana.

Para los procesos de transformación de un sistema de ecuaciones lineales, debemos tener en cuenta algunos aspectos a saber:

Teorema

Si en un sistema lineal de ecuaciones se sustituye una ecuación por el resultado de sumar a esa misma ecuación un múltiplo de otra, entonces el sistema resultante es equivalente al original.

Demostración: supongamos que el sistema original sea:

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

y que sumamos a la ecuación j el resultado de multiplicar ambos miembros de la ecuación i por un número β . Obtenemos un nuevo sistema:

$$(S') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n + \beta(a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n) = \beta b_i, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para probar que ambos son equivalentes deberemos ver que cualquier solución de S es solución de S' y viceversa. Es decir, que $\text{sol}(S) = \text{sol}(S')$, donde $\text{sol}(S)$ y $\text{sol}(S')$ son los conjuntos de S y S' , respectivamente. Veamos primero que cualquier solución de S es solución de S' . Sea $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ una solución de (S) . Es claro que $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ satisface todas las ecuaciones de (S') pues son las mismas que las de (S) salvo, tal vez, la j -ésima. Como $(\alpha_1; \alpha_2; \dots; \alpha_n)$ debe verificar la i -ésima y j -ésima ecuación de (S) se tiene que:

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i,$$

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n = b_j.$$

Multiplicando ambos miembros de la primera igualdad por β y sumando miembro a miembro, se deduce inmediatamente que:

$$a_{j1}\alpha_1 + \dots + a_{jn}\alpha_n + \beta(a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n) = b_j + \beta b_i$$

por lo tanto, también la j -ésima ecuación de S' se satisface.

La verificación de que cualquier solución de S' es también solución de S emplea esencialmente el mismo argumento. Igual que antes es claro que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ debe verificar todas las ecuaciones de (S) salvo tal vez la j -ésima. Por la j -ésima ecuación en S' sabemos que:

$$a_{j1}\alpha_1 + \dots + a_{jn}\alpha_n + \beta(a_{i1}\alpha_1 + \dots + a_{in}\alpha_n) = b_j + \beta b_i$$

en tanto que la i -ésima implica

$$a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$$

Multiplicamos ambos miembros de la i -ésima por β , y restamos de la ecuación que ocupa el lugar j , para concluir.

$$a_{j1}\alpha_1 + a_{j2}\alpha_2 + \dots + a_{jn}\alpha_n = b_j$$

Esto muestra que $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \text{sol}(S)$ y la prueba está concluida.

El teorema anterior es el fundamento teórico del método de eliminación que presentaremos y nos asegura que en cada paso respetaremos la equivalencia entre el sistema de partida y el de llegada.

En el proceso de eliminación hay veces en que es imprescindible intercambiar ecuaciones. Junto con la transformación de sumar a una ecuación un múltiplo de otra, esto es todo lo que necesitaremos para el método de eliminación de Gauss, o escalerización. Además de estas operaciones recurriremos a la de multiplicar una ecuación por algún número distinto de cero. Llamaremos transformaciones elementales a estas operaciones. Es decir, a las siguientes operaciones efectuadas a las ecuaciones de un sistema lineal:

1. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.
2. Intercambiar de lugar dos ecuaciones.
3. Multiplicar una ecuación por un número distinto de cero.

Observaciones

Notemos que cuando una ecuación es sustituida por el resultado de sumarle un múltiplo de otra, la información contenida en la ecuación eliminada no desaparece: está implícita en la nueva ecuación, porque la ecuación sustituida entró con un coeficiente no nulo en la formación de esta nueva ecuación (en la mayoría de los casos este coeficiente será igual a 1). Esta nueva ecuación, junto con la que se usó en la combinación lineal, permiten recuperar la ecuación eliminada.

Notación matricial

Al trabajar con un sistema de ecuaciones, la representación de las incógnitas (x, y, z , o $x_1, \dots, x_n$, etc.) no desempeña ningún papel importante y puede usarse

cualquiera. De hecho, para determinar las soluciones de un sistema es suficiente con conocer los coeficientes y el término independiente del mismo. Naturalmente no alcanza con conocer los valores de estos números, sino que es necesario saber el lugar que ocupan: a qué ecuación pertenecen y a qué incógnita multiplican. Por esto resulta conveniente introducir la noción de matriz. Llamaremos matriz A de m filas por n columnas (o simplemente matriz $m \times n$) de entradas.

$$a_{ij}, i = 1; 2; \dots; m \wedge j = 1; 2; \dots; n$$

En un cuerpo $\mathbb{K}$, a un ordenamiento rectangular de números.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

En general indicaremos con mayúsculas las matrices, y con la letra minúscula correspondiente a sus entradas.

Por ejemplo, a la matriz A con entradas a_{ij} la indicaremos por:

$$A = ((a_{ij}))$$

$$i = 1; \dots; m$$

$$j = 1; \dots; n$$

o más brevemente $A = ((a_{ij}))$, cuando las dimensiones estén claras. El primer índice i , indica la fila y el segundo índice j , la columna a la que pertenece la entrada.

Dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y las mismas entradas en las mismas posiciones. Dicho de otro modo, si A y B son dos matrices $m \times n$, entonces $A = B$ si y solo si:

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i = 1; \dots; m; j = 1; \dots; n$$

Dos matrices de distinto tamaño jamás pueden ser iguales.

Dado un sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Llamaremos matriz del sistema a la matriz A , cuya dimensión $m \times n$ es igual al tamaño del sistema, formada por sus coeficientes. Esto es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Llamaremos matriz ampliada del sistema a la matriz $m \times (n+1)$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & a_m \end{bmatrix}$$

que incorpora los términos independientes. Corrientemente escribiremos esta matriz en la forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

para recordar que estamos considerando la matriz ampliada de un sistema, cuya última columna tiene un significado diferente a las anteriores. También las representaremos en la forma breve $A|B$. Naturalmente, toda la información que necesitamos sobre el sistema lineal está encerrada en la matriz ampliada $A|B$. Veremos más adelante que, en realidad, mucha de la información relevante acerca del sistema solo depende de la matriz A formada por sus coeficientes.

La definición anterior introduce una notación más compacta (matricial) para un sistema de ecuaciones.

Por ejemplo: consideremos el sistema

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$$

Entonces la matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad A|B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

Esta notación más compacta simplificará la escritura e implementación del algoritmo de eliminación de Gauss.

Antes de mostrar con un ejemplo la implementación del método de escalerización con la notación matricial, vale la pena hacer algunas observaciones.

Observaciones

Cada fila de la matriz del sistema corresponde a una de las ecuaciones del sistema. Las operaciones del método de escalerización se traducirán entonces en operaciones sobre las filas de la matriz. En particular, las transformaciones elementales serán, en este contexto, las siguientes:

1. Sumar a una fila el resultado de multiplicar otra por un número cualquiera.
2. Intercambiar de lugar dos filas.
3. Multiplicar una fila por un número $\alpha \neq 0$.

Cada incógnita del sistema queda en correspondencia con una de las columnas de la matriz A del sistema.

Una entrada a_{ij} igual a 0 en la matriz A es equivalente a que la incógnita x_j no aparezca en la i -ésima ecuación.

Observaciones

Llamaremos pivote a la primera entrada no nula de cada fila de una matriz. Con esta terminología podemos describir la eliminación de Gauss como un procedimiento que busca, a través de la aplicación reiterada de las transformaciones elementales, dejar un único pivote por columna. En cada paso de la escalerización, una vez escogido un pivote, lo empleamos para eliminar todos los pivotes de la misma columna.

Llamaremos matriz escalerizada a una matriz que cumpla las siguientes condiciones:

1. Todas las filas, salvo quizás la primera, comienzan con una sucesión de ceros;
2. Cada fila tiene al principio por lo menos un cero más que la fila inmediata superior.

Escalerizar una matriz es llevarla a una forma escalerizada por medio de transformaciones elementales.

Si E es una matriz que se obtiene escalerizando otra matriz A , entonces diremos que E es una forma escalerizada de A . Diremos que un sistema está escalerizado si su matriz ampliada lo está. Escalerizar un sistema es encontrar otro sistema escalerizado equivalente. Naturalmente, escalerizar un sistema es equivalente a escalerizar la matriz ampliada del sistema.

Por ejemplo: resolver en $\mathbb{R}$ el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + x_6 = 1 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_6 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 + 3x_6 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + 3x_6 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 9x_5 + 3x_6 = -1 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 9 & 3 & -1 \end{array} \right]$$

El proceso comienza fijando la entrada no nula de primera fila como pivote y utilizándola para lograr ceros en el resto de la primera columna. El resultado es la matriz

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & -f_2 + f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -f_4 - f_1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 8 & 2 & -f_5 - f_1 \end{array} \right]$$

Hemos anotado al margen de la matriz las transformaciones que en este primer paso de la escalerización

fueron hechas a la matriz ampliada del sistema. Creemos que la notación empleada se explica por sí sola.

Continuamos nuestro algoritmo usando el pivote 2 de la entrada a_{34} . He aquí la matriz que se obtiene, junto con la indicación de las operaciones realizadas:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \end{array} \right] \rightarrow f_5 - 2f_3$$

En el tercer paso operaremos sobre la sexta columna:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \rightarrow f_5 + f_4$$

Ya tenemos la forma escalerizada, con pivotes en las columnas primera, tercera, cuarta y sexta. El sistema lineal, equivalente al sistema original en el sentido de que tiene exactamente las mismas soluciones, que corresponde a esta matriz es:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &= 1 \\ 2x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\ 2x_4 + 4x_5 + 2x_6 &= 0 \\ 2x_6 &= 2 \end{aligned}$$

De la última ecuación resulta $x_6 = 1$. Con esta información vamos a la tercera y concluimos: $x_4 + 2x_5 = -1$

Esto no permite determinar x_4 ni x_5 , pero podemos dejar expresada una incógnita en términos de la otra. Expresemos x_4 , una variable que corresponde a una columna con un pivote en la forma escalerizada, en términos de x_5 , como: $x_4 = -1 - 2x_5$

Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$x_3 = \frac{x_5}{2} + 1$$

Combinando toda esta información con la primera ecuación resulta: $x_1 + 2x_2 + \frac{3x_5}{2} + 1 = 0$

Nuevamente escogemos despejar la variable que corresponde al pivote para escribir: $x_1 = -2x_2 - \frac{3x_5}{2} - 1$

Concluimos entonces que todas las soluciones del sistema son de la forma:

$$(-1 - 2x_2 - 3x_5/2; x_2; 1 + x_5/2; -1 - 2x_5; x_5; 1),$$

donde x_2 y x_5 son dos parámetros reales que podemos fijar a nuestro antojo. La solución no es única, pero puede describirse completamente en términos de las variables x_2 y x_5 .

Método de eliminación gaussiana

Este método también se denomina de reducción escalonada o de escalerización. Para transformar el sistema en uno que sea escalonado se combinarán las ecuaciones entre sí (sumándolas, restándolas, multiplicándolas por un número, etc.).

Por ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A) \\ 3x + 4y - 6z = 5 & (B) \\ 5x - 2y + 4z = -7 & (C) \end{cases}$$

La 1.ª ecuación siempre se deja igual, (procurando que esta sea la más sencilla) y a la 2.ª y 3.ª ecuación se debe anular el término que lleva la x .

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A) \\ 3x + 4y - 6z = 5 & (B) \\ 5x - 2y + 4z = -7 & (C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A') = (A) \\ -y + 9z = 13 & (B') = -3(A) + 2(B) \\ -19y + 43z = -9 & (C') = -5(A) + 2(C) \end{cases}$$

Una vez que hemos anulado los términos en x , debemos dejar fija la 1.ª y 2.ª ecuación y anular el término que lleva la y en la 3.ª ecuación.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 7z = -1 & (A'') = (A') \\ -y + 9z = 13 & (B'') = (B') \\ -128z = -256 & (C'') = -19(B') + (C') \end{cases}$$

De la última ecuación obtenemos que $z = -256/-128 = 2$, que sustituyendo en B resulta:

$$-y + 9 \times 2 = 13 \Rightarrow y = 5$$

y a su vez sustituyendo en A'' obtenemos que:

$$2x + 3 \times 5 - 7 \times 2 = -1 \Rightarrow x = -1$$

Por lo tanto, la solución del sistema es:

$$(x; y; z) = (-1; 5; 2)$$

Veamos otro ejemplo:

Ilustraremos el método de Gauss aplicando el procedimiento a un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, pero trabajando con la matriz del sistema:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 12 \\ 12x_1 - 8x_2 + 6x_3 + 10x_4 &= 34 \\ 3x_1 - 13x_2 + 9x_3 + 3x_4 &= 27 \\ -6x_1 + 4x_2 + x_3 - 18x_4 &= -38 \end{aligned}$$

Este sistema genera lo siguiente:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & 12 \\ 12 & -8 & 6 & 10 & 34 \\ 3 & -13 & 9 & 3 & 27 \\ -6 & 4 & 1 & -18 & -38 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 34 \\ 27 \\ -38 \end{bmatrix}$$

En el primer paso, multiplicaremos la primera ecuación por $12/6 = 2$ y la restamos a la segunda, después multiplicamos la primera ecuación por $3/6 = 1/2$ y la

restamos a la tercera y finalmente multiplicamos la primera ecuación por $-6/6 = -1$ y la restamos a la cuarta. Los números 2, $1/2$ y -1 son los multiplicadores del primer paso del proceso de eliminación. El número 6 es el elemento pivote de este primer paso y la primera fila, que no sufre modificación alguna, se denomina fila pivote. El sistema en estos momentos tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 21 \\ -26 \end{bmatrix}$$

En el siguiente paso del proceso, la segunda fila se emplea como fila pivote y -4 como elemento pivote. Aplicamos de nuevo el proceso: multiplicamos la segunda fila por $(-12/-4) = 3$ y la restamos de la tercera fila y después multiplicamos la segunda fila por $2/(-4) = -1/2$ y la restamos a la cuarta fila. Los multiplicadores son en esta ocasión 3 y $-1/2$ y el sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -21 \end{bmatrix}$$

El último paso consiste en multiplicar la tercera ecuación por $(4/2) = 2$ y restarla a la cuarta. El sistema resultante resulta ser:

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

El sistema resultante es triangular superior y equivalente al sistema original (las soluciones de ambos sistemas coinciden). Luego el sistema se transforma en:

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 12 \\ -4x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 10 \\ 2x_3 - 5x_4 &= -9 \\ -3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

La solución del sistema es: $(x_1; x_2; x_3; x_4) = (1; -3; -2; 1)$; o en todo caso:

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Generalización del método de eliminación de Gauss

Consideremos un sistema de n ecuaciones con n incógnitas:

$$\{1\} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Dividiendo la primera ecuación por a_{11} :

$$(2) \quad x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1$$

e introduciendo la expresión de x_1 que resulta de (2) en las restantes ecuaciones (1), se obtiene:

$$(3) \begin{cases} A'_{22}x_2 + A'_{23}x_3 + \dots + A'_{2n}x_n = B'_2 \\ A'_{32}x_2 + A'_{33}x_3 + \dots + A'_{3n}x_n = B'_3 \\ \vdots \\ A'_{n2}x_2 + A'_{n3}x_3 + \dots + A'_{nn}x_n = B'_n \end{cases}$$

que es un sistema de $n - 1$ ecuaciones con $n - 1$ incógnitas.

Repitiendo el procedimiento; es decir, dividiendo la primera ecuación de (3) por A'_{22} :

$$(4) \quad x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

y reemplazando x_2 en las restantes ecuaciones, resulta un sistema de $n - 2$ ecuaciones con $n - 2$ incógnitas.

Continuando con el proceso, después de n eliminaciones, obtendremos el sistema ($A \neq 0$):

$$(5) \begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n = b'_{n-1} \\ x_n = b'_n \end{cases}$$

que es equivalente al sistema original (1). De este sistema se obtiene, de abajo hacia arriba, la solución $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$.

Si en una etapa k del procedimiento el coeficiente de x_k es nulo, es necesario, entonces, reordenar las ecuaciones o las variables, o ambas. En otro sentido, es conveniente que ese coeficiente sea pequeño comparado con los restantes, para reducir a un mínimo los errores del redondeo.

El caso $A = 0$, se pone en evidencia cuando, después de r eliminaciones (donde r sería el rango de la matriz de los coeficientes), los coeficientes de las incógnitas del sistema de $(n - r)$ ecuaciones son nulos, a menos de los errores del redondeo. En este caso, si los miembros derechos son nulos, las $(n - r)$ ecuaciones citadas no se tienen en cuenta y la incógnita x_i resulta de la r -ésima ecuación expresada por una constante y una combinación lineal de las $(x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n)$. En cambio, si los miembros derechos no son nulos, el sistema inicial no se puede resolver.

Por ejemplo: resolver el sistema

$$\begin{aligned} 8x - 7y + 4z &= 6 \\ 3x + 5y - 2z &= 7 \\ 6x - y + 7z &= 25 \end{aligned}$$

- Eliminar x de la segunda y tercera ecuación.

$$\begin{aligned} x - (7/8)y + (1/2)z &= 3/4 \\ y - (28/61)z &= 38/61 \\ y + (16/17)z &= 82/17 \end{aligned}$$

- Eliminar y de la tercera ecuación.

$$x - (7/8)y + (1/2)z = 3/4$$

$$y - (28/61)z = 38/61$$

$$z = 3$$

Luego, reemplazando $z = 3$ en la segunda y primera ecuación, resulta: $y = 2$; $x = 1$; es decir, la solución del sistema es: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Método de Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan es una extensión del método de eliminación gaussiana, que consiste en eliminar la variable principal de la ecuación correspondiente no solamente en las ecuaciones que aparecen situadas por debajo de la misma, sino en todas las ecuaciones del sistema. Por ello, la estrategia es la misma que la del método de eliminación de Gauss, con la adición de las siguientes instrucciones en el lugar correspondiente:

- Sustraer además la segunda ecuación multiplicada por un escalar adecuado de la primera ecuación, con el objeto de eliminar la segunda variable de la primera ecuación.
- En cada paso sustraer la ecuación correspondiente multiplicada por un escalar adecuado, tanto de las ecuaciones situadas por debajo de la misma como de las situadas por encima, con el objeto de que la variable principal de cada ecuación aparezca únicamente en la ecuación de la que es variable principal.

Los sistemas de ecuaciones que resultan de la aplicación del método de Gauss-Jordan se dice que tienen forma escalonada reducida.

Se dice que un sistema de ecuaciones está en forma escalonada reducida si:

- La primera variable de cada ecuación tiene 1 como coeficiente (a esta variable la denominaremos variable principal de dicha ecuación).
- La variable principal de cualquier ecuación siempre aparece situada a la derecha de las variables principales de las ecuaciones previas, y todas las ecuaciones sin variable principal aparecen colocadas al final.
- La variable principal de cada ecuación aparece solamente en la ecuación de la que es variable principal.

Por Ejemplo: vamos a resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de Gauss-Jordan, es decir, obteniendo una forma escalonada reducida de dicho sistema

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Para ello, trabajamos directamente sobre la matriz ampliada asociada al sistema, teniendo presente en todo momento qué es lo que representan los coeficientes de dicha matriz:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} f_2 = f_2 + f_1 \\ f_3 = f_3 - f_1 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} f_2 = (-1)F_2 \\ f_1 = f_1 - 4f_2 \\ f_3 = f_3 - 4f_2 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array} \right]$$

$$f_1 = f_1 - f_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -23 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array} \right]$$

La última matriz ampliada representa el sistema en forma escalonada reducida. El sistema es, por tanto, compatible determinado y su solución es $(-23; -3; 13)$

Veamos otro ejemplo: Sea el sistema:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 4 & x_1 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & x_2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & x_3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x_4 & -3 \end{array} \right]$$

Ahora seguiremos un procedimiento similar al empleado en el método de Gauss. Tomaremos como pivote el elemento $a_{44} = -3$; multiplicamos la cuarta ecuación por $-3/4$ y la restamos a la primera.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 0 & x_1 & 8 \\ 0 & -4 & 2 & 2 & x_2 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & x_3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x_4 & -3 \end{array} \right]$$

Realizamos la misma operación con la segunda y tercera fila, obteniendo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 2 & 0 & x_1 & 8 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & x_2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & x_3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x_4 & -3 \end{array} \right]$$

Ahora tomamos como pivote el elemento $a_{33} = 2$, multiplicamos la tercera ecuación por $2/2 = 1$ y la restamos a la primera:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 0 & 0 & x_1 & 12 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & x_2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & x_3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x_4 & -3 \end{array} \right]$$

Repetimos la operación con la segunda fila:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & -2 & 0 & 0 & x_1 & 12 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & x_2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & x_3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x_4 & -3 \end{array} \right]$$

Finalmente, tomamos como pivote $a_{22} = -4$, multiplicamos la segunda ecuación por $(-2)/(-4) = 1/2$ y la sumamos a la primera:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & 0 & x_1 & 6 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & x_2 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & x_3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & x_4 & -3 \end{array} \right]$$

El sistema de ecuaciones anterior es, como hemos visto, fácil de resolver, obtenemos las soluciones:

$$\therefore x = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

◀ ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

Forma general: $ax^2 + bx + c = 0 \quad \forall a \neq 0$

Resolución: siendo $a \neq 0$

Multiplicando por $4a$: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

Sumamos a ambos miembros b^2 :

$$\underbrace{4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2}_{(2ax + b)^2} = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Las raíces son: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

Donde: $\Delta = b^2 - 4ac$
└───────────┘ Discriminante

Análisis de la naturaleza de las raíces

1. Si $\Delta = 0$ las raíces son iguales.
2. Si $\Delta > 0$ las raíces son reales y diferentes.
3. Si $\Delta < 0$ las raíces son complejas y conjugadas.

Propiedades de las raíces

Teorema de Viète:

Suma de raíces: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

Producto de raíces: $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

Diferencia de raíces: $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$

Reconstrucción de la ecuación cuadrática

Sean x_1 y x_2 , las raíces de una ecuación cuadrática,

luego: $x = x_1 \Rightarrow x - x_1 = 0$

$x = x_2 \Rightarrow x - x_2 = 0$

La ecuación que origina dichas raíces es:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

$$x^2 - (\text{suma de raíces})x + (\text{producto de raíces}) = 0$$

Raíces particulares

1. Raíces simétricas

Si $x_1 = p \Rightarrow x_2 = -p$

Entonces: $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 0$

Luego: $b = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0$

2. Raíces reciprocas

Si $x_1 = p \Rightarrow x_2 = \frac{1}{p}$

Entonces: $x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1$

Luego: $c = a \Rightarrow ax^2 + bx + a = 0$

3. Una raíz nula o cero

Sea $x_1 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 0$

Luego: $c = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0$

4. Una raíz es la unidad

Sea $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{c}{a}$

Luego: $x_1 + x_2 = 1 + \frac{c}{a} = \frac{-b}{a}$

$$\therefore a + b + c = 0$$

Propiedad de las ecuaciones equivalentes

Sean: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \quad \dots(1)$

$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \quad \dots(2)$

Si son equivalentes; se cumple: $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

Ejemplo:

Hallar m y n si las ecuaciones son equivalentes

$$2mx^2 + (m+1)x + (m+n) = 0$$

$$2x^2 + (m-n+1)x + 3 = 0$$

Resolución:

Por el teorema: $\frac{2m}{2} = \frac{m+1}{m-n+1} = \frac{m+n}{3}$

Luego: $3m = m+n \Rightarrow 2m = n$

$$m = \frac{m+1}{-m+1} \Rightarrow -m^2 + m = m+1$$

$$\therefore m = \pm 1 \wedge n = \pm 2$$

Teorema de Bezout o de la raíz común

Sean: $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0 \quad \dots(1)$

$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0 \quad \dots(2)$

Si tienen una raíz común, entonces:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (a_1c_2 - a_2c_1)^2$$

Ejemplo:

Hallar n , si las ecuaciones:

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \dots(1)$$

$$x^2 + nx - 5 = 0 \quad \dots(2)$$

poseen una raíz común y hallar dicha raíz.

Resolución:

Por el teorema de Bezout:

$$(n+3)(15+4n) = (-5+4)^2$$

$$4n^2 + 27n + 44 = 0$$

$$(4n+11)(n+4) = 0 \Rightarrow n = -4 \vee n = -11/4$$

Factorizando (1): $(x-4)(x+1) = 0 \quad \dots(1)$

Reemplazando: $n = \frac{-11}{4}$, en (2) y multiplicando por 4:

$$4x^2 - 11x - 20 = 0 \Rightarrow (4x+5)(x-4) = 0$$

Luego: $CS_1 = \{4; -1\}; CS_2 = \{4; -5/4\}$

$\therefore$ La raíz común es 4.

Ejemplos:

1. Dada la ecuación cuadrática; $ax^2 + bx + c = 0$, los coeficientes a , b y c forman una progresión aritmética, si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación y cumplen.

$$a + b + c = 3(r_1 + r_2)$$

$$b + 7 = r_1 r_2$$

Hallar abc .

Resolución:

Como a , b , c forman una progresión aritmética, se cumplirá que:

$$b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a + c \quad \dots(1)$$

$$\text{Además: } r_1 + r_2 = -\frac{b}{a} ; r_1 r_2 = \frac{c}{a}$$

$$\text{Luego en: } \underline{a + b + c} = 3(r_1 + r_2) = \frac{-3b}{a}$$

$$\text{De (1): } 3b = -\frac{3b}{a} \Rightarrow a = -1$$

$$\text{Del segundo dato: } b + 7 = r_1 r_2 = \frac{c}{a} = -c$$

$$\text{Tenemos: } b = -7 - c$$

$$\text{En (1): } 2(-c - 7) = -1 + c \quad c = -\frac{13}{3}$$

$$\text{En (2): } b = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore abc = (-1)\left(-\frac{8}{3}\right)\left(-\frac{13}{3}\right) = -\frac{104}{9}$$

2. Hallar la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación: $(2k + 2)x^2 + (4 - 4k)x + k - 2 = 0$, sabiendo que las raíces son recíprocas.

Resolución:

Se pide: $E = x_1^2 + x_2^2$

$$\text{Por ser recíprocas: } x_1 x_2 = 1 \quad \dots(1)$$

De la ecuación:

$$x_1 + x_2 = \frac{-(4 - 4k)}{2k + 2} = \frac{2(k - 1)}{k + 1} \quad \dots(2)$$

Además por el teorema de Viète.

$$x_1 x_2 = \frac{k - 2}{2k + 2} = 1$$

$$\text{Luego: } k - 2 = 2k + 2 \Rightarrow k = -4$$

$$\text{En (2): } x_1 + x_2 = \frac{2(-4 - 1)}{-4 + 1} = \frac{10}{3}$$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$$(x_1 + x_2)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 \Rightarrow x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2 = \frac{100}{9}$$

$$\text{De (1): } x_1^2 + x_2^2 = \frac{100}{9} - 2$$

$$\therefore E = \frac{82}{9}$$

3. Resolver las ecuaciones:

$$\bullet \frac{a^2 + b^2}{2bx} - \frac{b}{x} = \frac{a - b}{2bx^2}$$

$$\bullet \frac{5}{x+2} - \frac{10}{x^2 - 4} = \frac{1}{2 - x}$$

Resolución:

Analizamos cada caso, entonces se tendrá:

- Dando común denominador:

$$\frac{(a^2 + b^2)x - 2b^2x}{2bx^2} = \frac{a - b}{2bx^2}$$

$$(a^2 - b^2)x = a - b; \quad x \neq 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{a + b}$$

- La ecuación puede escribirse:

$$\frac{5}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{10}{x^2 - 4}$$

dando común denominador en el primer miembro:

$$\frac{5x - 10 + x + 2}{x^2 - 4} = \frac{10}{x^2 - 4}$$

$$6x - 8 = 10; \quad x \neq -2$$

$$\therefore x = 3$$

4. Resolver cada caso siguiente:

$$\bullet \text{ Resolver: } \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+4} = 1$$

- Hallar el CS de la ecuación:

$$\frac{x-1}{x-2} = \frac{x-3}{2x-3}$$

- Hallar el CS de la ecuación racional:

$$\frac{5(x-2)}{x+2} - \frac{2(x-3)}{x+3} = 3$$

- Resolver la ecuación:

$$\frac{1}{2x-3} + \frac{3}{2x^2-3x} = \frac{5}{x} + \frac{7x-15}{3x-2x^2}$$

Resolución:

Analizamos cada caso:

- Efectuando:

$$\frac{x^2 + 4x + x^2 + x}{x^2 + 5x + 4} = 1$$

$$2x^2 + 5x = x^2 + 5x + 4$$

$$x^2 = 4 \quad \therefore x = \pm 2$$

- Efectuando en aspa:

$$2x^2 - 5x + 3 = x^2 - 5x + 6$$

$$x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm \sqrt{3}$$

$$\bullet \frac{5x^2 + 5x - 30 - 2x^2 + 2x + 12}{(x+2)(x+3)} = 3$$

$$3x^2 + 7x - 18 = 3x^2 + 15x + 18$$

$$-36 = 8x \quad \therefore x = -36/8$$

- Dando común denominador en ambos miembros:

$$\frac{x+3}{x(2x-3)} = \frac{10x-15-7x+15}{x(2x-3)}$$

$$x+3 = 3x; \quad x \neq 0 \wedge x \neq \frac{3}{2}$$

de donde: $x = 3/2$

Pero $x \neq 3/2$, lo cual implica que la ecuación es incompatible o no tiene raíces.

5. Resolver las ecuaciones siguientes:

- $x + \sqrt{x-2} = 4$
- $\sqrt{x-1} = 3 + \sqrt{3x-2}$

Resolución:

- $\sqrt{x-2} = 4 - x \Rightarrow x - 2 = (4 - x)^2$
 $x - 2 = 16 - 8x + x^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0$
 $(x - 3)(x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 3; x_2 = 6$

Comprobando en la ecuación original solo verifica $x = 3$.

- Elevando al cuadrado en ambos miembros:
 $x - 1 = 9 + 3x - 2 + 6\sqrt{3x-2}$
 $-2x - 8 = 6\sqrt{3x-2}$
 $-x - 4 = 3\sqrt{3x-2}$

Elevando al cuadrado:

$$x^2 + 8x + 16 = 27x - 18 \Rightarrow x^2 - 19x + 34 = 0$$

$$(x - 17)(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 17; x_2 = 2$$

Verificando en la ecuación original, ninguna de las dos posibles respuestas cumple, entonces la ecuación no tiene soluciones.

6. Hallar la ecuación cuadrática cuyas raíces son:

- 3 y 7
- -2 y -5
- $4/3$ y $3/4$
- $1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$

Resolución:

- $x^2 - (3 + 7)x + (3)(7) = 0$
 $x^2 - 10x + 21 = 0$
- $x^2 - (-2 - 5)x + (-2)(-5) = 0$
 $x^2 + 7x + 10 = 0$
- $x^2 - \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{4}\right)x + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 0$
 $x^2 - \frac{25}{12}x + 1 = 0 \Rightarrow 12x^2 - 25x + 12 = 0$
- $x^2 - 2x - 1 = 0$

7. Hallar los valores de a y b en la ecuación:

$$x^2 + (2a + 3b - 1)x + a - b - 3 = 0$$

si ambas raíces valen cero.

Resolución:

Si ambas raíces valen cero quiere decir que:

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow -(2a + 3b - 1) = 0$$

$$2a + 3b = 1 \quad \dots(1)$$

También:

$$x_1 x_2 = 0 \Rightarrow a - b - 3 = 0$$

$$a - b = 3 \quad \dots(2)$$

Resolviendo (1) y (2): $a = 2; b = -1$

8. Determinar el valor de k para que la ecuación:

$$(k + 4)x^2 - 1 = (2k + 2)x - k, \text{ tenga raíces iguales.}$$

Resolución:

Primero ordenando la ecuación se tiene:

$$(k + 4)x^2 - (2k + 2)x + k - 1 = 0$$

Para que tenga raíces iguales: $\Delta = 0$

$$[-(2k + 2)]^2 - 4(k + 4)(k - 1) = 0$$

$$4(k + 1)^2 - 4(k + 4)(k - 1) = 0$$

$$k^2 + 2k + 1 - k^2 - 3k + 4 = 0 \quad \therefore k = 5$$

9. Resolver cada caso siguiente:

- Calcular el valor de k para que el producto de las raíces de la ecuación:
 $(k - 2)x^2 - 5x + 2k = 0$, sea 6.
- En la ecuación $x^2 - kx + 24 = 0$, determinar k , para que se cumpla: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{5}{12}$

Resolución:

- Por dato: $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 6$

$$\frac{2k}{k - 2} = 6 \Rightarrow 2k = 6k - 12 \Rightarrow k = 3$$

- De la ecuación: $x_1 + x_2 = k \wedge x_1 x_2 = 24$

$$\text{En la condición: } \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{5}{12}$$

$$\frac{k}{24} = \frac{5}{12} \Rightarrow k = 10$$

10. Para que una de las raíces de la ecuación:

$ax^2 + bx + c = 0$ sea el doble de la otra. Determinar cómo deben estar relacionados los coeficientes.

Resolución:

$$\text{Por dato: } x_1 = 2x_2 \quad \dots(1)$$

Además, de la ecuación:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \dots(2)$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \dots(3)$$

$$(1) \text{ en } (2): 3x_2 = \frac{-b}{a} \quad \dots(4)$$

$$(1) \text{ en } (3): 2x_2^2 = \frac{c}{a} \quad \dots(5)$$

En (4) al cuadrado y el resultado entre la relación (5)

$$\frac{9x_2^2}{2x_2^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} \Rightarrow 9ac = 2b^2$$

11. Calcular tres números consecutivos en los que el cuadrado del número del medio sea mayor en una unidad al producto de los restantes.

Resolución:

Sean los números:

$$a; (a + 1) \text{ y } (a + 2)$$

$$(a + 1)^2 - 1 = a(a + 2)$$

$$a^2 + 2a + 1 - 1 = a^2 + 2a \Rightarrow 0 = 0$$

Esto implica que la igualdad se verifica para cualquier valor de " a "; es decir, los números pueden ser 3 consecutivos cualesquiera.

12. Hallar n para que las raíces de la ecuación:

$$\frac{x^2 + 3x}{5x + 2} = \frac{n-1}{n+1}; \text{ sean simétricas}$$

Resolución:

Para que sean simétricas: $x_1 + x_2 = 0$

Por Viète: $-\frac{b}{a} = 0 \Rightarrow b = 0$

Dándole la forma general a la ecuación:

$$x^2 + \left[3 - 5\left(\frac{n-1}{n+1}\right)\right]x + 2\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = 0$$

$$ax^2 + b \cdot x + c$$

$$3 - 5\left(\frac{n-1}{n+1}\right) = b = 0 \Rightarrow n = 4$$

13. Calcular "a" de: $ax^2 - (a-5)x + 1 = 0$

si: $x_1 x_2 = x_1 - x_2$

Resolución:

De la ecuación: $x_1 + x_2 = \frac{a-5}{a} \wedge x_1 x_2 = \frac{1}{a}$

Se sabe por productos notables que:

$$(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4x_1 x_2$$

$$\left(\frac{a-5}{a}\right)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4\left(\frac{1}{a}\right)$$

Pero por dato: $x_1 - x_2 = \left(\frac{1}{a}\right)$

$$\text{Luego: } \left(\frac{a-5}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{a}\right)$$

Efectuando: $a^2 - 14a + 24 = (a-12)(a-2)$

Luego: $a = 12 \wedge a = 2$

14. De la ecuación: $2x^2 + 2x + 3 = 0$; se requiere que las raíces tomen el doble de su valor para lo cual fue necesario transformarlo. Determinar la variación del término independiente.

Resolución:

Sea: x^I y x^{II} las nuevas raíces:

Por dato: $x^I = 2x_1 \quad \dots(1)$

$$x^{II} = 2x^2 \quad \dots(2)$$

$$x^2 \cdot (x^I + x^{II})x + x^I x^{II} = 0 \quad \dots(3)$$

De (1) + (2): $2(x_1 + x_2) = x^I + x^{II} = 2\left(\frac{-2}{a}\right) = \left(\frac{-4}{a}\right)$

De (1) · (2): $4x_1 \cdot x_2 = x^I \cdot x^{II} = 4\left(\frac{3}{a}\right) = \frac{12}{a}$

Reemplazando en (3) se tendrá:

$$x^2 - 2(x_1 + x_2)x + 4x_1 x_2 = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-4}{a}\right)x + \frac{12}{a} = 0$$

$\Rightarrow ax^2 + 4x + 12 = 0$ será la nueva ecuación.

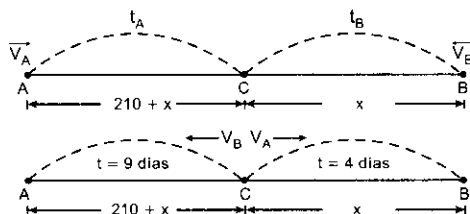
$\therefore$ La variación será: $12 - 3 = 9$

15. Dos turistas A y B salieron simultáneamente de distintos lugares al encuentro mutuo. Al encontrarse resulta que A recorrió 210 km más que B. Si cada uno de ellos continua su camino a la velocidad an-

terior, A llegará al lugar de salida de B. Después de 4 días y B llegará al lugar de salida de A después de 9 días. ¿Cuántos km recorrió cada uno de ellos hasta el encuentro mutuo.

Resolución:

Haciendo un gráfico:



De los gráficos anteriores se tendrá:

$$V_B = \frac{210 + x}{9}; \quad V_A = \frac{x}{4}$$

$$t_A = t_B \Rightarrow \frac{210 + x}{\frac{x}{4}} = \frac{x}{\frac{210 + x}{9}}$$

Efectuando: $4(210 + x)^2 = 9x^2$

Extrayendo raíz cuadrada a cada miembro:

$$2(210 + x) = 3x \Rightarrow x = 420$$

Luego: A recorre $420 + 210 = 630$ km

B recorre 420 km

16. Calcular $a + b$ ($a \in \mathbb{R}$) de tal manera que las siguientes ecuaciones sean equivalentes.

$$(7a - 2)x^2 - (5a - 3)x + 1 = 0$$

$$8bx^2 - (4b + 2)x + 2 = 0$$

Resolución:

Si son equivalentes se cumple:

$$\frac{7a - 2}{8b} = \frac{5a - 3}{4b + 2} = \frac{1}{2}$$

$$7a - 2 = 4b \Rightarrow 7a - 4b = 2 \quad \dots(1)$$

$$5a - 3 = 2b + 1 \Rightarrow 5a - 2b = 4 \quad \dots(2)$$

$$2(2) - (1): 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \wedge b = 3$$

$$\therefore a + b = 5$$

17. Determinar el valor entero de m , de modo que una de las raíces de la ecuación:

$$x^2 - (m + 4)x + 5m - 8 = 0$$

sea el triple de la otra.

Resolución:

Sean x_1 y x_2 las raíces:

Por dato: $x_1 = 3x_2 \quad \dots(1)$

También de la ecuación:

$$x_1 + x_2 = m + 4 \quad \dots(2)$$

$$x_1 \cdot x_2 = 5m - 8 \quad \dots(3)$$

(1) en (2): $x_2 = \frac{m+4}{4}; \quad x_1 = \frac{3}{4}(m+4)$

En (3): $3\left(\frac{m+4}{4}\right)^2 = 5m - 8 \Rightarrow 3m^2 - 56 + 176 = 0$

$$\Rightarrow (3m - 44)(m - 4) = 0 \quad \therefore m = 4$$

18. Si x_1 y x_2 son raíces de la ecuación $2x^2 + x + 1 = 0$ formar una ecuación cuadrática de incógnita x cuyas raíces sean:

$$x_1 + \frac{1}{x_1} \quad y \quad x_2 + \frac{1}{x_2}$$

Resolución:

Para las raíces: $x_1 + \frac{1}{x_1}$; $x_2 + \frac{1}{x_2}$, la ecuación es:

$$x^2 - \left(x_1 + \frac{1}{x_1} + x_2 + \frac{1}{x_2}\right)x + \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = 0$$

$$x^2 - \left(x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right)x + \left(x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{x_1 x_2}\right) = 0$$

Pero: $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2} \wedge x_1 x_2 = \frac{1}{2}$

Reemplazando en la ecuación se tendrá:

$$x^2 - \left(-\frac{1}{2} - 1\right)x + \left(\frac{1}{2} + 2 + \frac{\frac{1}{4} - 1}{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

Efectuando: $x^2 + \frac{3}{2}x + 1 = 0$

Multiplicando por 2 a ambos miembros, obtendremos que: $2x^2 + 3x + 2 = 0$ será la ecuación pedida.

19. Hallar "x" en:

$$\frac{(x-a)\sqrt{x-a} + (x-b)\sqrt{x-b}}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a - b$$

Resolución:

Si $a > b \Rightarrow x \geq a$

Transformando el numerador:

$$\frac{\sqrt{x-a}^3 + \sqrt{x-b}^3}{\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b}} = a - b$$

Desarrollando la suma de cubos se tendrá:

$$\frac{(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b})(x-a - \sqrt{x-a}\sqrt{x-b} + x-b)}{(\sqrt{x-a} + \sqrt{x-b})} = a - b$$

$$2x - a - b - \sqrt{x-a} \cdot \sqrt{x-b} = a - b$$

$$2(x-a) = \sqrt{(x-a)(x-b)}$$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$$4x^2 - 8ax + 4a^2 = x^2 - (a+b)x + ab$$

$$3x^2 + (-7a+b)x + 4a^2 - ab = 0$$

$$\begin{array}{r} 3x \quad \quad \quad -4a + b \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad -a \end{array}$$

Luego: $(3x - 4a + b)(x - a) = 0$

$$\therefore x = \frac{4a-b}{3} \quad \vee \quad x = a$$

20. Hallar los valores de x en:

$$\sqrt[5]{20+x} \cdot \sqrt[5]{x-11} = 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Resolución:

Haciendo: $\sqrt[5]{x-11} = m \Rightarrow x = m^5 + 11$

Reemplazando en la ecuación se tendrá:

$$\sqrt[5]{m^5+31} = m + 1$$

Sacando raíz quinta miembro a miembro:

$$m^5 + 31 = m^5 + 5m^4 + 10m^3 + 10m^2 + 5m + 1$$

$$5(m^4 + 2m^3 + 2m^2 + m - 6) = 0$$

$$\begin{array}{ccc} m^2 & & m \\ m^2 & \searrow & \swarrow \\ & m & 3 \\ & \swarrow & \searrow \\ & m & -2 \end{array}$$

$$(m^2 + m + 3)(m^2 + m - 2) = 0$$

$$\Delta < 0$$

Luego: $m^2 + m - 2 = 0 = (m+2)(m-1)$

De donde: Si $m = 1 \Rightarrow x = 12$

Si $m = -2 \Rightarrow x = -21$

21. Determinar que cantidad se debe agregar a las raíces de una ecuación: $(a+b)x^2 + (a-b)x + ab = 0$, para que estas nuevas raíces sean raíces simétricas de otra ecuación cuadrática.

Resolución:

Sea el conjunto solución de la ecuación:

$$(a+b)x^2 + (a-b)x + ab = 0; \quad \Omega_1 = \{x_1, x_2\}$$

Agregando n a cada raíz se tendrá:

$$\Omega_2 = \{x_1 + n, x_2 + n\}$$

Si son simétricas: $x_1 + n = -(x_2 + n)$

Luego: $x_1 + x_2 + 2n = 0$

$$2n = -(x_1 + x_2) \Rightarrow n = \frac{-(x_1 + x_2)}{2}$$

Por la ecuación: $x_1 + x_2 = -\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$

$$\therefore n = -\left[\frac{-(a-b)}{2(a+b)}\right] = \frac{a-b}{2(a+b)}$$

22. Calcular $a - b$; si la ecuación: $x^3 + ax^2 + bx - 7 = 0$, posee como una de sus raíces a $1 - 2\sqrt{2}$. Además $a, b \in \mathbb{Q}$.

Resolución:

Si $x_1 = 1 - 2\sqrt{2}$, entonces $x_2 = 1 + 2\sqrt{2}$

El factor cuadrático que da estas raíces es:

$$x^2 - 2x - 7 = 0$$

Luego: $(x^2 - 2x - 7)(px + q) = 0$

Es equivalente a: $x^3 + ax^2 + bx - 7 = 0 \dots (1)$

Lo que implica que: $p = 1 \wedge q = 1$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x - 7)(x + 1) = 0$$

Reemplazando en (1): $x^3 - x^2 - 9x - 7 = 0$

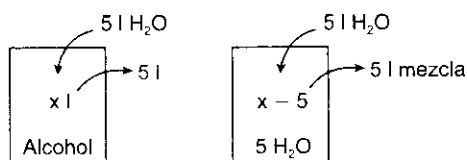
$$\Rightarrow a = -1 \wedge b = -9$$

Se pide: $a - b = -1 + 9 = 8$

23. Cuál es la capacidad de un depósito lleno de alcohol puro al cuál se ha sacado 2 veces 5 l reponiéndose en cada caso con idéntico volumen H_2O y resultando únicamente alcohol al 90,25%.

Resolución:

Sean:



Con alcohol:

	Hay	Se saca	Queda
1.º	x	5	x - 5
2.º	x - 5	$\frac{(x-5)}{x} \cdot 5$	$\frac{(x-5)^2}{x}$

$$\Rightarrow \frac{(x-5)^2}{x} = \frac{90,25x}{100} \Rightarrow (x-5)^2 = \frac{9025x^2}{100 \times 100}$$

$$100^2(x-5)^2 = 95^2 x^2$$

$$100(x-5) = \pm 95x$$

$$\bullet 100x - 500 = 95x$$

$$5x = 500 \Rightarrow x = 100$$

$$\bullet 100x - 500 = -95x$$

$$195x = 500$$

$$x = 2,56 \text{ no satisface}$$

24. En que tiempo harían A, B y C un trabajo juntos; si A solo, puede hacerlo en 6 horas más; B solo, puede en 1 hora más; y C solo en el doble del tiempo.

Resolución:

A, B, C juntos lo hacen en x horas.

 En 1 h A, B y C harán $\frac{1}{x}$ del trabajo

- A lo hace en x + 6 horas.

 En 1 h A hará $\frac{1}{x+6}$ del trabajo.

- B lo hace en x + 1 horas.

 En 1 h B hará $\frac{1}{x+1}$ del trabajo.

- C lo hace en 2x del trabajo.

 En 1 h C hará $\frac{1}{2x}$ del trabajo.

$$\Rightarrow \text{En 1 h, A, B, C harán } \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} \text{ del trabajo}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{Efectuando: } \frac{x+1+x+6}{(x+6)(x+1)} = \frac{2-1}{2x}$$

$$(2x+7)(2x) = (x+6)(x+1)$$

$$4x^2 + 14x = x^2 + 7x + 6$$

$$3x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow (3x-2)(x+3) = 0$$

$$\text{Donde: } x_1 = 2/3$$

$$x_2 = -3 \text{ (no es posible)}$$

$$\therefore \text{A, B, C harán juntos el trabajo } \frac{2}{3} \text{ h}$$

◀ ECUACIONES DE GRADO SUPERIOR
Teorema de Cardano y Viete

 Sea: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$

 Una ecuación de grado $n \in \mathbb{N}$
 $a_n \neq 0$ con raíces $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$

Entonces se demuestra que:

$$1. \quad x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$2. \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n = \frac{-a_{n-2}}{a_n}$$

$$\vdots$$

$$3. \quad x_1 x_2 x_3 \dots + x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

 Por ejemplo: en la ecuación: $4x^3 - 5x^2 + 7x - 11 = 0$ de raíces x_1, x_2, x_3 se cumplirá:

$$\bullet \quad x_1 + x_2 + x_3 = \frac{5}{4}$$

$$\bullet \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{7}{4}$$

$$\bullet \quad x_1 x_2 x_3 = (-1)^3 \left(\frac{-11}{4} \right) = \frac{11}{4}$$

Teorema de la paridad con raíces complejas

 Toda ecuación algebraica de coeficientes reales, si admite la raíz compleja $a + bi$, contendrá también la raíz conjugada $a - bi$.

Corolario: Si en una ecuación polinómica con coeficientes reales presenta raíces complejas conjugadas dos a dos, se concluye que su número de raíces complejas será siempre par.

Teorema de la paridad con raíces irracionales

 Si un polinomio $P(x)$ con coeficientes racionales tiene como raíz $a + \sqrt{b}$, donde $\sqrt{b}$ es irracional, con a y b racionales, entonces también tiene como raíz al número irracional $a - \sqrt{b}$.

Este teorema asegura que las raíces irracionales de dicho tipo se presentan por pares en los polinomios con coeficientes racionales.

Ejemplo:

En la siguiente ecuación:

$$ax^9 + bx^8 + cx^5 + d = 0$$

 ($a, b, c, d \neq 0$) sus raíces son: $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_9\}$

 se sabe que: $\div 2 : d : 9 : b$

 calcular el valor de: $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{x_1 x_2 \dots x_9}$
Resolución:

 De $\div 2 : d : 9 : b$ se tiene que: $2b = 9d \dots (1)$

Por el teorema de Cardano y Viete:

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{x_1 x_2 x_3 \dots x_9} = \frac{-b}{-d} = \frac{b}{d} \dots (2)$$

$$\text{De (1): } \frac{b}{d} = \frac{9}{2} = 4,5 \quad \therefore \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_9}{x_1 x_2 \dots x_9} = 4,5$$

Ecuaciones binómicasForma general: $ax^n \pm b = 0$ **Resolución de la ecuación binómica****1.º caso:** $ax^n - b = 0$ donde: $x^n = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}(1)} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \sqrt[n]{1}$

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \sqrt[n]{\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) \right]$$

 $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ **2.º caso:** $ax^n + b = 0$ donde: $x^n = \frac{b}{a}(-1) \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \sqrt[n]{-1}$

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \sqrt[n]{\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}} \left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right) \right]$$

 $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$ **Ejemplo:**Resolver: $x^4 + 625 = 0$ **Resolución:**De la ecuación: $x = \sqrt[4]{625} \sqrt[4]{-1} = 5 \sqrt[4]{-1}$

Por el procedimiento en el segundo caso se tendrá:

$$x = 5 \sqrt[4]{\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi} = 5 \left[\cos\left(\frac{2k+1}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{4}\pi\right) \right]$$

donde: $k = 0; 1; 2; 3$

$$\text{Si } k = 0: x = 5 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Si } k = 1: x = 5 \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$\text{Si } k = 2: x = 5 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \right)$$

$$\text{Si } k = 3: x = 5 \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4} \right)$$

Ecuaciones trinómicasForma general: $a^{2n} + bx^n + c = 0$ **Resolución de la ecuación trinómica**Haciendo: $x^n = y$ Reemplazando en la ecuación: $ay^2 + by + c = 0$

$$\text{Donde: } y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{Luego: } x^n = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:Resolver: $x^6 - x^3 - 2 = 0$ **Resolución:**La ecuación se puede expresar como: $(x^3 - 2)(x^3 + 1) = 0$ • Si: $x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x^3 = 2$

$$x = \sqrt[3]{2} \left[\cos \frac{2k\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{3} \right]; k = 0; 1; 2$$

• Si: $x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$$x = \cos\left(\frac{2k+1}{3}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2k+1}{3}\pi\right); k = 0; 1; 2$$

Ecuaciones bicuadradasForma general: $ax^4 + bx^2 + c = 0$; $a \neq 0$ **Resolución de la ecuación bicuadrada**

$$x^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} = p;$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}} = -p$$

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} = q;$$

$$x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} = -q$$

✓ Propiedades1. Suma de raíces: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ 2. Suma de productos de raíces: $x_1 x_2 + x_3 x_4 = \frac{b}{a}$
(producto binario)3. Productos de raíces: $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}$ **Formación de una ecuación bicuadrada**

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Dividiendo entre "a": $x^4 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a} = 0$

Luego:

$$x^4 + (\sum \prod \text{raíces binarias})x^2 + (\prod \text{raíces}) = 0$$

$$o \quad x^4 + (\text{suma de raíces binarias})x^2 + (\text{producto de raíces}) = 0$$

Ejemplo:Formar la ecuación bicuadrada si dos de sus raíces son $-2; 1/3$.**Resolución:**

$$\text{Si } x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = -2; x_3 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_4 = -\frac{1}{3}$$

Luego:

$$\sum \prod RB = x_1 x_3 + x_2 x_4 = -4 - \frac{1}{9} = -\frac{37}{9}$$

$$\prod R = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = (2)(-2)\left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

$$\text{Reconstruyendo la ecuación: } x^4 - \frac{37}{9}x^2 + \frac{4}{9} = 0$$

Multiplicando por 9 la ecuación será:

$$9x^4 - 37x^2 + 4 = 0$$

Ejemplos:1. En la ecuación bicuadrada: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, de raíces x_1, x_2, x_3, x_4 , se cumple $\div a, b, c; \div 49 : a : c^2$. Calcular el valor de $(x_1 x_3)^{-1} + (x_2 x_4)^{-1}$, siendo $x_1 = -x_3$.

Resolución:

De los datos:

$$\div a, b, c: \quad 2b = a + c \quad \dots (1)$$

$$\div \div 49 : a : c^2: \quad a^2 = 49 c^2 \Rightarrow a = +7c$$

También:

$$(x_1, x_3)^{-1} + (x_2, x_4)^{-1} = \frac{x_1 x_3 + x_2 x_4}{x_1 x_2 x_3 x_4} = \frac{b}{a} = \frac{b}{c}$$

$$\text{En (1):} \quad 2b = \pm 7c + c$$

$$\text{Luego si } a = 7c: \quad 2b = 8c \Rightarrow \frac{b}{a} = 4$$

$$\text{Si } a = -7c: \quad 2b = -6c \Rightarrow \frac{b}{c} = -3$$

 $\therefore$ El valor pedido es $4 \vee -3$.

2. Resolver la ecuación $x^4 - mx^2 + n = 0$, si m es la suma límite de los términos de la progresión $\div 4 : 2 : \dots$ y n es el quinto término del desarrollo de:

$$(\sqrt{3} - 2\sqrt[4]{45^{-1}})^6$$

Resolución:

$$\text{Por dato: } m = 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \dots$$

$$\text{Se sabe además: } \boxed{\text{Suma límite} = \frac{\text{Primer término}}{1 - \text{razón}}}$$

$$\text{Luego: } m = \frac{4}{1 - 1/2} = 8$$

Para el binomio:

$$n = t_5 = C_4^6 \sqrt{3}^2 (-2\sqrt[4]{45^{-1}})^4 = \frac{15 \times 3 \times 16}{45} \Rightarrow n = 16$$

 Por lo tanto la ecuación será: $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$

donde factorizando por aspa simple se tendrá:

$$(x^2 - 4)(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 2; x_4 = -2;$$

(Hay dos raíces de multiplicidad 2)

3. Dada la ecuación $x^4 - 3(k+4)x^2 + (k+1)^2 = 0$ hallar el valor entero que debe tomar k para que sus 4 raíces estén en progresión aritmética.

Resolución:

Sean las raíces:

$$x_1 = a - 3r; x_2 = a - r; x_3 = a + r; x_4 = a + 3r$$

$$\text{Entonces: } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

$$4a = 0 \Rightarrow a = 0$$

Luego:

$$\begin{array}{l} \text{Raíces} \\ \text{binarias} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -3r \\ x_2 = -r \\ x_3 = r \\ x_4 = 3r \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Raíces} \\ \text{binarias} \end{array}$$

Para el problema:

$$\bullet \quad x_1 x_4 + x_2 x_3 = -3(k+4) \Rightarrow -9r^2 - r^2 = -3(k+4)$$

$$r^2 = \frac{3}{10}(k+4) \quad \dots (1)$$

$$\bullet \quad x_1 x_2 x_3 x_4 = (k+1)^2 \Rightarrow 9r^4 = (k+1)^2$$

Extrayendo raíz cuadrada miembro a miembro:

$$3r^2 = (k+1) \Rightarrow r^2 = \pm \frac{k+1}{3} \quad \dots (2)$$

De (1) y (2):

$$\bullet \quad \frac{3}{10}(k+4) = \frac{k+1}{3} \Rightarrow k = 26$$

$$\bullet \quad \frac{3}{10}(k+4) = \frac{-(k+1)}{3} \Rightarrow k = -\frac{46}{19}$$

 $\therefore$ Como se pide el valor entero: $k = 26$

4. Indique las raíces de:

$$(x+9)(x-3)(x-7)(x+5) = 385$$

Resolución

Agrupando en la forma indicada

$$(x+9)(x-3)(x-7)(x+5) = 385$$

$$(x^2 + 2x - 63)(x^2 + 2x - 15) = 385$$

 Haciendo: $x^2 + 2x = a$, se tendrá:

$$(a - 63)(a - 15) = 385 \Rightarrow a^2 - 78a + 945 = 385$$

$$a^2 - 78a + 560 = 0 \Rightarrow (a - 70)(a - 8) = 0$$

$$\bullet \quad \text{Si: } a - 70 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 70 = 0$$

Aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-70)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{284}}{2}$$

$$x_1 = -1 + \sqrt{71} \vee x_2 = -1 - \sqrt{71}$$

$$\bullet \quad \text{Si: } a - 8 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-2) = 0$$

$$\text{Luego: } x_3 = -4 \vee x_4 = 2$$

5. Resolver: $81^{x^2} + 81^{1-x^2} = 30$ e indicar el producto de todas sus raíces.

Resolución:

$$\text{Transformando la ecuación: } 81^{x^2} + \frac{81}{81^{x^2}} = 30$$

$$\text{Haciendo: } 81^{x^2} = a \Rightarrow a + \frac{81}{a} = 30$$

$$a^2 - 30a + 81 = 0 \Rightarrow (a - 27)(a - 3) = 0$$

$$\text{Luego: } a = 27 \vee a = 3$$

$$\bullet \quad \text{Si } a = 27:$$

$$81^{x^2} = 27 \Rightarrow 3^{4x^2} = 3^3$$

$$\text{donde: } 4x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}/2$$

$$\bullet \quad \text{Si } a = 3:$$

$$81^{x^2} = 3 \Rightarrow 3^{4x^2} = 3^1$$

$$\text{de donde: } 4x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\text{Se pide: } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

◀ ECUACIONES RECÍPROCAS

Son aquellas que reducidas en uno de sus miembros contienen a un polinomio recíproco.

 Por ejemplo: $Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 - Bx + A = 0$

Observaciones

1. Toda ecuación recíproca de grado impar tiene como una de sus raíces $x = -1$.
2. Si los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos tienen signos contrarios, entonces una de sus raíces será $x = 1$ (ecuación recíproca de segunda especie).
3. En toda ecuación recíproca de grado para si una raíz es $x = a$, otra será $x = 1/a$.

Ejemplos:

1. Resolver: $4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$

Resolución:

Factorizando por el método de aspa doble especial:

$$4x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & & -3x^2 \\ 2x^2 & \times & x \end{array} \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & -2 \end{array}$$

Se tendrá: $(2x^2 - 3x + 2)(2x^2 + x + 2) = 0$

$$\bullet \text{ Si: } 2x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(4)}}{4}$$

$$\therefore x_1 = \frac{-3 + \sqrt{7}i}{4} \quad \vee \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{7}i}{4}$$

$$\bullet \text{ Si: } 2x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(4)}}{4}$$

$$\therefore x_3 = \frac{-1 + \sqrt{15}i}{4} \quad \vee \quad x_4 = \frac{-1 - \sqrt{15}i}{4}$$

2. Resolver: $x^6 - 4x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = 0$

Resolución:

Factorizando:

$$x^3 \left(x^3 - 4x^2 + 3x - 8 + \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right) = 0$$

Haciendo:

$$x + \frac{1}{x} = m; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = m^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = m^3 - 3m$$

$$\text{Luego: } x^3(m^3 - 3m - 4(m^2 - 2) + 3m - 8) = 0$$

$$x^3(m^3 - 4m^2) = 0 \Rightarrow x^3 m^2(m - 4) = 0$$

Reponiendo x :

$$x^3 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 \left(x + \frac{1}{x} - 4 \right) = 0 \Rightarrow (x^2 + 1)^2 (x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\bullet \text{ Si: } (x^2 + 1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = +1 \quad \vee \quad x_2 = -1$$

$$\bullet \text{ Si: } (x^2 - 4x + 1) = 0$$

$$\text{Por fórmula: } x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - (1)(1)}}{2}$$

$$\text{Luego: } x_3 = 2 + \sqrt{3} \quad \vee \quad x_4 = 2 - \sqrt{3}$$

◀ SISTEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y GRADO SUPERIOR

Existen muchos casos, pero los más frecuentes son aquellos en los cuales, se presentan:

A. Una suma y un producto

Ejemplos:

1. Resolver: $a + b = 3; \quad ab = 2$

Resolución:

Se recomienda formar una ecuación de segundo grado:

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 1 \quad \vee \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 2$$

Luego los pares de soluciones serán:

$$(a; b) = (2; 1) \quad \vee \quad (1; 2)$$

2. Resolver: $x^2 + y^2 = 5 \quad \dots(1)$
 $xy = 2 \quad \dots(2)$

Resolución:

$$\text{De (1) + 2(2) se tendrá: } (x + y)^2 = 9 \\ \Rightarrow x + y = \pm 3$$

• Si: $x + y = 3 \wedge xy = 2$; formamos la ecuación cuadrada:

$$m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m - 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = 2 \quad \vee \quad m = 1$$

$$\therefore (x; y) = (-2; 1) \quad \vee \quad (-1; -2)$$

• Si $x + y = -3 \wedge xy = 2$; formamos la ecuación cuadrada:

$$m^2 + 3m + 2 = 0 \Rightarrow (m + 2)(m + 1) = 0$$

$$\Rightarrow m = -2 \quad \vee \quad m = -1$$

$$\therefore (x; y) = (-2; -1) \quad \vee \quad (-1; -2)$$

B. Cuando el sistema presenta polinomios homogéneos del mismo grado

Ejemplos:

1. Resolver: $x^2 + 3xy + y^2 = 11 \quad \dots(1)$
 $xy + y^2 = 3 \quad \dots(2)$

Resolución:

En estos casos se hace: $x = my \quad \dots(3)$

$$\text{En (1): } m^2 y^2 + 3my^2 + y^2 = 11 \quad \dots(4)$$

$$\text{En (2): } m^2 y^2 + y^2 = 3 \quad \dots(5)$$

$$\frac{(3)}{(4)}: \frac{m^2 + 3m + 1}{m + 1} = \frac{11}{3} \Rightarrow 3m^2 + 9m + 3 = 11m + 11$$

Simplificando:

$$3m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (3m + 4)(m - 2) = 0$$

$$\text{Donde: } m = -4/3 \quad \vee \quad m = 2$$

$$\bullet \text{ Si } m = 2 \text{ en (5): } y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$$

$$\text{En (3): } x = \pm 2$$

$$\therefore \text{ El conjunto solución será: } (2; 1) \quad \vee \quad (-2; -1)$$

C. Casos variados

Ejemplos:

1. Resolver: $x^2 + xy + xz - x = 2 \quad \dots(1)$
 $y^2 + yz + yz - y = 4 \quad \dots(2)$
 $z^2 + zy + zx - z = 6 \quad \dots(3)$

Resolución:

Sumando (1) + (2) + (3) tendremos:

$$(x + y + z)^2 - (x + y + z) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x + y + z - 4)(x + y + z + 3) = 0$$

• Si $x + y + z = 4$

De (1): $x(x + y + z) - x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

De (2): $y(y + z + x) - y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

Luego: $z = 2$

• Si $x + y + z = -3$

De (1): $x = -1/2$

De (2): $y = -1$; luego: $z = -3/2$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2 \right); \left(-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2} \right) \right\}$$

2. Resolver: $x^2 + xy + y^2 = 28$
 $x^3y + xy^3 = 160$

Resolución:

Factorizando la segunda ecuación y agrupando la primera se tendrá:

$$xy + (x^2 + y^2) = 28 \quad \dots(1)$$

$$xy(x^2 + y^2) = 160 \quad \dots(2)$$

Haciendo $xy = p \wedge x^2 + y^2 = q$

En (1): $p + q = 28$

En (2): $pq = 160$

Entonces: $p_1 = 20 \wedge q_1 = 8 \vee p_2 = 8 \wedge q_2 = 20$

• Si: $p = 20 \wedge q = 8 \Rightarrow xy = 20, x^2 + y^2 = 8$

Luego: $x^2 + y^2 + 2xy = 8 + 40 \Rightarrow (x + y)^2 = 48$
 $x + y = \pm \sqrt{48} \Rightarrow x + y = \pm 4\sqrt{3}$

• $x + y = 4\sqrt{3} \wedge xy = 20$

$$t^2 - 4\sqrt{3}t + 20 = 0 \Rightarrow t = 2\sqrt{3} \pm 2\sqrt{2i}$$

$$x_1 = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2i}; y_1 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2i}$$

$$x_2 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2i}; y_2 = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2i}$$

• $x + y = -4\sqrt{3} \wedge xy = 20$

$$t^2 + 4\sqrt{3}t + 20 = 0$$

$$x_3 = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{2i}; y_3 = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{2i}$$

$$x_4 = -2\sqrt{3} - 2\sqrt{2i}; y_4 = -2\sqrt{3} + 2\sqrt{2i}$$

• Si: $p = 8; q = 20 \Rightarrow xy = 8; x^2 + y^2 = 20$

$$x_5 = 2; y_5 = 4 \Rightarrow x_6 = 4; y_6 = 2$$

$$x_7 = -2; y_7 = -4 \Rightarrow x_8 = -4; y_8 = -2$$

3. Resolver: $x^2 + x^2y^2 = 49$
 $x + xy + y = 11$

Resolución:

De la segunda ecuación: $(x + y) + xy = 11$

$$\Rightarrow x + y = 11 - xy \quad \dots(1)$$

De la primera ecuación:

$$x^2 + y^2 + 2xy + x^2y^2 = 49 + 2xy$$

$$(x + y)^2 + x^2y^2 = 49 + 2xy \quad \dots(2)$$

(1) en (2): $(11 - xy)^2 + x^2y^2 = 49 + 2xy$

$$121 - 22xy + x^2y^2 + x^2y^2 = 49 + 2xy$$

$$2(xy)^2 - 24(xy) + 72 = 0 \Rightarrow (xy)^2 - 12(xy) + 36 = 0$$

$$(xy - 6)^2 = 0 \Rightarrow xy = 6$$

Luego: $x + y = 5 \wedge x_1 = 2; y_1 = 3; x_2 = 3; y_2 = 2$

$$\text{CS} = \{(2, 3), (3, 2)\}$$

4. Resolver: $\frac{x^2 - y}{1 - xy} = a; \frac{y^2 - x}{1 - xy} = b$

Resolución:

$$x^2 - a = y - axy \Rightarrow x^2 - a = (1 - ax)y$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 - a}{1 - ax}$$

Reemplazando en la segunda ecuación:

$$\frac{\left(\frac{x^2 - a}{1 - ax} \right)^2 - x}{1 - x \left(\frac{x^2 - a}{1 - ax} \right)} = b$$

Efectuando en el primer miembro:

$$\frac{(x^2 - a)^2 - x(1 - ax)^2}{(1 - ax)^2} = \frac{x^4 - 2ax^2 + a^2 - x + 2ax^2 - a^2x^3}{(1 - ax)(1 - x^3)}$$

Factorizando: $\frac{a^2(1 - x^3) - x(1 - x^3)}{(1 - ax)(1 - x^3)} = b$

Luego: $\frac{a^2 - x}{1 - ax} = b \Rightarrow a^2 - b = (1 - ab)x$

$$\therefore x = \frac{a^2 - b}{1 - ab}; y = \frac{b^2 - a}{1 - ab}$$

5. Resolver: $x^2 - yz = a \quad \dots(1)$

$$y^2 - yz = b \quad \dots(2)$$

$$z^2 - yz = c \quad \dots(3)$$

Resolución:

Sea: $y = px; z = qx; (pq \neq 0)$ reemplazando en:

(1): $x^2 - (px)(qx) = a \Rightarrow x^2(1 - pq) = a$

(2): $(px)^2 - (qx)x = b \Rightarrow x^2(p^2 - q) = b$

(3): $(qx)^2 - x(px) = c \Rightarrow x^2(q^2 - p) = c$

Dividiendo convenientemente:

$$\frac{p^2 - q}{1 - pq} = \frac{b}{a}; \quad \frac{q^2 - p}{1 - p} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{\frac{a}{1 - (b^2 - ac)(c^2 - ab)}}{(a^2 - bc)^2}}$$

◀ ECUACIONES CÚBICAS Y CUÁRTICAS

Una ecuación queda resuelta algebraicamente o por radicales, cuando las raíces se pueden expresar en términos de operaciones y extracción de radicales de los coeficientes de ella.

Durante los siglos XVI y XVII, se buscó la resolución algebraica de las ecuaciones de grado superior, a la cuarta, sin resultado. En 1799 y 1828 los matemáticos Ruffini y Abel demostraron que, en general, es imposible resolver por radicales, ecuaciones de grado superior al cuarto.

Ecuación cúbica

La primera ecuación cúbica resuelta fue: $x^3 + mx = n$
 La resolvió Scipione del Ferro (1465-1526), pero no publicó sus resultados.

Otro matemático, Niccolo de Brescia, llamado Tartaglia (1499-1557), resuelve también la ecuación y profundiza los conocimientos, resolviendo.

$$x^3 = mx = \pm n$$

Tartaglia, tampoco publica su descubrimiento (era costumbre de la época mantener en secreto los nuevos métodos). Bajo promesa de no divulgarlo, Tartaglia informa a Gerolamo Cardano (1501-1576), pero Cardano publica como propio el descubrimiento de su colega, en la obra *Ars Magna* (1545).

Se resolverá la ecuación:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \dots(I)$$

$$\text{haciendo: } x = y - \frac{b}{3a} \quad \dots(II)$$

Se logra una ecuación en "y", que no contiene término cuadrático: $y^3 + py + q = 0 \quad \dots(III)$

Llamada ecuación cúbica reducida.

La ecuación (III) se puede resolver de 2 maneras:

- Haciendo: $y = u + v$
- Haciendo: $y = z - \frac{p}{3z} \quad \dots(IV)$

Se usará el segundo artificio (propuesto por Viete).

Reemplazando (IV) en (III) se obtiene:

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

$$z^6 + qz^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad \dots(V)$$

Resolviendo la ecuación (V) como cuadrática:

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta}$$

$$\text{Donde: } \Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

$$\therefore z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\Delta}} \quad \dots(VI)$$

Se sabe que la raíz cúbica de la unidad tiene 3 valores: 1, w , w^2 . Si se toman dos valores de (VI):

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} \quad y \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} \quad \dots(VII)$$

$$\text{Tal que: } AB = -\frac{p}{3}$$

Entonces las seis raíces (z_i) de la ecuación (V) son: A, wA, w^2A, B, wB, w^2B

Como $w.w^2 = 1$

$$\left. \begin{aligned} AB &= -\frac{p}{3} \\ wA.w^2B &= -\frac{p}{3} \\ w^2A.wB &= -\frac{p}{3} \end{aligned} \right\} \text{son 3 parejas}$$

$\therefore$ Por cada raíz, se tiene una pareja $-\frac{p}{3z}$, cuya suma, según (IV) es "y".

$$y = z + \left(-\frac{p}{3z}\right)$$

$\therefore$ Los tres valores de "y" son:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A + B \\ y_2 &= wA + w^2B \\ y_3 &= w^2A + wB \end{aligned} \right\} \text{Fórmulas de Cardano}$$

Finalmente de (II), las raíces de la ecuación primitiva (I) son:

$$x_1 = y_1 - \frac{b}{3a}; \quad x_2 = y_2 - \frac{b}{3a}; \quad x_3 = y_3 - \frac{b}{3a}$$

Naturaleza de raíces

Se llama discriminante de la ecuación cúbica, al valor:

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

Si los coeficientes de la ecuación (III) son reales, se escogerá A y B, tales que su producto sea real

$$(AB = -\frac{p}{3}, \text{ real}).$$

I. Si $\Delta = 0$, de (VII), se tiene: $A = B$

$$\therefore y_1 = 2A; \quad y_2 = y_3 = A(w + w^2) = -A$$

(Teniéndose en cuenta que: $1 + w + w^2 = 0$)

Las raíces de la ecuación (III) serán iguales si y solo si $p = q = 0$, en cuyo caso: $A = B = 0$

$$\therefore y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

Las raíces de la ecuación (I) serán iguales si los coeficientes de (I) son tales que el primer miembro sea un binomio al cubo.

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (mx + n)^3 = 0$$

$$\therefore x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{n}{m}$$

II. Si $\Delta > 0$, A^3 y B^3 son reales al hallar los tres valores de y, se obtiene una raíz real y dos conjugadas complejas.

III. Si $\Delta < 0$, A^3 y B^3 son complejas.

$$\text{Sean: } A^3 = r + si$$

$$B^3 = r - si$$

$$\text{Donde: } r \text{ y } s \text{ son reales: } r = -\frac{q}{2} \quad y \quad s = \sqrt{-\Delta}$$

$$\text{Haciendo: } r = \rho \cos \theta = s = \rho \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{s}{r} = \frac{\sqrt{-\Delta}}{-\frac{q}{2}}$$

$$\rho = \sqrt{r^2 + s^2} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

Se tiene entonces:

$$y = \sqrt[3]{r + si} + \sqrt[3]{r - si}, \text{ por ser: } y = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

$$y = \sqrt[3]{\rho (\cos \theta + i \sin \theta)} + \sqrt[3]{\rho (\cos \theta - i \sin \theta)}$$

$$y = \rho^{\frac{1}{3}} [(\cos \theta + i \sin \theta)^{\frac{1}{3}} + (\cos \theta - i \sin \theta)^{\frac{1}{3}}]$$

Por la fórmula de Moivre:

$$y = \rho^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{3} + \cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} - i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{3} \right)$$

$$y = 2\rho^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{3}$$

$$\text{Donde: } k = 0; 1; 2$$

$$\text{Como: } \rho = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} = \rho^{\frac{1}{3}} = \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

$$y = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{3}; k = 0; 1; 2$$

$$\text{Donde: } \tan \theta = -\frac{2\sqrt{-\Delta}}{q}; \quad (\theta: \text{valor principal})$$

Al dar a k los valores (0; 1; 2), se obtienen las tres raíces de la ecuación (III), que resultan reales.

Nota

- Los casos se refieren a la ecuación cúbica reducida: $y^3 + py + q = 0$ y no a la ecuación completa (I)
- El tercer caso, se llama caso irreducible, ya que su solución es solo posible trigonométricamente (imposible dar una respuesta con radicales).

Ejemplos

1. Resolver la ecuación:

$$x^3 - 9x^2 + 24x - 16 = 0$$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } x = y - \frac{b}{3a} = y - \frac{-9}{3(1)} = y + 3$$

$$\text{De donde: } (y + 3)^3 - 9(y + 3)^2 + 24(y + 3) - 16 = 0$$

$$\text{Efectuando: } y^3 - 3y + 2 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \left(\frac{-3}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 0$$

La ecuación reducida posee dos raíces reales iguales y una raíz real negativa de doble módulo (caso I)

Haciendo el artificio de Viete:

$$y = z - \frac{p}{3z} = z - \frac{-3}{3z} = z + \frac{1}{z}$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - \left(z + \frac{1}{z}\right) + 2 = 0$$

$$z^6 + 2z^3 + 1 = 0 \Rightarrow (z^3 + 1)^2 = 0$$

$$\therefore z^3 = -1 \Rightarrow A = B = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Como $A \cdot B = -\frac{p}{3}$, el valor de $A = B = -1$, verifica por las fórmulas de Cardano.

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= A + B = -2 \\ y_2 &= wA + w^2B = 1 \\ y_3 &= w^2A + wB = 1 \end{aligned} \right\} \text{ como: } x = y + 3$$

$$x_1 = -2 + 3 = 1$$

$$x_2 = 1 + 3 = 4$$

$$x_3 = 1 + 3 = 4$$

Usando las fórmulas (VII), con: $q = 2y \Delta = 0$

Se obtienen: $A = \sqrt[3]{-1} \wedge B = \sqrt[3]{-1}$.

$$\therefore A - B = -1 \text{ (Verificándose: } AB = -\frac{p}{3})$$

Así se evita hacer el artificio.

2. Resolver:

$$x^3 - 6x^2 - 6x - 14 = 0$$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } x = y - \frac{-6}{3(1)} = y + 2$$

$$(y + 2)^3 - 6(y + 2)^2 - 6(y + 2) - 14 = 0$$

$$y^3 - 18y - 42 = 0 \quad \begin{cases} p = -18 \\ q = -42 \end{cases}$$

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = (-6)^3 + (-21)^2 = 225$$

Como $\Delta > 0$, se tendrá una raíz real y dos complejas, usando directamente las fórmulas (VII).

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{36}; \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{-6}$$

$$\text{Como: } AB = -\frac{p}{2} = \sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[3]{-6} = -\frac{18}{3} \text{ (cumple)}$$

$$\therefore y_1 = A + B = \sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{-6}$$

$$y_2 = wA + w^2B = \sqrt[3]{36} + w^2\sqrt[3]{-6}$$

$$y_3 = w^2A + wB = w^2\sqrt[3]{36} + w\sqrt[3]{-6}$$

Dando la respuesta con decimales, teniendo en cuenta que: $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Se obtiene:

$$y_1 = 5,1190470; y_2 = -2,5595235 + 1,2858806i;$$

$$y_3 = -2,5595235 - 1,2858806i$$

$$\text{Como: } x_1 = y_1 + 2$$

$$x_1 = 7,1190470$$

$$x_2 = -0,5595235 + 1,2858806i$$

$$x_3 = -0,5595235 - 1,2858806i$$

Nota

No es necesario memorizar las fórmulas que se presentan, ya que dado el caso, se tienen a la mano en cualquier texto o manual, o se tiene la presente obra.

3. Resolver:

$$y^3 - 5y - 1 = 0 \quad \begin{cases} p = -5 \\ q = -1 \end{cases} \text{ (ecuación reducida)}$$

Resolución:

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = \frac{473}{108} \text{ (caso irreducible)}$$

Como $\Delta > 0$, la ecuación posee 3 raíces reales.

De las fórmulas dadas:

$$y = 2\sqrt{\frac{p}{3}} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{3} \quad \begin{cases} \tan \theta = \frac{2\sqrt{-\Delta}}{q} \\ \tan \theta = 4,1855128 \\ \theta = 1,336273 \text{ rad} \end{cases}$$

$$y = 2\sqrt{\frac{5}{3}} \cos \frac{1,336273 + 2k\pi}{3}$$

Donde: $\pi = 3,1416$ rad (los ángulos en radianes)

Si $k = 0$: $y_1 = 2,3300589$

$$k = 1: y_2 = -2,1284185$$

$$k = 2: y_3 = 0,2016404$$

Ecuación cuártica

Resuelta la ecuación cúbica, los matemáticos del siglo XVI, buscaron afanosamente un método para resolver la ecuación de cuarto grado. El método para resolver lo encontró Ludovico Ferrari (1522–1565). El trabajo de Ferrari lo publicó Cardano.

Método de Ferrari: Resuelve la ecuación mónica, normal u ordinaria ($a = 1$) de la forma:

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

$$\text{Luego: } x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e$$

Completando cuadros en el primer miembro:

$$x^4 + bx^3 + \frac{b^2}{4}x^2 = \frac{b^2}{4}x^2 - cx^2 - dx - e$$

$$(x^2 + \frac{b}{2}x)^2 = \frac{b^2}{4}x^2 - cx^2 - dx - e$$

Se introduce ahora un parámetro k , tal que forme en el primer miembro un nuevo cuadrado perfecto.

$$\text{Se agrega: } (x^2 + \frac{b}{2}x)k + \frac{k^2}{4}$$

$$(x^2 + \frac{b}{2}x)^2 + (x^2 + \frac{b}{2}x)k + \frac{k^2}{4} = (x^2 + \frac{b}{2}x)k + \frac{k^2}{4} + \frac{b^2}{4}x^2 - cx^2 - dx - e$$

$$(x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{k}{2})^2 = (k + \frac{b^2}{4} - c)x^2 + (\frac{bk}{2} - d)x + (\frac{k^2}{4} - e)$$

El problema consiste ahora en hallar un valor de k , que haga del segundo miembro un cuadrado perfecto. Este valor se obtiene igualando a cero el discriminante de la ecuación cuadrática que resulta al igualar a cero el segundo miembro de la ecuación.

Al igualar a cero el discriminante, resulta una ecuación cúbica en k . Se busca una raíz real de esta ecuación cúbica y este valor (cualquier raíz real sirve) se usa como valor de k .

Al reemplazar el valor de k , se obtiene:

$$(x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{k}{2})^2 = (mx + n)^2$$

Donde m y n son los valores que resultan al factorizar el segundo miembro con el valor de k hallado. La solución de la ecuación cuártica, se obtiene del sistema:

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{k}{2} = \pm(mx + n)$$

$$\text{De donde: } x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{k}{2} = +(mx + n)$$

$$x^2 + \frac{b}{2}x + \frac{k}{2} = -(mx + n)$$

que son dos ecuaciones de segundo grado, o sea se obtienen 4 raíces.

Ejemplo:

$$\text{Resolver } x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0$$

Resolución:

$$x^4 - 2x^3 = 2x^2 + 2x + 3$$

Completando cuadrados:

$$x^4 - 2x^3 + x^2 = 3x^2 + 2x + 3$$

$$(x^2 - x)^2 = 3x^2 + 2x + 3$$

Completando cuadrados nuevamente (con k):

$$(x^2 - x)^2 + (x^2 - x)k + \frac{k^2}{4} = (x^2 - x)k + \frac{k^2}{4} - 3x^2 + 2x + 3$$

$$(x^2 - x + \frac{k}{2})^2 = (k + 3)x^2 + (2 - k)x + (\frac{k^2}{4} + 3) = 0 \dots(\alpha)$$

El discriminante de esta ecuación se iguala a cero (para que sea trinomio cuadrado perfecto).

$$\Delta = (2 - k)^2 - 4(k + 3)(\frac{k^2}{4} + 3) = 0$$

$$\text{Efectuando: } k^3 + 2k^2 + 16k + 32 = 0 \dots(\beta)$$

Por Ruffini, ensayando divisores de 32, se obtiene $k = -2$, o sea $k = -2$ es raíz de β .

Reemplazando $k = -2$ (raíz real de β) en (α) :

$$(x^2 - x - 1)^2 = x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 1 = \pm(x + 2)$$

Simplificando:

$$\bullet x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\bullet x^2 + 1 = 0 \quad \begin{cases} x = i \\ x = -i \end{cases}$$

Las soluciones serán: 3; -1; i y $-i$.

Método de Descartes. En 1637, el matemático Descartes propuso el siguiente método:

Sea la ecuación cuadrática reducida.

$$(a = 1 \text{ y } b = 0)$$

$$x^4 + cx^2 + dx + e = 0$$

Se supone:

$$x^4 + cx^2 + dx + e = (x^2 + mx + \ell)(x^2 - mx + n)$$

efectuando e igualando coeficientes por el teorema de polinomios idénticos:

$$\left. \begin{aligned} n + \ell - m^2 &= c \\ (n - \ell) &= d \\ n\ell &= e \end{aligned} \right\} \text{ 3 ecuaciones con 3 incógnitas } m, n \text{ y } \ell$$

$$\text{De las dos primeras: } 2n = m^2 + c + \frac{d}{m}$$

$$\text{En la tercera: } 2n = m^2 + c - \frac{d}{m}$$

$$\Rightarrow (m^2 + c + \frac{d}{m})(m^2 + c - \frac{d}{m}) = 4e$$

$$\text{Ordenando: } m^6 + 2cm^4 + (c^2 - 4e)m^2 - d^2 = 0$$

Ecuación cúbica en m^2 , al hallar m^2 se calculan n y ℓ .

La ecuación cuártica queda resuelta al hallar las raíces de: $x^2 + mx + \ell = 0 \wedge x^2 - mx + n = 0$

Raíces cúbicas de la unidad

Resolveremos: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$$\bullet x - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\bullet \quad x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i; x_3 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

Estas raíces se reconocen generalmente como:

1, w y w^2

Observar que: $x_2^2 = x_3$ y $x_3^2 = x_2$

De allí que el cuadrado de una de las complejas da la otra.

Es fácil comprobar:

$$\bullet \quad 1 + w + w^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$$

$$1 + w + w^2 = 0$$

$$\bullet \quad w \cdot w^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = 1$$

$$w \cdot w^2 = 1$$

Ejemplo:

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = 0$$

Resolución:

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = (x^2 + mx + \ell)(x^2 - mx + n) \quad \dots(\alpha)$$

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = x^4 + (n + \ell - m^2)x^2 + m(n - \ell)x + n\ell$$

$$\Rightarrow n + \ell - m^2 = -3 \wedge m(n - \ell) = -6$$

Resolviendo el sistema para m :

$$m^6 - 6m^4 + 17m^2 - 36 = 0 \quad (\text{ecuación cúbica en } m^2)$$

Haciendo: $m^2 = y \Rightarrow y^3 - 6y^2 + 17y - 36 = 0$ que se verifica para $y = 4 \Rightarrow$ al final: $m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$

Con $m = 2$, ($m = -2$) sería igual

se obtiene: $n = 2$; $\ell = -1$

Reemplazando en (α) :

$$x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$$

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \pm i$$

$\therefore$ Las soluciones serán: $-1 \pm \sqrt{2}$; $1 \pm i$



Muchas ecuaciones cúbicas se pueden resolver factorizándolas por el método del aspa doble especial.

Ejemplo:

$$\text{Resolver: } x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0$$

Resolución:

Factorizando por el aspa doble especial, se tiene:

$$x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 26x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 7x + 12)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x - 4)(x + 2)(x - 1) = 0$$

Igualando cada lector o cero:

$$x_1 = 3; x_2 = 4; x_3 = -2; x_4 = 1$$



PROBLEMAS

1. Resolver la ecuación e indicar una de las raíces:

$$(x + a + b + 2c)^{-1} - x^{-1} = (a + c)^{-1} + (b + c)^{-1}$$

Resolución:

Escribimos:

$$\frac{1}{x + a + b + 2c} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a + c} + \frac{1}{b + c}$$

$$\frac{x - x - a - b - 2c}{(x + a + b + 2c)x} = \frac{b + c + a + c}{(a + c)(b + c)}$$

$$\frac{-(a + b + 2c)}{(x + a + b + 2c)x} = \frac{a + b + 2c}{(a + c)(b + c)}$$

$$\Rightarrow -(a + c)(b + c) = x^2 + (a + b + 2c)x$$

$$\Rightarrow x^2 + (a + b + 2c)x + (a + c)(b + c)$$

$$\begin{array}{c} x \quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \quad a + c \\ x \quad \quad \quad \quad \quad \quad b + c \end{array}$$

$$\Rightarrow (x + a + c)(x + b + c) = 0$$

$$\therefore \text{De aquí: } x = -a - c; \quad x = -b - c$$

2. Si x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:

$$3x^2 + px + 4 = 0, \text{ determinar un valor de } p, \text{ de}$$

$$\text{modo que: } \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

RESUELTOS

Resolución:

$$\text{De } 3x^2 + px + 4 = 0$$

$$\text{Dato: } x_1 + x_2 = -\frac{p}{3}; \quad x_1 x_2 = \frac{4}{3}$$

$$\text{Del dato: } \frac{x_1}{x_2} = -\frac{1}{3} \vee \frac{x_1}{x_2} = +\frac{1}{3}$$

$$\bullet \text{ Si } x_2 = -3x_1, \text{ en } (\beta): -3x_1^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x_1^2 = -\frac{4}{9}$$

$$\text{En } (\alpha): -2x_1 = -\frac{p}{3} \Rightarrow x_1 = \frac{p}{6}$$

Reemplazando en lo anterior:

$$\left(\frac{p^2}{6}\right) = -\frac{4}{9} \Rightarrow p^2 = 36\left(-\frac{4}{9}\right) \Rightarrow p^2 = -16$$

$$\therefore p = 4i \vee p = -4i$$

$$\bullet \text{ Si } x_2 = 3x_1, \text{ aquí no aparece respuesta.}$$

3. Si x_1, x_2 son raíces de la ecuación:

$$(a^4 - b^4)x^2 + (b^4 - c^4)x = a^4 - c^4$$

$$a \neq \pm b; a, b, c \in \mathbb{R}. \text{ Calcular: } x_1^{x_2} + x_2^{x_1} - x_1 x_2$$

18. En relación a la ecuación bicuadrada:

$$(13-k)x^4 + \left(\frac{k}{4}-3\right)x^3 + \left(\frac{k}{q}-5\right)x^2 + \left(\frac{k-q}{5}-2\right)x - k = 0,$$

indicar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

I. El valor de q es 2II. $k + q = 14$ III. $x^4 + 2x^2 - 12 = 0$ IV. Una raíz es $-\sqrt{3}$ **Resolución:**

Si la ecuación:

$$(13-k)x^4 + \left(\frac{k}{4}-3\right)x^3 + \left(\frac{k}{q}-5\right)x^2 + \left(\frac{k-q}{5}-2\right)x - k = 0$$

es bicuadrada, debe carecer de término cúbico y término lineal.

$$\Rightarrow \frac{k}{4} - 3 = 0 \wedge \frac{k-q}{5} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = 12 \wedge q = 2$$

Luego, la ecuación es: $x^4 + x^2 - 12 = 0$

Factorizando: $(x^2 + 4)(x^2 - 3) = 0$

$$\bullet x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm 2i$$

$$\bullet x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm \sqrt{3}$$

$\therefore$ (I) es V; (II) es V; (III) es F; (IV) es V.

19. Si $a_1 = m + 2$; $a_2 = m - 1$; $a_3 = 2 - m$ son los coeficientes de la ecuación $a_1x^4 + a_2x^2 + a_3 = 0$, tal que $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, determinar el valor de la mayor raíz.

Resolución:

De: $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$

$$(m - 1) - (m + 2) = (2 - m) - (m - 1)$$

$$-3 = -2m + 3 \Rightarrow m = 3$$

Luego, la ecuación es: $5x^4 + 2x^2 - 1 = 0$

$$\text{Donde: } x = \pm \sqrt{\frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{10}}$$

$$\therefore \text{El mayor valor de la raíz es: } \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{6}}{5}}$$

20. Resolver la ecuación:

$$(x+1)^5 - (x-1)^5 = 7x^4 + 35x^2 - 10$$

Indicar la diferencia entre la mayor y menor de las raíces obtenidas.

Resolución:

Desarrollando por binomio de Newton:

$$\bullet (x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$$

$$\bullet (x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Restando y reemplazando en la igualdad dada se tiene: $10x^4 + 20x^2 + 2 = 7x^4 + 35x^2 = 10$

$$\Rightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-2)(x+1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 2; x_3 = -1; x_4 = 1$$

$$\therefore x_2 - x_1 = 2 - (-2) = 4$$

21. Construir una ecuación bicuadrada en la que la suma de los cuadrados de sus raíces es 35 y el producto 70.

Resolución:

Si α y β son raíces de una ecuación bicuadrada, las otras raíces son $-\alpha$ y $-\beta$.

Luego, la ecuación que dio origen a estas es:

$$x^4 - (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha\beta)^2 = 0 \dots (1)$$

Por datos:

$$\bullet \alpha^2 + \beta^2 + (-\alpha)^2 + (-\beta)^2 = 35$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{35}{2}$$

$$\bullet \alpha \times \beta(-\alpha)(-\beta) = 70 \Rightarrow (\alpha\beta)^2 = 70$$

$$\text{En (1): } x^4 - \frac{35}{2}x^2 + 70 = 0 \vee 2x^4 - 35x^2 + 140 = 0$$

22. En relación al conjunto:

$$S = \{x \in \mathbb{R} / (x+6)^{5/6} + x^2 = x(x+6)^{1/2} + x(x+6)^{1/3}\}$$

Indicar el valor de verdad de las proposiciones siguientes:

$$\text{I. } S = \{ \}$$

$$\text{II. } n(S) = 3$$

$$\text{III. Si } S = \{a; b\} \Rightarrow a^2 + b^2 = 13$$

$$\text{IV. } S \subset \{3; 8\}$$

Resolución:

$$\text{De } (x+6)^{5/6} + x^2 = x(x+6)^{1/2} + x(x+6)^{1/3} \dots (1)$$

Obsérvese: $x > 0$

$$\text{Sea: } (x+6)^{1/2} = a \wedge (x+6)^{1/3} = b$$

$$\text{En (1): } ab + x^2 = xa + xb$$

$$\Rightarrow x^2 - (a+b)x + ab = 0$$

$$(x-a)(x-b) = 0 \Rightarrow x = a \vee x = b$$

$$\bullet \text{ Si } x = a \Rightarrow x = (x+6)^{1/2}$$

$$\Rightarrow x^2 = x+6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 3 \vee x = -2$$

$$\bullet \text{ Si } x = b \Rightarrow x = (x+6)^{1/3}$$

$$\Rightarrow x^3 = x+6 \Rightarrow x^3 - x - 6 = 0$$

Factorizando por divisores binomios, se tiene:

$$(x-2)(x^2 + 2x + 3) = 0$$

$$x \notin \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Luego: } S = \{2; 3\}$$

$\therefore$ Para las proposiciones: FFVF

23. Si x_1 y x_2 son dos soluciones de la ecuación:

$$\sqrt[3]{0,5x-0,2} + \sqrt[3]{0,2x-0,5} = \sqrt[3]{2,8(x-1)}$$

$$\text{determinar el valor de: } R = \frac{x_1+2}{x_2+2} + \frac{x_2+2}{x_1+2}$$

Resolución:

Se puede escribir:

$$\sqrt[3]{\frac{5x-2}{10}} + \sqrt[3]{\frac{2x-5}{10}} = \sqrt[3]{\frac{28(x-1)}{10}}$$

$$\sqrt[3]{5x-2} + \sqrt[3]{2x-5} = \sqrt[3]{28(x-1)}$$

$$\sqrt[3]{5x-2} + \sqrt[3]{2x-5} = \sqrt[3]{28(x-1)} \dots (1)$$

Por productos notables:

$$\text{Si } a + b + c = 0 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

Aplicando en (I):

$$(5x - 2) + (2x - 5) - \sqrt[3]{28(x-1)} = 3\sqrt[3]{5x-2} \cdot \sqrt[3]{2x-5} \cdot (-\sqrt[3]{28(x-1)})$$

Reduciendo, nos queda:

$$7(x-1) = \sqrt[3]{(5x-2)(2x-5)28(x-1)}$$

Elevamos al cubo:

$$7^3(x-1)^3 = (5x-2)(2x-5)28(x-1)$$

Cancelamos $7(x-1)$, pero para no perder solución: $7(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$, es solución.

Luego, nos queda por resolver:

$$49(x-1)^2 = (5x-2)(2x-5)4 \\ \Rightarrow 49x^2 - 98x + 49 = 40x^2 - 116x + 40$$

De aquí se obtiene: $x^2 + 2x + 1 = 0$

$$\Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

Asumimos: $x_1 = 1 \wedge x_2 = -1$

$$\therefore R = \frac{1+2}{-1+2} + \frac{-1+2}{1+2} = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

24. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x^2 - 16x + 24} + \sqrt{3x^2 - 16x - 3} = 9$$

Calcular la suma de sus raíces.

Resolución:

$$\sqrt{3x^2 - 16x + 24} + \sqrt{3x^2 - 16x - 3} = 9 \quad \dots(I)$$

Observar que:

$$(3x^2 - 16x + 24) - (3x^2 - 16x - 3) = 27$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3x^2 - 16x + 24} + \sqrt{3x^2 - 16x - 3})$$

$$(\sqrt{3x^2 - 16x + 24} - \sqrt{3x^2 - 16x - 3}) = 9x^3$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x^2 - 16x + 24} - \sqrt{3x^2 - 16x - 3} = 3 \quad \dots(II)$$

$$(I) + (II): 2\sqrt{3x^2 - 16x + 24} = 12$$

$$\text{Al cuadrado: } 3x^2 - 16x + 24 = 36$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 16x - 12 = 0 \Rightarrow (3x+2)(x-6) = 0$$

$\therefore$ Suma de raíces: 16/3

25. Encontrar la incógnita x de la siguiente ecuación:

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

Resolución:

$$\text{De } \sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} = \sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} - \sqrt[3]{b} = 0$$

$$\Rightarrow (a+\sqrt{x}) + (a-\sqrt{x}) - b = 3\sqrt[3]{a+\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{a-\sqrt{x}} \cdot (-\sqrt[3]{b})$$

$$\Rightarrow 2a - b = -3\sqrt[3]{(a^2 - x)b}$$

Elevamos al cubo: $(2a - b)^3 = -27(a^2 - x)b$

$$\Rightarrow -a^2 + x = \frac{(2a - b)^3}{27b}$$

$$\therefore x = \frac{(2a - b)^3 + 27a^2b}{27b}$$

26. Determinar la mayor de las raíces de:

$$12x^4 + 91x^3 + 194x^2 + 91x + 12 = 0$$

Resolución:

$$12x^4 + 91x^3 + 194x^2 + 91x + 12 = 0$$

Como $x \neq 0$, entre x^2 :

$$12x^2 + 91x + 194 + \frac{91}{x} + \frac{12}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow 12\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 91\left(x + \frac{1}{x}\right) + 194 = 0$$

$$\text{Sea: } x + \frac{1}{x} = a \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$$

Reemplazando: $12(a^2 - 2) + 91(a) + 194 = 0$

$$12a^2 + 91a + 170 = 0 \Rightarrow (4a + 17)(3a + 10) = 0$$

$$(4a + 17) \Rightarrow a = -\frac{17}{4}$$

$$(3a + 10) \Rightarrow a = -\frac{10}{3}$$

$$\bullet a = -\frac{17}{4} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{17}{4} = -4 - \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x_1 = -4 \vee x_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\bullet a = -\frac{10}{3} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} = -3 - \frac{1}{3} \\ \Rightarrow x_3 = -3 \vee x_4 = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{La mayor raíz es: } -\frac{1}{4}$$

27. Calcular la suma de las raíces no reales de la ecuación:

$$2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0$$

Resolución:

$$2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 6x^2 + 7x - 2 = 0$$

Recordar que para toda ecuación recíproca de grado impar, una raíz es 1 o -1.

En nuestro caso, $x = 1$ es una raíz.

	2	-7	6	-6	7	-2
$x = 1$	↓	2	-5	1	-5	2
	2	-5	1	-5	2	0

Las otras raíces se obtienen de:

$$2x^4 - 5x^3 + x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\text{Factorizando: } (2x^2 + x + 2)(x^2 - 3x + 1) = 0$$

Las raíces no reales de la ecuación inicial, se obtendrán de $2x^2 + x + 2 = 0$, pues $\Delta = -15 < 0$

$$\therefore \text{La suma de raíces no reales será: } -\frac{1}{2}$$

28. Resolver la ecuación: $\sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1 + \sqrt{-2 + \sqrt{x}}$ e indicar la suma de las cifras de la solución.

Resolución:

$$\text{Nótese que: } \sqrt{x} - 2 > 0 \wedge x > 0$$

$$\text{De donde: CVA: } x > 4$$

$$\text{Luego: } \sqrt{\frac{x}{x-2}} = 1 + \sqrt{-2 + \sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{-2 + \sqrt{x}} + \sqrt{x} - 2$$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{-2 + \sqrt{x}} \Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 36 \quad (x \in \text{CVA})$$

$\therefore$ Suma de cifras: 9.

29. Si $x > -1$, calcular la suma de las soluciones reales de la ecuación:

$$\frac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+7} = \frac{7}{\sqrt{x+1}}$$

Resolución:

Como $x > -1$, por $\sqrt{x+1}$:

$$\sqrt{x^2+8x} + \sqrt{(x+1)(x+7)} = 7$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+8x} + \sqrt{x^2+8x+7} = 7$$

Sea $\sqrt{x^2+8x} = a$, entonces la ecuación quedará así:

$$a + \sqrt{a^2+7} = 7 \Rightarrow \sqrt{a^2+7} = 7-a$$

$$\Rightarrow a^2+7 = 49 - 14a + a^2 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{Luego: } \sqrt{x^2+8x} = 3$$

$$\Rightarrow x^2+8x-9=0 \Rightarrow x_1=1; x_2=-9$$

Pero $x > -1$, por lo tanto: $x = 1$

30. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2y + xy^2 = 120 \end{cases}$$

determinar la suma de todas las soluciones para x e y .

Resolución:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 152 & \dots(1) \\ xy(x+y) = 120 & \dots(2) \end{cases}$$

$$(1) + 3(2): x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 152 + 360$$

$$\Rightarrow (x+y)^3 = 512$$

$$\Rightarrow x+y = 8; x+y = 8\omega; x+y = 8\omega^2$$

$$\text{Donde: } \omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\bullet x+y=8 \Rightarrow \text{En (2): } xy = 15$$

$$\Rightarrow (x; y) = (5; 3) \vee (x; y) = (3; 5)$$

$$\bullet x+y=8\omega \Rightarrow \text{En (2): } xy = 15\omega^2$$

$$\Rightarrow (x; y) = (5\omega; 3\omega); (x; y) = (3\omega; 5\omega)$$

$$\bullet x+y=8\omega^2 \Rightarrow \text{En (2): } xy = 15\omega$$

$$\Rightarrow (x; y) = (5\omega^2; 3\omega^2); (x; y) = (3\omega^2; 5\omega^2)$$

La suma de todas las soluciones para x e y es igual a 0.

El problema debería señalar solo a las soluciones reales del sistema en ese caso, suma: 16

31. Determine el producto de las raíces de la ecuación:

$$x^3 - ax^2 + 2ax - b = 0; a > 0, \text{ sabiendo que su CS} \\ = \{x_1; x_2; x_3\}, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 21 \text{ y } x_2 = 2x_1 \neq 0$$

Resolución:

$$\text{De } x^3 - ax^2 + 2ax - b = 0; a > 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = a \quad \dots(1)$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2a \quad \dots(2)$$

$$x_1x_2x_3 = b = ?$$

Elevo (1) al cuadrado:

$$\underbrace{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}_{21} + \underbrace{2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)}_{2a} = a^2$$

$$\text{De aquí: } a^2 - 4a - 21 = 0$$

$$(a-7)(a+3) = 0 \Rightarrow a = 7 \vee a = -3$$

$$\text{Si: } a = 7 \text{ y } x_2 = 2x_1$$

$$\text{En (1): } 3x_1 + x_3 = 7 \Rightarrow x_3 = 7 - 3x_1$$

$$\text{En (2): } 2x_1 + x_1x_3 + 2x_1x_3 = 14$$

$$\Rightarrow 2x_1^2 + 3x_1x_3 = 14 \vee 2x_1^2 + 3x_1(7 - 3x_1) = 14$$

$$\text{De aquí: } x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$$

$$(x_1 - 2)(x_1 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 2 \vee x_1 = 1$$

$$\text{Si: } x_1 = 2 \Rightarrow x_2 = 4 \wedge x_3 = 1$$

$$\text{Si: } x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 2 \wedge x_3 = 4$$

Observar que en cualquiera de los casos: $x_1x_2x_3 = 8$

32. Dado el polinomio: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 9$, si $P(m) = P(n) = P(r) = 0$. Determine el valor de:

$$P\left(\frac{m}{mr} + \frac{n}{mr} + \frac{r}{mn}\right)$$

Resolución:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 9 \quad \dots(1)$$

$$\text{Si: } P(m) = P(n) = P(r) = 0$$

$$\Rightarrow m, n \text{ y } r \text{ son raíces de } P(x)$$

$$\text{Luego: } m + n + r = -3 \quad \dots(1)$$

$$mn + mr + nr = 0 \quad \dots(2)$$

$$mnr = 9 \quad \dots(3)$$

$$\text{Piden: } P\left(\frac{m}{nr} + \frac{n}{mr} + \frac{r}{mn}\right) = P\left(\frac{m^2 + n^2 + r^2}{mnr}\right)$$

$$(1)^2: m^2 + n^2 + r^2 + 2(mn + mr + nr) = 9$$

$$\Rightarrow m^2 + n^2 + r^2 = 9$$

$$\Rightarrow \text{Lo que nos piden es: } P(x) = P(1)$$

$$\text{En (1): } P(1) = 1 + 3 - 9 = -5$$

33. Sea P una función polinomial mónica de grado 5; además: $P(1) = 3$, $P(2) = 5$, $P(3) = 7$, $P(4) = 9$, $P(5) = 11$, si $G(x) = P(x) - 2x - 1$, determine el número de raíces reales de $G(x) = 0$

Resolución:

$P(x)$ es de 5.º grado; donde:

$$P(1) = 3; P(2) = 5; P(3) = 7; P(4) = 9 \text{ y } P(5) = 11$$

$$\text{Como } G(x) = P(x) - 2x - 1 \quad \dots(1)$$

$$\Rightarrow G(x) \text{ también es de grado 5}$$

En (1), vemos que:

$$G(1) = \frac{P(1)}{3} - 2 - 1 \Rightarrow G(1) = 0$$

En forma similar, se tiene:

$$G(2) = G(3) = G(4) = G(5) = 0$$

$$\therefore 1; 2; 3; 4 \text{ y } 5 \text{ son raíces de } G(x) = 0$$

34. Halle la suma de soluciones de:

$$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{1-x} = x\sqrt[3]{2}$$

Resolución:

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1-x} = x\sqrt[3]{2} \dots \text{ al cubo}$$

$$(x+1) + (1-x) + 3\sqrt[3]{x^2-1} - 1x\sqrt[3]{2} = 2x^3$$

$$3\sqrt[3]{2(x^2-1)}x = 2(x^2-1) \Rightarrow x = 0$$

$$\vee 3\sqrt[3]{2(x^2-1)} = 2(x^2-1)$$

$$\text{Sea: } 2(x^2-1) = t^3 \Rightarrow 3t = t^3$$

$$\Rightarrow t = 0 \vee t = \sqrt{3} \vee t = -\sqrt{3}$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = \pm 1 \quad \vee \quad x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}\sqrt{3} + 1}$$

∴ La suma es 0

35. Si x_1, x_2 y x_3 son raíces de la ecuación:
 $x^3 + 8x - 24 = 0$, hallar el valor de: $x_1^5 + x_2^5 + x_3^5$

Resolución:

$$\text{De: } x^3 + 8x - 24 = 0$$

$$\text{Por Cardano y Viète: } x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Por productos notables se cumple:

$$x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -5(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

De la ecuación, por Cardano:

$$x_1x_2x_3 = 24; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 8$$

$$\therefore x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 = -5(24)(8) = -960$$

36. Siendo a, b y c las raíces de la ecuación:
 $x^3 + x + 3 = 0$, determine el valor de: $T = a^3 + b^3 + c^3$

Resolución:

$$\text{Como } a, b, c \text{ son raíces de: } x^3 + x + 3 = 0$$

Por Cardano y Viète:

$$a + b + c = 0 \quad \text{y} \quad abc = -3$$

Por productos notables se sabe que:

$$a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$\text{En lo pedido: } T = 3abc \quad \therefore T = 3(-3) = -9$$

37. Si: x_1, x_2 y x_3 son las raíces de la ecuación:
 $2x^3 - 6x^2 + 8x - 5 = 0$, calcule el valor de:

$$E = 2(x_1 + x_2 + x_3)/5$$

Resolución:

$$2x^3 - 6x^2 + 8x - 5 = 0$$

x_1 es raíz de la ecuación

$$\Rightarrow 2x_1^3 - 6x_1^2 + 8x_1 - 5 = 0 \Rightarrow 2x_1(x_1^2 - 3x_1 + 4) = 5$$

En forma similar para las raíces x_2 y x_3 , se tiene:

Sumando las igualdades se tiene:

$$E = \frac{2(x_1 + x_2 + x_3)}{5}$$

$$\text{Pero: } x_1 + x_2 + x_3 = 3 \quad \therefore E = \frac{6}{5}$$

38. Determine el valor de "a", si se sabe que las raíces de la ecuación $4x^4 - 28x^3 + (2a + 5)x^2 - 14x - a = 0$ satisfacen la relación:

Resolución:

Efectuando en lo pedido:

$$\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_3x_4} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_1x_4} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_2x_4} = -\frac{53}{24} \quad \dots(\alpha)$$

Pero de la ecuación:

$$4x^4 - 28x^3 + (2a + 5)x^2 - 14x - a = 0$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_3x_4 = \frac{2a + 5}{4}$$

$$x_1x_2x_3x_4 = -\frac{a}{4}$$

$$\text{En } (\alpha): \frac{2a + 5/4}{-a/4} = -\frac{53}{24} \Rightarrow \frac{2a + 5}{a} = \frac{53}{24} \quad \therefore a = 24$$

39. Si: a, b, c son las raíces de la ecuación:
 $2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$; determine el valor de:

$$E = \frac{c + b + a}{abc}$$

Resolución:

$$\text{Si } a, b, c \text{ son raíces de: } 2x^3 + x^2 - 3x + 2 = 0$$

Por Cardano y Viète:

$$a + b + c = -\frac{1}{2} \quad \wedge \quad abc = -1$$

$$\text{Nos piden: } E = \frac{c + b + a}{abc} \Rightarrow E = \frac{-1/2}{-1} \therefore E = 1/2$$

40. Si se cumple que: $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 727$;
 $x \neq 0$. Calcular: $P = \sqrt[3]{(2 - \sqrt{3})^x [1 + (2 + \sqrt{3})^x]}$

Resolución:

$$\text{Sea } (2 + \sqrt{3})^x = a^2$$

$$\text{Racionalizando: } \frac{1}{a^2} = (2 - \sqrt{3})^x$$

Reemplazando en la condición

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = 727 \Rightarrow \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = 729$$

$$\Rightarrow a + \frac{1}{a} = 27; \text{ pero piden:}$$

$$P = \sqrt[3]{\frac{1}{a^2} [1 + a^2]} = \sqrt[3]{\frac{1}{a} + a} = \sqrt[3]{27} \quad \therefore P = 3$$

41. Calcule el valor de x que satisface la siguiente igualdad: $\sqrt[3]{7 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{x}} = 2$

Resolución:

$$\text{CVA: } x \geq 0$$

Elevando al cubo miembro a miembro:

$$7 + \sqrt{x} + 7 - \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{49 - x}(\sqrt[3]{7 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{7 - \sqrt{x}}) = 2^3$$

$$\Rightarrow 14 + 6\sqrt[3]{49 - x} = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{49 - x} = -1$$

$$\therefore x = 50$$

42. Respecto a la ecuación fraccionaria:

$$\frac{1}{2x - 3} + \frac{5 + x}{2x^2 - 3x} = 4 - \frac{10x - 23}{2x^2 - 3x}$$

Indicar el valor de verdad de las afirmaciones

I. Su conjunto solución es $\{0; 3/2\}$

II. Su conjunto solución es $\{1/4; 3/2\}$

III. Es indeterminada

IV. Es incompatible

Resolución:

Antes de resolver la ecuación se debe tener en cuenta que: $x \neq 0 \quad \wedge \quad x \neq 3/2$

Ahora resolvemos la ecuación:

$$\frac{x}{2x^2 - 3x} + \frac{5 + x}{2x^2 - 3x} = \frac{8x^2 - 12x - 10x + 23}{2x^2 - 3x}$$

De donde:

$$(2x - 3)^2 = 0 \Rightarrow x = 3/2, \text{ lo cual no puede ser.}$$

La ecuación es incompatible

∴ FFFV

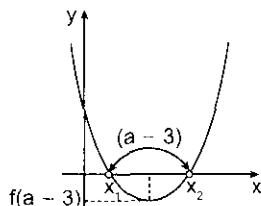
43. Si $\{x_1, x_2\}$ es el conjunto solución de la ecuación en x : $3x^2 - 2(a+2)x + 3(a-1) = 0$, $a \in \mathbb{R}$

Para cuántos valores enteros de a se verifica que:
 $x_1 + 3 < a < x_2 + 3$

Resolución:

Sea $f(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + 3(a-1)$ / $x_1 < a-3 < x_2$

Graticando se observa:



$$\Delta > 0 \wedge f(a-3) < 0$$

Resolviendo:

$$a^2 - 13a + 36 > 0 \wedge (a-9)(a-4) < 0$$

$$a \in \mathbb{R} \wedge 4 < a < 9$$

Como $a \in \mathbb{Z}$: $a = \{5, 6, 7, 8\}$ $\therefore$ 5 valores

44. Dada la ecuación cuadrática en x :

$$ax^2 + bx = c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Se afirma que son verdaderas las proposiciones:

- Las raíces son una positiva y una negativa
 $\Rightarrow ac > 0$
- Si: $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow$ las raíces son iguales.
- Las raíces son imaginarias conjugadas, si:
 $b^2 + 4ac < 0$

Resolución:

De la ecuación: $ax^2 + bx - c = 0$

$$\text{I. } x_1 x_2 = \frac{-c}{a} < 0 \Rightarrow ac > 0 \wedge \Delta = b^2 + 4ac > 0$$

II. Para que las raíces sean iguales debe cumplirse $\Delta = b^2 + 4ac = 0$

III. Para que las raíces sean imaginarias conjugadas debe cumplirse $\Delta = b^2 + 4ac < 0$

$\therefore$ I y II

45. Resolver: $x^4 - 2x^3 + mx^2 + 22x + n = 0$

Sabiendo que sus raíces están en PA. hallar la suma de las dos menores raíces.

Resolución:

Sean:

$$\underbrace{a-3r}_{x_1}, \underbrace{a-r}_{x_2}, \underbrace{a+r}_{x_3}, \underbrace{a+3r}_{x_4}$$

Σ raíces = 2 (por Cardano), de donde: $a = 1/2$

También por Cardano se cumple:

$$x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_4 x_3 + x_1 x_2 x_4 = -22$$

Agrupando convenientemente y reemplazando

$$x_2 x_3 (x_1 + x_4) + x_1 x_4 (x_3 + x_2) = -22$$

$$(a^2 - r^2)2a + (a^2 - 9r^2)2a = -22$$

$$2a^3 - 10ar^2 = -11, \text{ de donde: } r = \pm 3/2$$

Reemplazando:

$$x_1 = -4; x_2 = -1; x_3 = 2; x_4 = 5 \quad \therefore x_1 + x_2 = -5$$

46. Si: $\sqrt{14+6\sqrt{5}}$ es una raíz de:

$p(x) = x^3 + ax^2 + cx + a - 6$; $a, c \in \mathbb{Z}$, hallar el valor de: $c - 2a$

Resolución:

$$\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \sqrt{14+2\sqrt{9(5)}}$$

$$= \sqrt{(9+5) + 2\sqrt{9(5)}} = \sqrt{9} + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$$

$\Rightarrow x_1 = 3 + \sqrt{5}$ (pero en un polinomio de coeficientes reales si $x_1 = 3 + \sqrt{5}$, entonces tiene otra raíz que es la conjugada de $x_1 \Rightarrow x_2 = (3 - \sqrt{5})$)

$$\text{Sea } x_3 \text{ la tercera raíz: } x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-a}{1}$$

$$(3 + \sqrt{5}) + (3 - \sqrt{5}) + x_3 = -a \Rightarrow x_3 = -a - 6$$

$$\text{También: } x_1 x_2 x_3 = \frac{-(a-6)}{1}$$

$$(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})(-a - 6) = -a + 6$$

$$4(-a - 6) = -a + 6 \Rightarrow -4a - 24 = -a + 6$$

$$\Rightarrow -30 = 3a \Rightarrow a = -10$$

Además: $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = c$

$$(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) + x_3(x_1 + x_2) = c$$

$$4 + 4(6) = c \Rightarrow c = 28$$

$$\text{Nos piden: } c - 2a = 28 - 2(-10) = 48$$

47. Si 4 y m son soluciones de la ecuación:

$$x^4 - 20x^2 + 30n + 4 = 0 \quad (m > 0), \text{ hallar el valor de } m + n$$

Resolución:

$$\text{De: } x^4 - 20x^2 + 30n + 4 = 0$$

Si 4 y m son soluciones:

$$\text{Con } x = 4 \Rightarrow (4)^4 - 20(4)^2 + 30n + 4 = 0 \Rightarrow n = 2$$

Con: $x = m$

$$m^4 - 20m^2 + 30(2) + 4 = 0$$

$$m^4 - 20m^2 + 64 = 0$$

$$m^2 \begin{matrix} \nearrow & \searrow \\ -16 & -4 \end{matrix}$$

$$(m^2 - 16)(m^2 - 4) = 0$$

$$(m + 4)(m - 4)(m + 2)(m - 2) = 0$$

$$\text{CS} = \{-4; -2; 2; 4\}$$

Con $m > 0 \Rightarrow m = 2$ (pues la otra raíz es 4)

$$\therefore \text{Nos piden: } m + n = 2 + 2 = 4$$

48. Si las raíces de la ecuación:

$$(p-5)x^4 - (3p-23)x^2 + 9 = 0, \quad p \neq 5$$

están en progresión aritmética, hallar el mayor valor de p .

Resolución:

Sean las raíces de la ecuación:

$$a - 3r; a - r; a + r; a + 3r, \text{ por estar en PA}$$

$$\Sigma \text{ raíces} = 0 \Rightarrow a = 0$$

Formemos la ecuación en función de sus raíces

$$x^4 - 10r^2 x^2 + 9r^4 = 0, \text{ identificando coeficientes se tiene:}$$

$$\frac{3p-23}{p-5} = 10r^2 \quad \dots(\alpha)$$

$$\frac{9}{p-5} = 9r^4 \quad \dots(\beta)$$

Dividiendo α^2 por β tenemos: $(3p-23)^2 = 100(p-5)$
Resolviendo se obtiene que el mayor valor de p es 21.

49. Hallar el número de elementos del conjunto solución de: $\sqrt{x^3-4x} + |x^3-x^2-4x+4| = 0$

Resolución:

Recordar:

$$\text{Si } a \geq 0 \Rightarrow \sqrt{a} \geq 0$$

$$\text{Si } a \in \mathbb{R} \Rightarrow |a| \geq 0$$

$$\text{De: } \underbrace{\sqrt{x^3-4x}}_{\geq 0} + \underbrace{|x^3-x^2-4x+4|}_{\geq 0} = 0$$

La única posibilidad que 2 positivos sumen 0

$$\sqrt{x^3-4x} = 0 \quad \wedge \quad |x^3-x^2-4x+4| = 0$$

$$\sqrt{(x)(x+2)(x-2)} = 0 \quad \wedge \quad |(x-1)(x-2)(x+2)| = 0$$

$$CS_1 = \{0; -2; 2\} \quad \wedge \quad CS_2 = \{1; -2; 2\}$$

$$CS = \{-2; 2\}$$

$\therefore$ n.º de elementos: 2

50. Si las siguientes ecuaciones en x :

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + 11x + 6 &= 0 \\ x^3 + bx^2 + 14x + 8 &= 0 \end{aligned} \quad / \quad \{a; b\} \subset \mathbb{Z}$$

tienen 2 raíces comunes que son enteras y negativas, calcular: $(a+b)$

Resolución:

De las ecuaciones:

$$x^3 + ax^2 + 11x + 6 = 0; \text{ posibles raíces enteras negativas: } -1; -2; -3; -6$$

$$x^3 + bx^2 + 14x + 8 = 0; \text{ posibles raíces enteras negativas: } -1, -2, -4, -8$$

Entonces las raíces comunes son: $-1, -2$

Reemplazando en las ecuaciones tenemos:

$$a = 6; b = 7 \Rightarrow a + b = 13$$

51. Si dos raíces de la ecuación en x :

$$x^4 - (p+2)x^2 + 4 = 0$$

se obtienen de la ecuación:

$$x^2 + px + q = 0 \quad / \quad p, q \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad p \neq 0$$

Calcular: pq

Resolución:

Sean $\alpha; \beta$ raíces de:

$$x^2 + px + q = 0 \quad \begin{cases} \alpha + \beta = -p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$$

Entonces $\alpha; \beta; -\alpha; -\beta$; serán raíces de:

$$x^4 - (p+2)x^2 + 4 = 0; \text{ formemos la ecuación pero en función de sus raíces para identificar coeficientes } x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x^2 + (\alpha\beta)^2 = 0$$

Identificando coeficientes:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= p+2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = p+2 \\ (\alpha\beta)^2 &= 4 \Rightarrow q^2 = 4 \text{ solo cumple para } q = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Resolviendo si } q = 2; p = 3 \quad \vee \quad p = -2$$

$$\Rightarrow pq = 6 \quad \vee \quad pq = -4$$

52. Si $\sqrt{3}$ es una raíz del polinomio:

$p(x) = x^3 + nx^2 + mx - 2m$; ($n, m \in \mathbb{Q}$), hallar la suma de los cuadrados de todas sus raíces.

Resolución:

$$p(x) = x^3 + nx^2 + mx - 2m$$

Como $p(x)$ tiene coeficiente racionales

$$\text{Si } x_1 = \sqrt{3} \Rightarrow x_2 = -\sqrt{3} \text{ (conjugado)}$$

$$x_3 = ? \text{ (racional)}$$

$$\Sigma \text{ raíces} = -\frac{n}{1} = -n - \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) + x_3$$

$$x_3 = -n$$

$$\Sigma \text{ productos binarios} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m/1$$

$$m = -3$$

$$\text{Producto de raíces} = x_1x_2x_3 = \frac{-(-2m)}{1}$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow n = -2$$

Nos piden:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 + (2)^2 = 10$$

53. Al resolver la ecuación en $\mathbb{R}$:

$$\sqrt[17]{x^2 - 2x - 15} + \sqrt[17]{x^2 - 4x - 5} = \sqrt[17]{2x^2 - 6x - 20}$$

Cuál(es) de las proposiciones no es (son) verdadera(s):

I. Su conjunto solución es $\{-3; 5; -1\}$

II. Es una ecuación incompatible.

III. Su conjunto solución posee 6 elementos

Resolución:

Para resolver esta ecuación emplearemos el siguiente teorema:

$$\text{Si: } \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{A+B}, n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad \vee \quad B = 0 \quad \vee \quad A + B = 0$$

En el problema:

$$(x-5)(x+3) = 0 \quad \vee \quad (x-5)(x+1) = 0$$

$$\vee (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow CS = \{5; -3; -1; -2\}$$

$\therefore$ Todas son falsas

54. Si la siguiente ecuación recíproca:

$$ax^4 - 35x^3 + 62x^2 + bx + 6 = 0, a \neq 0, \text{ admite 2}$$

raíces de la forma: $(m-3), \frac{1}{(m-3)}$, determinar el mayor valor de m .

Resolución:

Si la ecuación es recíproca:

$$\underbrace{ax^4 - 35x^3 + 62x^2 + bx + 6 = 0}$$

$$6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0$$

Factorizando por aspa doble especial:

$$(3x-1)(x-3)(2x-1)(x-2) = 0, \text{ de donde las raíces son: } 1/3; 3; 1/2; 2$$

$$m-3 = 3 \quad \therefore m = 6 \text{ mayor valor}$$

segundos más tarde se encontraron por segunda vez. Sabiendo que B partió 6 segundos antes que A, hallar la velocidad de A en m/s.

Resolución:

Como el primer encuentro ocurre 17 segundos después que partió A, luego vuelven a encontrarse a los 20 segundos después (3 segundos más), se deduce que el espacio recorrido por B en 6 segundos; entonces:

$$v_A = v_B$$

$$\Rightarrow v_A \times v_B = \frac{240 \text{ m}}{20 \text{ s}} = 12 \text{ m/s} \quad \therefore v_B = 6 \text{ m/s}$$

62. La ecuación $x^4 - 12x - 5 = 0$, posee 2 raíces cuya suma es 2. Determine la suma de las inversas de las otras 2 raíces.

Resolución:

Sean a; b; c; d las raíces de: $x^4 - 12x - 5 = 0$

Por dato: $a + b = 2$

$$\text{Nos piden: } \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{c+d}{cd} = ?$$

Por Cardano y Viète:

$$a + b + c + d = 0 \Rightarrow c + d = -2$$

$$\Rightarrow ab + ac + ad + bc + bd + cd = 0$$

$$ab - 2(a + b) + cd = 0$$

$$\text{De aquí: } ab + cd = 4 \quad \dots(1)$$

$$abc + abd + acd + bcd = 12$$

$$ab(-2) + cd(2) = 12$$

$$\text{De aquí: } -ab + cd = 6 \quad \dots(2)$$

$$(1) + (2): cd = 5$$

$$\therefore \text{En lo pedido: } \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{-2}{5} = -0,4$$

63. Si el polinomio: $P(x) = ax^3 + bx^2 - 6x + c$; $a \neq 0$

$$\text{admite como raíces: } x_1 = \frac{p^{10} + 1}{p + 1}; x_2 = \frac{p^{10} + 1}{p^{10} - p}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}; \text{ donde } p \notin \{-1; 1; 0\}. \text{ Halle: } c$$

Resolución:

$$P(x) = ax^3 + bx^2 - 6x + c$$

$$\text{Dato: } x_1 = \frac{p^{10} + 1}{p + 1}; x_2 = \frac{p^{10} + 1}{p^{10} - p}; x_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Observamos que: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 3$$

Por propiedad, la ecuación de raíces es:

$$cx^3 - 6x^2 + bx + a = 0$$

$$\text{Por Cardano: } \left\{ \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3} \right\} = \frac{6}{c} \quad \therefore c = 2$$

64. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{x+10} + 4\sqrt{3x-6} + \sqrt{x+25+6\sqrt{3x-6}} = 11\sqrt{3}$$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } \sqrt{3x-6} = y \Rightarrow 3x-6 = y^2; y > 0$$

$$x = \frac{y^2 + 6}{3} \quad \dots(1)$$

Reemplazando:

$$\sqrt{\frac{y^2 + 6}{3} + 10} + 4y + \sqrt{\frac{y^2 + 6}{3} + 25 + 6y} = 11\sqrt{3}$$

$$\sqrt{\frac{y^2 + 12y + 36}{3}} + \sqrt{\frac{y^2 + 18y + 81}{3}} = 11\sqrt{3}$$

$$\sqrt{(y+6)^2} + \sqrt{(y+9)^2} = 33$$

$$|y+6| + |y+9| = 33$$

$$\text{Como: } y > 0, y+6+y+9=33 \Rightarrow y=9$$

$$\text{En (1): } x = \frac{y^2 + 6}{3} = \frac{9^2 + 6}{3} \Rightarrow x = 29$$

65. Si x_0 es la solución de la ecuación:

$$\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2x+18}, \text{ halle el valor de:}$$

$$|2x_0 - x_0^2/9|$$

Resolución:

De la ecuación:

$$(\sqrt{x+7} + \sqrt{x-5})^2 = (\sqrt{2x+18})^2$$

$$(x+7) + 2\sqrt{(x+7)(x-5)} + (x-5) = 2x+18$$

$$\sqrt{x^2+2x-35} = 8 \Rightarrow x^2+2x-35 = 64$$

$$x^2+2x-99 = 0$$

$$x \begin{matrix} \searrow 11 \\ \nearrow -9 \end{matrix} \Rightarrow x_0 = -11$$

$$x \begin{matrix} \searrow -9 \\ \nearrow 11 \end{matrix} \Rightarrow x_0 = 9$$

$$\therefore \text{Nos piden: } \left| 2x_0 - \frac{x_0^2}{9} \right| = \left| 2(9) - \frac{9^2}{9} \right| = 9$$

66. Resolver la ecuación: $\frac{x}{x+5} + \frac{5}{2\sqrt{x+5}} = \frac{6}{5}$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } \sqrt{x+5} = y$$

$$x+5 = y^2$$

$$x = y^2 - 5 \quad \dots(1)$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$\frac{y^2-5}{y^2} + \frac{5}{2y} = \frac{6}{5}$$

Eliminando denominadores:

$$10y^2 - 50 + 25y = 12y^2 \Rightarrow 2y^2 - 25y + 50 = 0$$

$$(2y-5)(y-10) = 0$$

$$y = 5/2; y = 10$$

$$\text{Para } y = 5/2 \text{ en (1): } x = 25/4 - 5 = 5/4$$

$$\text{Para } y = 10 \text{ en (1): } x = 100 - 5 = 95$$

$$\therefore \text{CS} = \left\{ \frac{5}{4}; 95 \right\}$$

67. Hallar el valor de m, para que la ecuación

$$\frac{2mx-3}{x-1} + \frac{3mx-2}{x+1} = 2m+3 \text{ se reduzca a una}$$

ecuación de primer grado en x.

Resolución:

Se pide m, luego:

$$5mx^2 - mx - 5x - 1 = (2m+3)(x^2 - 1)$$

$$5mx^2 - (m+5)x - 1 = (2m+3)x^2 - 2m - 3$$

$$(3m - 3)x^2 - (m + 5)x = -2m - 2$$

Por dato la ecuación es de primer grado:

$$3m - 3 = 0 \quad \therefore m = 1$$

68. Halle la suma de los cuadrados de las inversas de las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, donde $b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$

Resolución:

De la ecuación: $x^2 + bx + c = 0$

De raíces: x_1, x_2

Por Cardano: $x_1 + x_2 = -b \Rightarrow x_1 x_2 = c$

Nos piden:

$$E = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2}$$

Reemplazando:

$$E = \frac{(-b)^2 - 2c}{c^2} = \frac{b^2 - 2c}{c^2} = \frac{b^2}{c^2} - \frac{2}{c} \quad \therefore E = \frac{b^2}{c^2} - \frac{2}{c}$$

69. Resolver la ecuación: $\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} + \frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$

Resolución:

Haciendo un cambio de variables:

$$\frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} = y; \quad \frac{6-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{y}$$

En la ecuación original:

$$y + \frac{1}{y} = \frac{5}{2} \Rightarrow 2y^2 + 2 = 5y$$

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

$$2y \begin{matrix} \nearrow -1 \\ \searrow -2 \end{matrix} \Rightarrow y = 2; y = 1/2$$

$$\text{Para: } y = \frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{Para: } y = \frac{2\sqrt{x}}{6-\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\sqrt{x} = 6 - \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 36/25 \quad \therefore \text{CS} = \left\{9; \frac{36}{25}\right\}$$

70. Hallar la suma de los cuadrados de las soluciones reales de: $\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2 + 1} = x + 1$

Resolución:

$$\sqrt{2x} + \sqrt{6x^2 + 1} = x + 1$$

Restricción:

$$i. \quad \underbrace{6x^2 + 1}_{(+)} \geq 0$$

(+) ≥ 0 (no hay restricción para x)

$$ii. \quad 2x + \sqrt{6x^2 + 1} \geq 0$$

$$\sqrt{6x^2 + 1} \geq -2x \Rightarrow 6x^2 + 1 \geq 4x^2$$

$$\underbrace{2x^2 + 1}_{(+)} \geq 0$$

(+) (no hay restricción para x)

$$iii. \quad x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

$$\text{Operamos: } 2x + \sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 2x + 1$$

$$\sqrt{6x^2 + 1} = x^2 + 1 \Rightarrow 6x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$x^4 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0$$

$$x^2(x + 2)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = -2; x_4 = 2$$

Pero como $x \geq -1$

$$\Rightarrow x \in \{0; 2\} \quad \therefore 0^2 + 2^2 = 4$$

71. Si x_1, x_2 son las soluciones reales de la ecuación recíproca simétrica:

$$ax^4 + (b - 3)x^3 - 10x^2 + (5 - a)x + (b + 6) = 0$$

Hallar: $E = (x_1 + x_2)^{x_1 x_2}$

Resolución:

Si es una ecuación recíproca:

$$a = b + 6 \quad \dots(1)$$

$$b - 3 = 5 - a$$

$$b = 8 - a \quad \dots(2)$$

$$(2) \text{ en } (1): a = 8 - a + 6 \Rightarrow a = 7; b = 1$$

Reemplazando en la ecuación normal:

$$7x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 2x + 7 = 0$$

Aplicando aspa doble especial:

$$7x^4 - 2x^3 - 10x^2 - 2x + 7 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} 7x^2 & \xrightarrow{+12x} & 7 \\ x^2 & \xrightarrow{-2x} & 1 \end{array}$$

$$(7x^2 + 12x + 7)(x^2 - 2x + 1) = 0$$

$$\bullet \quad 7x^2 + 12x + 7 = 0 \Rightarrow \Delta = (+12)^2 - 4(7)(7) < 0$$

$\Rightarrow$ raíces complejas

$$\bullet \quad x^2 - 2x + 1 = 0; (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = +1$$

$$E = (1 + 1)^{(1)(1)} \quad \therefore E = 2$$

72. Se tiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = \frac{a+b}{a-b} \\ \sqrt{x-y} = \frac{a-b}{a+b} \\ xy = ab(a^2 + b^2) \end{cases}$$

hallar el valor de: $\sqrt{2}(x - y)$

Resolución:

Elevando al cuadrado y aplicando proporciones la primera ecuación:

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a^2 + b^2}{2ab} \quad \dots(\alpha)$$

$$\text{Además: } xy = ab(a^2 + b^2) \quad \dots(\beta)$$

Multiplicando $(\alpha) \wedge (\beta)$ miembro a miembro:

$$x^2 = \frac{(a^2 + b^2)^2}{2} \Rightarrow x = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{De } (\beta): y = \sqrt{2}ab$$

$$\text{Luego: } \sqrt{2}(x - y) = \sqrt{2}\left(\frac{a^2 + b^2}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}ab\right) = (a - b)^2$$

$$\therefore (x - y) = (a - b)^2$$

73. Resolver la ecuación:

$$\frac{x + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{x + \sqrt{3}}} + \frac{x - \sqrt{3}}{\sqrt{x} - \sqrt{x - \sqrt{3}}} = \sqrt{x}$$

Resolución:

Racionalizando tiene:

$$\frac{(x + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}})}{x - x - \sqrt{3}} + \frac{(x - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{3}})}{x - x + \sqrt{3}} = \sqrt{x}$$

Efectuando:

$$-(x + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{x + \sqrt{3}}) + (x - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{3}}) = \sqrt{3}x$$

$$-x\sqrt{x} - \sqrt{3}x + (\sqrt{x + \sqrt{3}})^{3/2} + x\sqrt{x} - \sqrt{3}x + (x - \sqrt{3})^{3/2} = \sqrt{3}x$$

Reduciendo:

$$(x + \sqrt{3})^{3/2} + (x - \sqrt{3})^{3/2} = 3\sqrt{3}x$$

Elevando al cuadrado

$$(x + \sqrt{3})^3 + 2(x^2 - 3)^{3/2} + (x - \sqrt{3})^3 = 9(3x)$$

$$x^3 + 3x^2\sqrt{3} + 9x + 3\sqrt{3} + 2(x^2 - 3)^{3/2} + x^3 - 3x^2\sqrt{3} + 9x + 3\sqrt{3} = 27x$$

$$x^3 + 9x + 2(x^2 - 3)^{3/2} + x^3 + 9x = 27x$$

$$\text{Reduciendo: } 2(x^2 - 3)^{3/2} = 9x - 2x^3$$

Elevando al cuadrado:

$$4(x^2 - 3)^3 = (9x - 2x^3)^2$$

$$4x^6 - 36x^4 + 108x^2 - 108 = 81x^2 - 36x^4 + 4x^6$$

$$27x^2 = 108 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\text{Como: } x + \sqrt{3} \geq 0; x \geq -\sqrt{3} \Rightarrow x = 2$$

$$\therefore \text{CS} = \{2\}$$

74. Si $(a + b)$ y $(a - b)$ son soluciones de la ecuación $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$, donde $a^2 > b^2$, hallar el valor de: $3a^2 - 2b^2$

Resolución:

$$\text{En la bicuadrática: } x^4 - 20x^2 + 64 = 0$$

$$\text{Con soluciones: } x_1 = (a + b), x_2 = (a - b)$$

Se cumple:

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 20 \Rightarrow 2(a^2 + b^2) = 20$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = 10 \quad \dots(1)$$

$$(a + b)^2(a - b)^2 = 64$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 = 8 \quad \dots(2)$$

$$\text{De (1) y (2): } a^2 = 9; b^2 = 1$$

$$\text{Piden: } E = 3a^2 - 2b^2$$

$$\Rightarrow E = 3(9) - 2(1) \therefore E = 25$$

75. En la ecuación:

$P(x) = 2ax^2 + (3a - 1)x + (a + b) = 0$, calcular b , para que exista un solo valor de "a" que permita que las raíces de $P(x) = 0$ sean iguales.

Resolución:

Si las raíces de la ecuación son iguales, se deben cumplir: $\Delta = 0$

$$\Delta = (3a - 1)^2 - 4(2a)(a + b) = 0$$

$$9a^2 - 6a + 1 - 8a^2 - 8ab = 0$$

$$a^2 - (6 + 8b)a + 1 = 0$$

Como es una ecuación cuadrática en a debe existir un solo valor "a":

$$\text{Si: } \Delta = (6 + 8b)^2 - 4(1)(1) = 0$$

$$36 + 96b + 64b^2 - 4 = 0 \Rightarrow 64b^2 + 96b + 32 = 0$$

$$2b^2 + 3b + 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} 2b \\ b \end{array} \begin{array}{l} +1 \\ +1 \end{array}$$

$$(b + 1)(2b + 1) = 0 \Rightarrow b = -1; b = 1/2$$

$$\therefore \text{CS} = \{-1; 1/2\}$$

76. Hallar la suma de las soluciones positivas de la ecuación: $x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$

Resolución:

Por aspa doble especial:

$$x^4 + x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{l} x^2 \\ x^2 \end{array} \begin{array}{l} -3x \\ +4x \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ 1 \end{array}$$

$$\text{Tengo: } x^2 + x^2 = 2x^2$$

$$\text{Quiero: } -10x^2$$

$$\text{Me falta: } -12x^2 \Rightarrow (-3x)(4x)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 3x + 1)(x^2 + 4x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2}$$

Luego:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 0 \\ x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} > 0 \end{array} \right\} \text{positivos}$$

$$x_3 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} < 0; x_4 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} < 0$$

$$\therefore \text{Suma soluciones positivos: } x_1 + x_2 = 3$$

77. Resolver la ecuación: $\sqrt{2x - 5} + \sqrt[3]{4x - 4} = 3$, para raíces reales

Resolución:

$$\text{Haciendo: } \sqrt[3]{4x - 4} = y$$

$$4x - 4 = y^3 \Rightarrow x = \frac{y^3 + 4}{4} \quad \dots(1)$$

Reemplazando en la ecuación:

$$\sqrt{2\left(\frac{y^3 + 4}{4}\right) - 5} + y = 3$$

$$\sqrt{\frac{2y^3 + 8 - 20}{4}} + y = 3$$

$$\sqrt{2y^3 - 12} + 2y = 6$$

$$\sqrt{2y^3 - 12} = 6 - 2y$$

$$2y^3 - 12 \geq 0, y \geq \sqrt[3]{6} \quad \vee \quad y \leq -\sqrt[3]{6}$$

$$6 - 2y \geq 0, -2y \geq -6 \quad \vee \quad y \leq 3$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{6} \leq y \leq 3$$

Elevando al cuadrado:

$$2y^3 - 12 = 36 - 24y + 4y^2$$

$$2y^3 - 4y^2 + 24y - 48 = 0 \Rightarrow y^3 - 2y^2 + 12y - 24 = 0$$

$$y^2(y - 2) + 12(y - 2) = 0 \Rightarrow (y - 2)(y^2 + 12) = 0$$

$$y^2 + 12 = 0 \text{ raíces complejas}$$

$$y - 2 = 0; y = 2$$

$$\text{En (1): } x = \frac{y^3 + 4}{4} = \frac{8 + 4}{4} = 3 \therefore \text{CS} = \{3\}$$

78. Si la ecuación en x ,

$$\frac{x-a+3}{x-a+2} + \frac{x-b-1}{x-b-2} = \frac{x-a+2}{x-a+1} + \frac{x-b}{x-b-1}$$

tiene infinitas soluciones, hallar el valor de: $a - b$

Resolución:

Sea: $x - a + 2 = m$; $x - b - 1 = n$

Reemplazando:

$$\frac{m+1}{m} + \frac{n}{n-1} = \frac{m}{m-1} + \frac{n+1}{n}$$

$$\frac{m+1}{m} - \frac{m}{m-1} = \frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1}$$

$$\frac{m^2-1-m^2}{m(m-1)} = \frac{n^2-1-n^2}{n(n-1)}$$

$$m(m-1) = n(n-1) \Rightarrow m^2 - m = n^2 - n$$

$$m^2 - n^2 = m - n$$

Como la ecuación tiene infinitas soluciones:

$$m^2 - n^2 = 0 \quad \wedge \quad m - n = 0$$

$$m = \pm n \quad \wedge \quad m = n$$

Luego: $m = n$

$$\text{Pero: } x - a + 2 = x - b - 1 \quad \therefore a - b = 3$$

79. Resolver la ecuación: $a(x+b) = x + \sqrt[3]{xb^2} - \sqrt[3]{x^2b}$

Resolución:

Efectuando:

$$ax + ba = x + \sqrt[3]{xb^2} - \sqrt[3]{x^2b}$$

$$ax + ab - x = \sqrt[3]{xb^2} - \sqrt[3]{x^2b}$$

$$\text{Hacemos: } x = \frac{b}{k^3} \quad \dots(1)$$

$$\frac{b}{k^3}(a-1) + ab = \sqrt[3]{\frac{b}{k^3}b^2} - \sqrt[3]{\frac{b^2}{k^6}b}$$

$$\frac{b}{k^3}(a-1) + ab = \frac{b}{k} - \frac{b}{k^2}$$

$$b(a-1) + k^3 ab = k^2 b - bk$$

Simplificando:

$$a - 1 + k^3 a = k^2 - k$$

$$a(k^3 + 1) = (k^2 - k + 1)$$

$$a(k+1)(k^2 - k + 1) = (k^2 - k + 1)$$

$$a(k+1) = 1 \Rightarrow k = \frac{1-a}{a}$$

$$\text{En (1): } x = \frac{b}{\left(\frac{1-a}{a}\right)^3} \quad \therefore x = \frac{ba^3}{(1-a)^3}$$

80. Si: x_1, x_2, x_3 son raíces de la ecuación:

$$2x^3 + (m^2 - 4)x - 1 = 0$$

Además:

$$x_1^3 + x_1^2 + x_1 + x_2^3 + x_2^2 + x_2 + x_3^3 + x_3^2 + x_3 = 1$$

Halle m .

Resolución:

$$2x^3 + (m^2 - 4)x - 1 = 0$$

Por el teorema de Cardano:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = m^2 - 4;$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = \frac{3}{2}$$

Por dato:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$2(m^2 - 4) = \frac{1}{2} \Rightarrow m^2 - 4 = \frac{1}{4} \Rightarrow m^2 = \frac{17}{4}$$

$$\therefore m = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Si las ecuaciones $2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5$ y $ax^2 + bx + 8 = 0$ tienen las mismas raíces, hallar: $a + b$

- A) -34 B) -32 C) -30
D) -26 E) 24

Resolución:

$$2x + \frac{2}{\sqrt{x}} = 5 \Rightarrow 2(\sqrt{x})^2 - 5(\sqrt{x}) + 2 = 0$$

$$2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \quad \vee \quad x = 4$$

$$\text{Luego: } \left(x - \frac{1}{4}\right)(x - 4) = 0 \Rightarrow 4x^2 - 17x + 4 = 0$$

$$\text{o bien: } 8x^2 - 34x + 8 = 0$$

$$\text{Comparando: } a = 8; b = -34$$

$$\therefore a + b = -26$$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

Señale el menor valor para x que de solución al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = -25 \frac{x}{|x|} \\ |2x - 3| + y = 10 \end{cases}$$

- A) -4 B) -3 C) -2 D) -1 E) 0

Resolución:

$$4x^2 + y^2 = -25 \frac{x}{|x|}$$

$$\text{Caso I: } x > 0 \quad 4x^2 + y^2 = -25$$

(no tiene solución en $\mathbb{R}$)

$$\text{Caso II: } x < 0 \quad 2x - 3 < -3$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 25 \\ -2x + 3 + y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 25 \\ y = 2x + 7 \end{cases} \dots(\alpha)$$

$$\beta \text{ en } \alpha: 4x^2 + (2x + 7)^2 = 25$$

Resolviendo: $x_1 = -2$; $x_2 = -\frac{3}{2}$

∴ Menor valor: -2

Clave: C

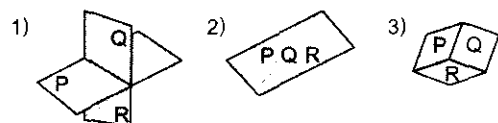
PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

En los siguientes sistemas cada ecuación representa un plano:

I. $x - 3y + z = 1$
 $-2x + 6y - 2z = -2$
 $-x + 3y - z = -1$

II. $x - 3y + 4z = 2$
 $-4x + y + z = 3$
 $-3x - 2y + 5z = 5$

Denotando por P, Q y R los correspondientes planos, la interpretación geométrica de la solución de los sistemas I y II es dada respectivamente por:



- A) 2 y 1
 B) 2 interpreta ambos sistemas
 C) 1 y 3
 D) 2 y 3
 E) 3 interpreta ambos sistemas

Resolución:

De: (I) $x - 3y + z = 1$
 $-2x + 6y - 2z = -2 \Rightarrow \Delta_s = 0$
 $-x + 3y - z = -1$

El sistema presenta tres ecuaciones equivalentes de donde se interpreta que su gráfica está representada por un mismo plano (2)

De: (II): $x - 3y + 4z = 2$
 $-4x + y + z = 3 \Rightarrow \Delta_s = 0$
 $-3x - 2y + 5z = 5$

El sistema presenta infinitas soluciones para diferentes planos representado por (1).

Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

El conjunto solución de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas x , y y z es:

$$\left\{ (x; y; z) / \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3} \right\}$$

Si el punto $(3; -2; 5)$ pertenece al plano cuya ecuación lineal es una de las ecuaciones del sistema, y tiene la forma $ax + by + cz = 15$.

Determine dicha ecuación.

- A) $23x + y - 11z = 15$ B) $-23x - y + 22z = 11$
 C) $-23x + 13y + 22z = 15$ D) $23x - 22y - z = -11$
 E) $-23x + 22y + 11z = 10$

Resolución:

$$CS = \left\{ (x; y; z) / \frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{3} \right\} = \{4t + 2; 2t + 3; 3t + 1\}$$

En la ecuación lineal: $ax + by + cz = 15$ (plano)

Se tiene: $P_0 = (3; -2; 5)$ pertenece al plano.

También:

Si: $t = 0 \Rightarrow P_1 = (2; 3; 1)$;
 $t = -1 \Rightarrow P_2 = (-2; 1; -2)$

Reemplazando P_0 , P_1 , P_2 en el plano:

$$\begin{cases} 3a - 2b + 5c = 15 \\ 2a + 3b + c = 15 \\ -2a + b - 2c = 15 \end{cases}$$

Se obtiene: $a = -23$; $b = 13$; $c = 22$

$$\therefore -23x + 13y + 22z = 15$$

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

Encuentre el conjunto solución de la ecuación $x^2 - 257x^4 + 256 = 0$

- A) $\{\pm 2; \pm 2i; \pm 4i; \pm 4\}$ B) $\{\pm 4; \pm 4i; \pm 1; \pm i\}$
 C) $\{\pm 4; \pm 2i; \pm 2; \pm 1\}$ D) $\{\pm 1; \pm i; \pm 3; \pm 3i\}$
 E) $\{\pm 3; \pm 3i; \pm 4; \pm 4i\}$

Resolución:

$$x^8 - 257x^4 + 256 = 0$$

Factorizando:

$$(x^4 - 256)(x^4 - 1) = 0$$

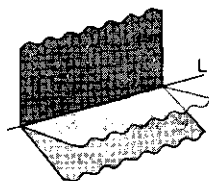
$$(x^2 + 16)(x^2 - 16)(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 0$$

$$\therefore CS = \{\pm 4i; \pm 4; \pm i; \pm 1\}$$

Clave: B

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - II)

La siguiente figura da la idea de tres planos interceptándose según la recta L. ¿cuál(es) de los sistemas de ecuaciones dados representa a la figura dada?



- I. $2x + 3y - z = 1$
 $-x + 5y + 2z = 4$
 $x + 8y + z = 5$
 II. $x - y + 3z = -2$
 $-2x + 2y - 6z = -4$
 $-x + y - 3z = 2$
 III. $2x - y + z = 3$
 $-x + 3y - z = 1$
 $x - 2y + 2z = 2$

- A) Solo I B) I y III C) Solo III
 D) I, II y III E) Solo II

Resolución:

En la figura observamos que la intersección de 3 planos diferentes es una recta, lo cual lo interpretamos como que la solución de 3 ecuaciones con 3 incógnitas tiene infinitas soluciones. Por lo tanto:

- I. Tiene infinitas soluciones y los planos son diferentes (V)
- II. Tiene infinitas soluciones pero dos ecuaciones se grafican como un mismo plano (F)
- III. Tiene solución única (F)

∴ Solo I

Clave: A

PROBLEMA 7 (UNI 2014 - I)

Al resolver el sistema:

$$x\sqrt{\frac{x}{y}} + y\sqrt{\frac{y}{x}} = 34 \quad \dots(1)$$

$$x - y = 12 \quad \dots(2)$$

Se puede obtener soluciones enteras para x y para y ; luego y es igual a:

- A) 16 B) 8 C) 4 D) 2 E) 1

Resolución:

$$\text{De (1): } x^2 + y^2 = 34\sqrt{xy} \quad \dots(3)$$

$$\text{De (2): } (x - y)^2 = 12^2 \\ x^2 + y^2 - 2xy = 144 \quad \dots(4)$$

Reemplazando (3) en (4):

$$34\sqrt{xy} - 2xy = 144 \Rightarrow \sqrt{xy}^2 - 17\sqrt{xy} + 72 = 0$$

$$(\sqrt{xy} - 9)(\sqrt{xy} - 8) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{xy} = 9 \quad \wedge \quad \sqrt{xy} = 8 \\ xy = 81 \quad \wedge \quad xy = 64$$

Se tiene: $\begin{cases} x - y = 12 \\ xy = 81 \end{cases} \Rightarrow$ no hay soluciones enteras

$$\begin{cases} x - y = 12 \\ xy = 64 \end{cases} \Rightarrow x = 16 \quad \wedge \quad y = 4$$

∴ $y = 4$

Clave: C

PROBLEMA 8 (UNI 2014 - II)

Halle los valores de x e y , respectivamente, tales que:

$$\alpha x + \beta y = -1$$

$$(\beta - 1)x + (\alpha + 1)y = 3$$

Además se cumple que:

$$\alpha + 3\beta + 1 = 3\alpha + \beta - 1 = \alpha^2 + \alpha - \beta^2 + \beta \neq 0$$

$$\text{A) } 0 \text{ y } 1 \quad \text{B) } 1 \text{ y } 0 \quad \text{C) } 1 \text{ y } -1$$

$$\text{D) } -1 \text{ y } 1 \quad \text{E) } 1 \text{ y } 1$$

Resolución:

Por Cramer:

$$D_s = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \beta - 1 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = \alpha^2 + \alpha - \beta^2 - \beta$$

$$D_x = \begin{vmatrix} -1 & \beta \\ 3 & \alpha + 1 \end{vmatrix} = -\alpha - 1 - 3\beta$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ \beta - 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha + \beta - 1$$

Por dato:

$$K = \alpha + 3\beta + 1 = 3\alpha + \beta - 1 = \alpha^2 + \alpha - \beta^2 + \beta$$

$$\Rightarrow x = \frac{D_x}{D_s} = \frac{-K}{K} = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{D_y}{D_s} = \frac{3\alpha + \beta - 1}{K} = \frac{K}{K} = 1$$

$$\therefore x = -1; y = 1$$

Clave: D

PROBLEMA 9 (UNI 2014 - II)

Considere $a > b > 0$, determine el cociente entre la menor y mayor de las raíces de la ecuación en x .

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b}$$

- A) a/b B) b/a C) ab
D) $a + b$ E) 1

Resolución:

Efectuando:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{x+a+b} \Rightarrow \frac{1}{x} - \frac{1}{x+a+b} = -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

$$\frac{x+a+b-x}{x(x+a+b)} = -\left(\frac{a+b}{ab}\right) \Rightarrow \frac{a+b}{x(x+a+b)} = -\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

$$ab = -x(x+a+b) \Rightarrow x^2 + (a+b)x + ab = 0$$

$$(x+a)(x+b) = 0 \Rightarrow x = -a \quad \wedge \quad x = -b$$

Por dato:

$$a > b > 0; \quad -a < -b < 0$$

Entonces:

$$\min(x) = -a; \quad \max(x) = -b \quad \therefore \frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

Clave: A

PROBLEMA 10 (UNI 2015 - I)

Determine el conjunto solución del sistema de ecuaciones no lineales:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \quad \dots(1)$$

$$x^2 - 2x - y + 1 = 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{A) } \{(3,1), (1,1), (-1,-1)\} \quad \text{B) } \{(2,-2), (2,1), (1,1)\}$$

$$\text{C) } \{(-1,0), (1,1), (1,2)\} \quad \text{D) } \{(1,0), (0,1), (2,1)\}$$

$$\text{E) } \{(1,-1), (1,0), (2,-1)\}$$

Resolución:

$$\text{De (2): } (x-1)^2 = y$$

En (1):

$$(x-1)^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow y + y^2 - 2y = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - y = 0$$

$$y = 0 \quad \vee \quad y = 1$$

$$(x-1)^2 = 0 \quad (x-1)^2 = 1$$

$$x = 1 \quad x - 1 = 1 \quad \vee \quad x - 1 = -1 \\ x = 2 \quad \vee \quad x = 0$$

$$\therefore \text{CS} = \{(1,0); (2,1); (0,1)\}$$

Clave: D



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Determinar la solución de la ecuación:

$$\frac{x+a}{a-b} + \frac{x-a}{a+b} = \frac{x+b}{a+b} + \frac{2(x-b)}{(a-b)}$$

- A) 2a B) 2b C) 3a D) 3b E) 4a

2. Calcular el denominador de la raíz en:

$$\frac{x}{ab} + \frac{x}{bc} + \frac{x}{ca} - 1 = abc - x(a+b+c)$$

- A) a B) b C) abc
D) c E) a + b + c

3. Hallar el producto de las raíces de la ecuación:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-2} = 5$$

- A) 0 B) 24 C) -36
D) No tiene raíces E) x = 6 es su única raíz

4. Resolver:

$$\frac{1}{2}\left(x - \frac{7}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{7}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(x - \frac{7}{5}\right) = 0$$

- A) 4,5 B) 2,24 C) 1,65
D) 2,75 E) 3,45

5. Resolver:

$$\frac{ax}{a+b} - \frac{b}{a-b} - 3 = -1 + \frac{b}{a+b} - \frac{ax}{a-b}$$

- A) a B) b C) a + b
D) $\frac{a^2+ab-b^2}{a^2}$ E) a/b

6. Hallar la solución de la ecuación:

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(x-1\right)-1\right]-1\right]-1\right]-1 = 0,$$

- A) 63 B) 243 C) 369
D) 338 E) 633

7. Dado el sistema de ecuaciones:

$$5x - 2y = m$$

$$x + 9y = m$$

hallar el valor de m para que x exceda en 7 a y.

- A) 40 B) 47 C) 53
D) 55 E) 63

8. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{36}$$

$$xy + yz + zx = 2$$

hallar el valor el producto xyz.

- A) 9 B) 18 C) 36
D) 72 E) 144

9. Si en el sistema de ecuaciones:

$$ax + y + z = 1$$

$$x + ay + z = a$$

$$x + y + az = a^2$$

$a \neq 1$; $a \neq -2$, hallar el valor de y.

- A) $-\frac{a+1}{a+2}$ B) $\frac{a+1}{a+2}$ C) $\frac{a-1}{a+2}$
D) $\frac{1}{a+2}$ E) $\frac{a^2+1}{a+2}$

10. En el sistema de ecuaciones:

$$nx - 6y = 5n - 3$$

$$2x + (n - 7)y = 29 - 7n$$

determinar el valor de n para que el sistema sea imposible.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

11. Luego de resolver el sistema:

$$x + y = y + z + 4 = z + x - 8 = 6$$

determinar $(x - y + z)$.

- A) 15 B) 16 C) 17
D) 20 E) 25

12. Determinar los valores de "a" de manera que el sistema tenga solución:

$$x + ay = 1$$

$$ax + y = a^2$$

- A) $a \in \mathbb{R}$ B) $a \in \mathbb{R} - \{-1\}$
C) $a \in \mathbb{R} - \{1\}$ D) $a \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
E) $a \in \mathbb{R}^+$

13. Determinar los valores de "a" para que el sistema lineal tenga soluciones positivas.

$$x + ay = 1$$

$$x - y = 2$$

- A) $\mathbb{R}$ B) $(-\infty; 0)$ C) $(-\infty; -1)$
D) $(-\infty; 1)$ E) $(-\infty; 1/2)$

14. Al resolver el sistema lineal:

$$\begin{cases} (m^2 - 1)x + (m + 1)^2 y = m - 1 \\ (m + 1)x + (m - 1)y = m + 1 \end{cases}$$

$$(m + 1)x + (m - 1)y = m + 1$$

De los siguientes enunciados:

I. $\Delta s + \Delta x + \Delta y = -2m(3m + 5)$

II. Si $m = 0$ el sistema es incompatible.

III. Si $m = -1$ el sistema es indeterminado.

Indicar cuál(es) es (son) correcta(s).

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y III E) II y III

15. Dado el sistema lineal:

$$ax - y = 2 - a$$

$$2x - (a + 1)y = 2, a \in \mathbb{R}$$

y dados los siguientes enunciados:

I. Si $a = 1$ el sistema es indeterminado.

II. Si $a = -2$ el sistema es incompatible.

III. Si $a \neq 0$ el sistema es compatible.

Señalar cuál(es) es (son) correcta(s)

- A) Solo I B) I y II C) Solo II
D) I y III E) I, II y III

16. El siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$(m+1)x - 3y = 2m$$

$$4x - my = m + 3$$

es indeterminado para $m = k_1$, e incompatible para $m = k_2$. Determinar el valor de: $J = 2k_1 + 3k_2$

- A) -6 B) -8 C) -10
D) 4 E) 2

17. Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$$\frac{4x^2 - 3x + 5}{x^2 - 2x + 13} = 2$$

- A) $\left\{-\frac{3}{4}; 2\right\}$ B) $\left\{-\frac{5}{2}; 3\right\}$ C) $\{-1/2; 3\}$
D) $\{-5/2; 4\}$ E) $\{-7/2; 3\}$

18. Al resolver: $\frac{1}{x+a+b+2c} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}$

indicar una de las raíces.

- A) $2a - c$ B) $2c - a^2$ C) $a + c$
D) $-b - c$ E) $a - b + c$

19. En el sistema:

$$(k+1)x - y = k$$

$$x + ky = k + 1$$

determinar qué valor debe tomar k para que el sistema tenga solución única

- A) $k = 2$ B) $k = 5$ C) $k \in \mathbb{R}$
D) $x \in \mathbb{R} - \{2; 5\}$ E) $k = 0$

20. Hallar $(m+n)$, si el sistema:

$$3x + 5y = 1$$

$$(m-1)x + (n-2)y = 4$$

tiene infinitas soluciones.

- A) 35 B) 30 C) 25
D) 20 E) 15

21. Dado el sistema:

$$(n-4)x + ny = 1$$

$$nx + (n+4)y = 1$$

si x_0, y_0 es solución, hallar: $\frac{1}{x_0 \cdot y_0}$

- A) -16 B) -8 C) 8
D) 16 E) 18

22. Resolver el sistema:

$$x + y = 16$$

$$x + z = 22$$

$$y + z = 28$$

calcular $E = z - x - y$

- A) 3 B) 1 C) 5
D) 7 E) 9

23. Si el sistema:

$$(n-5)x + 21y = 105$$

$$2x + 3y = m - 1$$

es incompatible, señalar lo correcto.

- A) $m = 16; n = 19$ B) $m \neq 16; n \neq 19$
C) $m = 16; n \neq 19$ D) $m \neq 16; n = 19$
E) Ninguno

24. Hallar x en el sistema:

$$y + 3x = a$$

$$x - 3z = -2a$$

$$3y + z = -a$$

- A) $3a/2$ B) $2a/3$ C) $a/3$
D) $a/2$ E) $7a/13$

25. Hallar "y" en el sistema:

$$(a+b)x + (a-b) = 2ab$$

$$(a+c)x + (a-c)y = 2ac$$

- A) $2a/3$ B) $a + 3$ C) $-a$
D) a E) $1/a$

26. Un grupo de personas decide aportar cantidades iguales a un candidato presidencial para su campaña electoral. Si hubieran 10 personas más, cada uno pagaría \$2 menos. Sin embargo, si el número fuera 5 menos, cada uno pagaría \$2 más. ¿Cuál fue el aporte del grupo de personas al candidato presidencial?

- A) \$100 B) \$110 C) \$120
D) \$130 E) \$140

27. Se tiene que 3 lb de té y 8 lb de café cuestan en conjunto \$39.70. Si 5 lb de té y 6 lb de café cuestan también en conjunto \$47.10. ¿Cuál es la diferencia de los precios por libra de té y de café?

- A) \$3.7 B) \$6.3 C) \$2.6
D) \$8.9 E) \$2.4

28. Una persona coloca sus ahorros en dos inversiones. La tasa de interés para la inversión A es 10% y para la inversión B es 12%. El ingreso anual de las dos inversiones es \$3760. Si la inversión A fuera al 12% y la B al 10%, su ingreso anual sería de \$3720. ¿Cuál es el total de sus ahorros?

- A) \$36 000 B) \$34 000 C) \$38 000
D) \$32 000 E) \$40 000

29. Un químico tiene una solución de ácido al 50%. Al añadir agua, la solución se diluye a una de 40% de ácido. Al añadir 500 cm³ más de agua, la solución contiene únicamente 35% de ácido. Determinar el número de centímetros cúbicos de solución al 35% que obtuvo al final.

- A) 3800 cm^3 B) 3600 cm^3 C) 4200 cm^3
D) 4000 cm^3 E) 3900 cm^3

30. Hallar Z: $\frac{x}{y+z} = \frac{y}{z+x} = \frac{z}{x+y} = \frac{1}{x+y+z}$

- A) $2/3$ B) $3/2$ C) $1/4$
D) $1/2$ E) 3

31. Si $z^2 = 113 + f(z)$, hallar la suma de los valores de z que resuelven la ecuación: $2f(z) = z + 5$

- A) $-1/2$ B) $2/3$ C) $1/4$
D) $1/2$ E) $-1/4$

32. Si $x > 0$, las soluciones de la ecuación:

$3\sqrt{x} + 3x^{-1/2} = 10$, se pueden hallar resolviendo la ecuación:

- A) $9x^2 - 8x + 9 = 0$ B) $3x^2 + 3x - 10 = 0$
C) $x^2 + x - 10 = 0$ D) $9x^2 + 3x - \frac{10}{3} = 0$
E) $9x^2 - 82x + 9 = 0$

33. Hallar la suma de las inversas de las raíces de la ecuación $2x^2 - 3x + 4 = 0$.

- A) $-3/4$ B) $4/3$ C) $3/4$
D) $-4/3$ E) 0

34. Si al largo de un rectángulo se le aumenta en 2 m, su área es 36 m^2 . Si su ancho se aumenta en 3 m, su área es 49 m^2 . ¿Cuál es el área original?

- A) 7 m^2 B) 14 m^2 C) 28 m^2
D) 32 m^2 E) 40 m^2

35. Hallar una de las raíces de la ecuación:

$$\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$$

- A) $a + b$ B) $2ab$ C) $a - b$
D) $-2ab$ E) $\frac{1}{a+b}$

36. En la ecuación: $x^2 - 2(n-3)x + 4n = 0$, determinar los valores que puede tomar n para que la ecuación posea raíces iguales. Dar como respuesta la suma de estos valores.

- A) 1 B) 9 C) 10
D) 0 E) 2

37. Si: $a + b \neq 0$, ¿qué valor deberá tener w en la ecuación $(a+b)^2x^2 + 2(a^2 - b^2)x + w = 0$ para que sus 2 raíces sean iguales?

- A) $(a-b)$ B) $(a-b)^2$ C) $a^2 - b^2$
D) $-(a+b)^2$ E) $b^2 - a^2$

38. Dada la ecuación: $m^{-1}x^2 - m^{-2}x = x - m^{-1}$, hallar el cuadrado de la diferencia de sus raíces.

A) $\frac{1}{m^2} - m^2$ B) $m^2 + \frac{1}{m^2} + 2$ C) $m^2 - \frac{1}{m^2}$

D) $m^2 + \frac{1}{m^2} - 2$ E) $m^2 - \frac{1}{m^2} + 2$

39. Hallar el conjunto solución de la ecuación:

$x + 3 = \sqrt{x^2 + 4} - 5$

- A) $\left\{\frac{15}{4}\right\}$ B) $\left\{-\frac{15}{4}; \frac{15}{4}\right\}$ C) $\left\{-\frac{15}{4}\right\}$
D) $\left\{\frac{15}{4}; 17; -17\right\}$ E) $\left\{\frac{15}{4}; 18\right\}$

40. Resolver: $(1-x)^{1/2} - (x^2+1)^{1/2} = 0$. Dar como respuesta la suma de las raíces.

- A) -2 B) -1 C) 1
D) 2 E) 0

41. Si $\{m; n\}$ es el conjunto solución de la ecuación:

$x^2 - 6x + c = 0$; hallar: $\frac{m^2 + n^2 + 2c}{9}$

- A) 3 B) 6 C) -6
D) 4 E) -3

42. Si $\{x_1; x_2\}$ es el conjunto solución de la ecuación: $x^2 - 5x - 3 = 0$, calcular el valor de:

$x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1)$

- A) 24 B) 25 C) 26
D) 27 E) 28

43. Si la suma de las inversas de las raíces de la ecuación: $x^2 - mx + 1 = 0$, es igual a la inversa de la suma de las raíces. Hallar m.

- A) ± 1 B) $\pm 1/2$ C) -1
D) 2 E) -2

44. En la ecuación: $\frac{x^2 + 3x}{5x + 2} = \frac{n-1}{n+1}$, se sabe que las raíces son simétricas. Hallar el valor de n.

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

45. Dada la ecuación: $3x^2 + nx + 4 = 0$. Hallar el valor real de n, si las raíces $x_1 \wedge x_2$ se relacionan de la siguiente manera: $9x_1^2 = x_2^2$

- A) ± 7 B) ± 4 C) ± 16
D) ± 8 E) $7; -8$

46. Determinar m para que las raíces de la ecuación: $mx^2 - 2(m-1)x + m = 0$ sean inversas aditivas.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

47. La diferencia de las raíces de la ecuación:

$2x^2 - (p-1)x + (p+1) = 0$, es 1.

Hallar la menor de las raíces.

- A) 2 B) 3 C) 0
D) -1 E) -4

48. Si n es un entero positivo que cumple la igualdad:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{n+9}$$

determinar las raíces de: $P(x) = 16x^2 + nx - \frac{n^2}{8}$

- A) $\frac{1}{4}$; 2 B) $\frac{1}{4}$; -1 C) $-\frac{1}{2}$; 1
D) $\frac{1}{2}$; -2 E) $\frac{1}{2}$; -1

49. Si: $\frac{x^2 - bx}{ax - c} = \frac{m-1}{m+1}$ tiene raíces numéricamente iguales, pero de signos opuestos, hallar el valor de m .

- A) $\frac{a-b}{a+b}$ B) $\frac{a+b}{a-b}$ C) $\frac{2ab}{a+b}$
D) $\frac{2ab}{a-b}$ E) $a+b+1$

50. Formar la ecuación de 2.º grado, cuyas raíces sean 3 veces las raíces de: $x^2 + 2x + 4 = 0$

- A) $x^2 + 6x + 12 = 0$ B) $x^2 + 6x + 9 = 0$
C) $x^2 + 6x - 36 = 0$ D) $x^2 + 5x + 2 = 0$
E) $x^2 + 6x + 36 = 0$

51. Si las raíces de la ecuación $(\alpha + 2)x^2 - 3x + \beta = 0$, son recíprocas ¿qué se puede afirmar acerca de las raíces de $(\beta - 2)x^2 - 10x + \alpha = 0$?

- A) Son nulas B) Son recíprocas
C) Son simétricas D) Su suma es 4
E) Son iguales

52. Si la ecuación cuadrática:

$(m + n - 4)x^2 + (m - n + 6)x + 2 = 0$, es incompatible, calcular el valor de: $(m^2 + 2n)$

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

53. Dada la ecuación de 2.º grado $x^2 + 7x + 11 = 0$, cuyas raíces son a y b . Hallar la ecuación cuyas raíces son: $\frac{a+b+9}{a+3}$, $\frac{a+b+9}{b+3}$

- A) $x^2 + x + 4 = 0$ B) $x^2 - 2x - 4 = 0$
C) $x^2 + 2x + 4 = 0$ D) $x^2 - x - 4 = 0$
E) $x^2 - 2x = 3$

54. Se tiene la ecuación cuadrática:

$x^2 - (n+1)x - n - 2 = 0$. Hallar n , de modo que la suma de cuadrados de sus raíces sea 10.

- A) 2 B) 5 C) -3 D) -4 E) 1

55. En la ecuación: $2x^2 - (m-1)x + (m+1) = 0$, indicar el valor positivo que debe darse a m para que las raíces difieran en uno.

- A) 11 B) 10 C) 12
D) 9 E) 13

56. Si $kx^2 - 2x + 3kx - 4k + 8 = 0$, $k \neq 0$, es una ecuación cuadrática de raíces: x_1 y x_2 , tales que:

$$x_1 + x_2 = \frac{3}{2}x_1 \cdot x_2. \text{ Hallar el valor de: } x_1 + x_2$$

- A) 1 B) 2 C) 2,4
D) -2,4 E) -2

57. Las dos raíces de la ecuación: $x^2 - bx + c = 0$, son iguales a 3. Determinar la solución de:

$$x^2 - bx + c = 25$$

- A) 8 y -2 B) -2 y 8 C) 3 y 3
D) 5 y 5 E) B y C

58. Sabiendo que las raíces de la ecuación:

$x^2 + bx + 30 = 0$, son positivas y la diferencia entre ellas es 7, hallar el valor de b .

- A) -31 B) -13 C) -17
D) -11 E) 11

59. Para que una de las raíces de la ecuación:

$ax^2 + bx + c = 0$, sea la mitad de la otra, hallar la relación entre los coeficientes.

- A) $2b^2 = 9ac$ B) $2b^2 = 9a$ C) $4b^2 = 9c$
D) $b^2 - 8ac = 0$ E) $9b^2 = 2ac$

60. Hallar los valores de x que satisfacen la ecuación:

$$x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{5}\right)(x+2) = 0$$

- A) 0 y -2 B) 0 y 5 C) -2 y 5
D) -2; 0 y 5 E) 0; 2 y 15

61. Dada la ecuación trinomial: $x^{3n-1} + x^{n+3} + 1 - 3n = 0$ Siendo su grado el menor posible, indicar cuántas raíces imaginarias posee.

- A) 18 B) 12 C) 6
D) 4 E) 2

62. Resolver la ecuación: $x^2 + x - 7 = \frac{60}{x^2 + x}$

Dar como respuesta la suma de sus soluciones enteras.

- A) 1 B) 2 C) -1 D) -2 E) -3

63. Formar una ecuación bicuadrada cuyas raíces se pueden determinar a partir de: $x^2 = 16 \wedge x^2 = 25$

- A) $x^4 + 31x^2 - 400 = 0$ B) $x^4 + 31x^2 - 400 = 0$
C) $x^4 - 41x^2 + 400 = 0$ D) $x^4 - 30x^2 + 29 = 0$
E) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

64. Si la suma de las raíces positivas de la ecuación bicuadrada: $x^4 - (3m-5)x^2 + m^2 = 0$ es 5, calcular el valor de m .

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

65. Formar la ecuación bicuadrada cuya dos de sus raíces son las raíces de la ecuación: $x^2 - 7x + 5 = 0$
- A) $x^4 + 39x^2 - 25 = 0$ B) $x^4 - 25x^2 + 39 = 0$
 C) $x^4 - 39x^2 + 25 = 0$ D) $x^4 - 47x^2 + 24 = 0$
 E) $x^4 + 47x - 24 = 0$
66. Sea: $P(x) = x^4 - 14x^2 + 16\sqrt{2}x - 7$
 Si: $P(r_0) = P(r_1) = P(r_2) = P(r_3) = 0$ y
 $r_0 < r_1 < r_2 < r_3$, hallar $r_0 + r_3$.
- A) 0 B) 8 C) $\sqrt{2}$
 D) -2 E) 17
67. Resolver la siguiente ecuación recíproca:
 $x^6 - 10x^5 + 25x^4 - 25x^2 + 10x - 1 = 0$. Dar como respuesta la suma de los cuadrados de sus raíces.
- A) 64 B) 81 C) 100
 D) 50 E) 144
68. Si x_1 y x_2 son las soluciones reales de la ecuación recíproca:
 $ax^4 + (b - 3)x^3 - 10x^2 + (5 - a)x + b + 6 = 0$
 proporcionar: $(x_1 + x_2)^{x_1 x_2}$
- A) 1 B) 2 C) 4 D) 9 E) 25
69. Dar una raíz imaginaria de $(z + 3)^4 + (z + 5)^4 = 16$
- A) $4 + \sqrt{5}i$ B) $4 - \sqrt{7}i$ C) $i\sqrt{7} + 2$
 D) $i\sqrt{7} - 4$ E) $i\sqrt{5} - 4$
70. Indicar una raíz de la ecuación: $9x^4 + 4 = 0$
- A) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ B) $\frac{\sqrt{3}(1+2i)}{2}$ C) $\sqrt{\frac{3}{2}}i$
 D) $\frac{1+i}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{2(-1+i)}{\sqrt{3}}$
71. Resolver: $x^3 - 64 = 0$
 Indicar la suma de sus raíces no reales.
- A) 2 B) -2 C) -4 D) 4 E) 3
72. Calcular n en la siguiente ecuación bicuadrada:
 $x^4 + (n - 25)x^2 + 4(n - 3) = 0$, si el producto de sus raíces es 12.
- A) 1 B) 3 C) 6 D) 7 E) 9
73. Calcular la suma de las raíces de:
- $$\frac{x^2 - 6}{x} - \frac{5x}{x^2 - 6} = 4$$
- A) 4 B) -4 C) 8 D) 6 E) 3
74. Señalar una raíz de $x^4 + x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$
- A) -1 B) $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ C) $\frac{\sqrt{7}-5}{2}$
 D) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{3+\sqrt{2}}{2}$

75. Indicar una raíz real de:

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 4\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{19}{4}$$

- A) 1,5 B) 2 C) $0, \widehat{6}$
 D) 1 E) $\frac{3}{4}$
76. Si la ecuación: $x^4 + ax^2 + b = 0$, tiene 2 raíces reales que suman 3 y el producto de las mismas es positiva, dichas raíces son también raíces de la ecuación: $x^3 + cx^2 + cx + 1 = 0$.
 Determinar: $a + b + c$
- A) -9 B) -8 C) -7
 D) -6 E) 5
77. Indicar una raíz de $x^4 + 1 = 0$
- A) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ B) -i C) $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$
 D) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ E) $1 - i$
78. Resolver la ecuación: $8x^6 - 65x^3 + 8 = 0$, e indicar una raíz.
- A) $-1 + \sqrt{2}i$ B) $-1 - \sqrt{2}i$ C) $1 + \sqrt{3}i$
 D) $1 - \sqrt{3}i$ E) $-1 - \sqrt{3}i$
79. De la ecuación polinomial $x^7 - 5x^6 - x^4 + 5x^3 = 0$, podemos afirmar que:
- A) La suma de sus raíces es -5.
 B) El producto de sus raíces es 5.
 C) Admite una raíz real $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.
 D) Una de sus raíces imaginarias es $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
 E) Una raíz real es -1
80. El siguiente polinomio:
 $P(x) = x^5 - 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 + 21x + 9$, presenta:
- A) 5 raíces diferentes.
 B) 2 raíces de multiplicidad 2
 C) 1 raíz de multiplicidad 2 y otra de multiplicidad 3
 D) 1 raíz de multiplicidad 4
 E) 1 raíz de multiplicidad 5
81. Resolver la ecuación recíproca:
 $3x^5 - x^4 - x^3 + x^2 + x - 3 = 0$
 Indicar una de sus raíces.
- A) -1 B) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ C) $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 D) $\frac{5}{6} + \frac{\sqrt{11}}{6}i$ E) $-\frac{5}{6} - \frac{\sqrt{11}}{6}i$
82. La ecuación recíproca:
 $ax^4 - 35x^3 + 62x^2 + bx + 6 = 0$; $a \neq 0$
 admite 2 raíces de la forma: $m - 3i$; $\frac{1}{m - 3}$
 Determinar el mayor valor de m .
- A) 6 B) 5 C) 4 D) 3 E) 2

83. Sea P un polinomio, tal que $P(x) = x^3 P\left(\frac{1}{x}\right)$.

Hallar el término lineal de $P(x)$, sabiendo que su término independiente es 3 y la suma de sus coeficientes 10.

- A) 2 B) $2x$ C) 3
D) $3x$ E) $4x$

84. Dado el polinomio $P(x) \equiv ax^5 + bx^4 + bx + a$
Además: $P(c) = 0$; donde $c \in \mathbb{R} - \{0\}$
Señalar lo correcto

- A) $x = 1$ es una raíz de $P(x)$
B) $x = -c$ es una raíz de $P(x)$
C) $x = -1$ no es raíz de $P(x)$
D) $x = -c^{-1}$ es una raíz de $P(x)$
E) $x = c^{-1}$ es una raíz de $P(x)$

85. Sabiendo que $x = c$ es una raíz de la ecuación:
 $ax^5 + (b - ac)x^4 - bcx^3 - bx^2 - (a - bc)x + ac = 0$;
 $a \neq 0$, ¿qué condición se debe cumplir entre a y b
para que las otras raíces sean reales?

- A) $a + 2b \geq 0$ B) $a + 2b^2 \geq 0$ C) $a \geq b^2$
D) $|a| \geq 2|b|$ E) $|b| \geq 2|a|$

86. Determinar el número de raíces imaginarias de la ecuación $x^5 - x^3(4x - 7) - x(7x - 4) - 1 = 0$.

- A) 5 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

87. Al resolver la ecuación $x^5 + 9x^3 + 5x = 1 + 9x^2 + 5x^4$, dos de las raíces tienen la forma:

$$\left(\frac{3 + \sqrt{m}}{2}\right) \text{ y } \left(\frac{1 - \sqrt{n}}{2}\right)$$

Hallar el valor de $m + n$.

- A) 2 B) 3 C) 7 D) 0 E) 8

88. Resolver $\sqrt{3x^2 - 16x + 24} - \sqrt{3x^2 - 16x - 3} = 9$, e indicar el producto de sus raíces.

- A) -2 B) -4 C) -3
D) -6 E) -8

89. Indicar la suma de dos de las raíces de:
 $x^4 + (a + b)x^3 + (ab - 1)x^2 - (a + b)x - ab = 0$

- A) a B) $-b$ C) $b - a$
D) $a + b$ E) 0

90. Hallar el mayor valor de n para que las raíces de la ecuación $4x^4 + (2n + 12)x^2 - n^4 + n^3 + 6n^2 = 0$ sean reales.

- A) 27 B) 3 C) 0
D) 6 E) no existe

91. Dar el valor de verdad con respecto a las raíces de:
 $x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2 = 0$

- I. Sus cinco raíces son reales.
II. Tiene solo 3 raíces imaginarias.
III. Tiene solo 3 raíces irracionales.

- A) VFF B) VVV C) VFF
D) FFF E) FFV

92. Sobre la ecuación polinomial de coeficientes reales $x^5 + ax^4 + bx^3 + dx + e = 0$; donde $2a^2 < 3b$

Hallar el valor de verdad:

- I. Todas sus raíces son reales.
II. Si $e < 0$, al menos una raíz es positiva
III. Tiene raíces imaginarias.

- A) FVF B) VVF C) VVV
D) FVV E) FFV

93. Si a , b y c son las raíces de $x^3 - 7x^2 + 3x - 10 = 0$, calcular: $w = a^2 + b^2 + c^2$

- A) 41 B) 42 C) 44
D) 50 E) 43

94. Si la ecuación en x : $\frac{A}{Bx - 1} - \frac{B}{Ax - 1} = 0$;
 $AB \neq 0$; $A \neq B$

Tiene: $CS = \left\{\frac{1}{2AB}\right\}$, calcular $\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right)$.

- A) 1 B) $1/2$ C) 2
D) $1/4$ E) 4

95. Resolver la ecuación: $\frac{2x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = 5$

- A) -5 B) 5 C) $\{-5\}$ D) $\{5\}$ E) $\emptyset$

96. Hallar la suma de soluciones que presenta la ecuación fraccionaria: $\frac{(x-3)(x^2+x+1)}{x(x^2+1)} = \frac{1-3x}{x^2-x+1}$

- A) 3 B) -3 C) -1
D) 0 E) 1

97. Resolver en x : $\frac{a}{b}\left(1 - \frac{a}{x}\right) + \frac{b}{a}\left(1 - \frac{b}{x}\right) = 1$

- A) $2a$ B) $a + b$ C) $a - b$
D) a^2 E) b^2

98. Resolver la ecuación: $\frac{x^3 + 5x^2 + 3x + 9}{x^3 + 2x^2 + 7x + 9} = \frac{x^2 + 5x + 3}{x^2 + 2x + 7}$

- A) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$ B) $\left\{\frac{2}{3}\right\}$ C) $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$
D) $\left\{\frac{4}{3}\right\}$ E) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$

99. Si x_1 es la raíz positiva y x_2 la raíz negativa de la ecuación $x^5 - 2x^3 - 2x^2 - 3x = 2$, calcular $3x_1 - 4x_2$

- A) 10 B) 8 C) 6 D) 4 E) 0

100. Indicar la suma de las soluciones enteras de la siguiente ecuación recíproca:

$$6x^5 + 41x^4 + 97x^3 + 97x^2 + 41x + 6 = 0$$

- A) -3 B) -4 C) -6
D) -1 E) -5

101. Resolver la ecuación:

$$2x^5 - 7x^4 + 9x^3 - 9x^2 + 7x - 2 = 0$$

Indicar la suma de soluciones reales.

- A) 7/2 B) 5/2 C) 4/3
D) -5/2 E) 1/2

102. Si x_1, x_2 y x_3 son raíces de $2x^3 - 3x + 4 = 0$, calcule $(x_1 + x_2)^3 + (x_2 + x_3)^3 + (x_3 + x_1)^3$

- A) 6 B) -6 C) 4
D) -4 E) 3

103. Si a, b y c son raíces de $x^3 + 2x + 2 = 0$, hallar el valor de: $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2$

- A) 2 B) -4 C) -16
D) -12 E) -8

104. Si x_1, x_2, x_3 son raíces de la ecuación:

$$5x^3 - 7x^2 + 4x - 8 = 0, \text{ hallar el valor de:}$$

$$P = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

- A) 1/3 B) 1 C) 1/
D) 1/5 E) 2

105. Si $\{x_1, x_2, x_3\}$ es el CS de $x^3 - 7x + 6 = 0$,

$$\text{calcular: } \frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}$$

- A) 7/9 B) 1/9 C) -7/9
D) -1/3 E) 1/3

106. Dada la ecuación $3x^3 + 2ax^2 - bx + 6 = 0$;

$\{a, b\} \subset \mathbb{Z}$. Si una de sus raíces es -2 , calcular: $\frac{a}{b}$

- A) -4/9 B) 2/9 C) -1/3
D) 4/9 E) 1/5

107. Dada la ecuación en x : $x^3 + nx = 6x^2 + 8$.

Hallar n , si una raíz es la mitad de la suma de las otras dos.

- A) 12 B) 10 C) 11
D) 13 E) 6

108. Determinar $a + b/a$; $b \in \mathbb{R}$, si el número $1 + i$ es raíz de la ecuación: $x^5 + bx^3 + a = 0$

- A) 10 B) 11 C) 12
D) 9 E) 8

109. Si $\sqrt{8} + 1$ es una raíz de la ecuación:

$$x^3 - 4x^2 + bx + c = 0, \text{ hallar: } \frac{-3c}{b}$$

- A) 2 B) -2 C) 1
D) -1 E) 14

110. Si una de las raíces de la ecuación:

$$3x^3 + ax^2 + bx + 12 = 0; \{a, b\} \subset \mathbb{R}, \text{ es } 1 - \sqrt{3}i, \text{ calcular } a + b.$$

- A) 6 B) -6 C) 7 D) 5 E) 4

111. Si x_1 y x_2 son raíces positivas de la ecuación bicuadrada: $4x^4 - 65x^2 + 16 = 0$, calcular $\frac{x_2}{x_1}$, si $x_1 \leq x_2$.

- A) 8 B) 1/4 C) 1/8
D) 2 E) 1/2

112. Indicar la suma de las cuartas potencias de las raíces de la ecuación bicuadrada:

$$x^4 - \sqrt{2}(a + b)x^2 + (a - b)^2 = 0; |a| \neq |b| \neq 0$$

- A) 16ab B) ab C) 25ab
D) $4\sqrt{ab}$ E) 8ab

113. Si la ecuación bicuadrada $x^4 + (n - 4)x^2 = 4n$, tiene todas sus raíces reales, hallar el mayor valor entero de n .

- A) 0 B) -1 C) 1
D) 2 E) -2

114. Indicar cuántas soluciones reales tiene:

$$(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x - 2) + 4 = 1$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 0

115. Si las ecuaciones en x :

$$x^3 - 1 = 0 \wedge ax^2 + bx + c = 0$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

tienen dos raíces comunes x_1 y x_2 , hallar: $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$

- A) 1 B) -1 C) 2
D) 1/2 E) -2

116. Si x_1, x_2, x_3, x_4 son las raíces de la ecuación:

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0, \text{ calcular: } x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + x_4^5$$

- A) 320 B) 4 C) 5
D) -32 E) -100

117. Si las raíces de: $4x^4 - 4x^3 - 21x^2 + 11x + n = 0$ están en progresión aritmética, indicar una raíz.

- A) 45 B) -1 C) 5
D) 4 E) -2

118. Sea la ecuación $x^2 + mx + n = 0$, de raíces reales cuyo CS = $\{r_1, r_2\}$. Determinar qué enunciado(s) es (son) correcto(s):

I. $x^2 - mx + n = 0$, posee CS = $\{-r_1, -r_2\}$

II. $nx^2 + mx + 1 = 0$, posee CS = $\left\{\frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}\right\}$

III. $(x + 1)^2 + m(x + 1) + n = 0$, posee CS $\{r_1 - 1; r_2 - 1\}$

- A) I y II B) I y III C) I, II y III
D) Solo I E) Solo II

119. Si el siguiente sistema presenta una solución:

$$\begin{aligned} (x + a)^2 + y^2 &= 3a \\ x - y &= 2a \end{aligned}$$

Calcular el valor de "a", donde $a \in \mathbb{R}$

- A) 1/2 B) 3/2 C) 0 D) 1/3 E) 2/3

120. Resolver el sistema lineal:

$$2x + y - w = 4$$

$$x + y + 3w = 9$$

$$x + 2y + 2w = 3$$

Dar el valor de w

- A) 2 B) 2/5 C) -1/2
-
- D) 5/2 E) 5

121. Al resolver el sistema:

$$x + 2y + z = 7$$

$$2x - 2y - z = -1$$

$$x + y - 2z = -3$$

Indicar el valor de xyz

- A) 1 B) 3 C) 6
-
- D) 4 E) -12

122. Al resolver el sistema:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 14$$

$$x + y^2 + z^2 = 12$$

$$x + z = 2$$

Dar el menor valor de z

- A) 2 B) 0 C) 7 D) 8 E) 4

123. Al resolver el sistema:

$$x^2 + z = -2xz$$

$$y^2 + x = -2yx$$

$$z^2 + y = -2yz$$

calcular el valor de: $x + y + z$

- A)
- $1 \vee -2$
- B)
- $0 \vee -1$
- C)
- $0 \vee -2$
-
- D)
- $0 \vee 1$
- E)
- $1 \vee 2$

124. Resolver el sistema:

$$\sqrt{2a+b} - \sqrt{2a-b} = 1 \quad \dots (\alpha)$$

$$\sqrt{2a+b} + \sqrt{2a-b} = 2 \quad \dots (\beta)$$

Dar por respuesta el valor de ab .

- A) 2 B) 8 C) 1
-
- D) 8/5 E) 5/8

125. Resolver el sistema:

$$\sqrt{x^2 + x + y + 1} = y + 1$$

$$x - y = 1; x \neq y$$

Dar el valor de y .

- A) 0 B) -2 C) -1
-
- D) -3 E) 2

126. Resolver el sistema:

$$x^2y^4 - 4xy^2 - 32 = 0$$

$$xy = 4$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$.

- A)
- $\{(2; 2); (-4; -1)\}$
- B)
- $\{(-2; -2); (4; 1)\}$
-
- C)
- $\{(2; -2); (-4; -1)\}$
- D)
- $\{(-2; -2); (-4; 1)\}$
-
- E)
- $\{(2; 2)\}$

127. Resolver: $5x + 3y = 19$

$$x + 2y = 8$$

Dar el valor de: $(x + y)^2 - (x - y)^2$

- A) 20 B) 18 C) 24
-
- D) 30 E) 35

128. Si el sistema en x e y :

$$x - 6y = m \wedge (a + 2)x + 5y = 7$$

presenta infinitas soluciones, calcular am .

- A) 119/5 B) 114/5 C) 100/7
-
- D) 95/7 E) 115/7

129. ¿Qué valor tomará m para que el sistema:

$$5x - 7y = 13$$

$$3mx + 3y = 5$$

no tenga solución?

- A) -3/7 B) -5/7 C) -9/7
-
- D) 5/7 E) 9/7

130. Si el sistema: $20x + 5n^2y = 3$

$$nx + 2y = 7$$

es compatible determinado, indicar qué valor no toma n .

- A) 3 B) 7 C) 2 D) 5 E) 11

131. Si el sistema mostrado es compatible indeterminado, calcule b^{2a} .

$$(a + b)x + 2y = 1$$

$$3x + (a + 1)y = a$$

- A) 8 B) 5 C) 4 D) 9 E) 7

132. Para qué valor de m , el sistema mostrado es inconsistente.

$$3x + (m + 5)y = -2$$

$$mx - 2y = 2$$

- A) -3 B) -2 C) 3
-
- D) 2 E) -5

133. Halle $4(z - x + y)$, si:

$$x - \frac{y-z}{2} = 5; \quad z - \frac{y+x}{3} = 4; \quad y - \frac{x+z}{8} = 10$$

- A) 16 B) 64 C) 60
-
- D) 53 E) 58

134. Hallar el menor valor que puede tomar $x + y$ en el siguiente sistema:

$$x^2 + xy + x = 15$$

$$y^2 + xy + y = 5$$

- A) -5 B) 5 C) -4
-
- D) 4 E) -6

135. Hallar x , al resolver:

$$yz + y + z = 5$$

$$xy + x + y = 7$$

$$zx + x + z = 11$$

- A) 4 B) 7 C) 8 D) 2 E) 3

136. Resolver el sistema: $x + y^2 + z^2 + w^2 = 7$
 $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 13$
 $x + z = 5$

Dar la suma de los posibles valores de z .

- A) 5 B) 9 C) 8 D) 4 E) 2

137. Resolver el sistema:
 $(x - y)^2 - (x + y)^2 = 4 \wedge x = \frac{-y}{4}$.

Calcular el menor valor de y .

- A) 5 B) -3 C) -1
 D) -2 E) 2

138. Resolver e indicar el valor de $\left(\frac{x}{y}\right)$, si:

$$\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = a$$

$$\frac{x^2 + xy}{b(x-y)(x+y)^2} = \frac{1}{3}$$

- A) $\frac{b}{a}$ B) $\frac{2b}{3a}$ C) $\frac{a}{3}$
 D) $\frac{6}{3}$ E) $\frac{3a}{b}$

139. Si (x_0, y_0) es una solución del sistema:

$$x^2 y^2 + 9 = 6xy$$

$$x + y = 4$$

hallar el valor de: $x_0 - y_0$

- A) 1 B) 3 C) -2 D) -1 E) -3

140. Resolver el sistema:

$$\sqrt{2a+b} - \sqrt{2a-b} = 1$$

$$\sqrt{2a+b} + \sqrt{2a-b} = 2$$

Dar por respuesta el valor de ab .

- A) 2 B) 4 C) 5/8
 D) 8/5 E) 7

141. Calcular el valor de $4x + 3y$, luego de resolver:

$$\frac{1}{2x+1} + \frac{3}{y-1} = 5$$

$$\frac{2}{2x+1} - \frac{1}{y-1} = 3$$

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

142. En el sistema:

$$x^3 + x^2 y - xy^2 - y^3 = 405$$

$$x - y = 5$$

hallar $x + y$; si $x, y \in \mathbb{R}^+$

- A) 6 B) 7 C) 8
 D) 9 E) 10

143. Resolver el sistema:

$$4x^3 - 9y^2 = 9xy$$

$$x^2 + 3y = 12$$

Indicar el cardinal del conjunto solución.

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

144. Indicar un valor de xyz , luego de resolver:

$$x^2 + xy + xz = 8$$

$$xy + y^2 + yz = 12$$

$$xz + yz + z^2 = -4$$

- A) 1 B) -3 C) 6
 D) -12 E) 9

145. Luego de resolver:

$$x^2 - xy + y^2 = 3$$

$$x^2 + xy - y^2 = 5$$

se obtiene un conjunto solución, el cual contiene n elementos. Indicar el valor de n .

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

146. Resolver el siguiente sistema no lineal

$$x^2 - 2y = -2xz$$

$$x^2 - 2x = -2xy$$

$$x^2 - 2y = -2yz$$

Indicar el mayor valor que toma: $x + y + z$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

147. Resolver el siguiente sistema:

$$2x + 3y = 5$$

$$3x + 2y = 15$$

Indicar el valor de xy .

- A) -6 B) $\sqrt{3}$ C) -21
 D) 3 E) 2

148. El conjunto solución del sistema:

$$2ax + (1-a)y = a^2 + 4a - 1$$

$$ax - (a+1)y = a + 1$$

es $\{(\alpha; \beta)\}$. Hallar valor de: $\alpha + \beta$

- A) $a + 2$ B) $2a - 1$ C) $a - 2$
 D) $2a$ E) $2a + 1$

149. El sistema:

$$(2a + 1)x + 9y = 2004$$

$$4x + (2a + 1)y = 2005$$

tiene solución única si $a \in \mathbb{R} - \{\alpha; \beta\}$. Calcular $\alpha + \beta$

- A) 1 B) -1 C) 0
 D) 9/2 E) -1/2

150. El sistema es indeterminado

$$(a - 2)x + (b + 1)y = 2004$$

$$(a + 2)x + (b - 1)y = 1002$$

hallar el valor de: $a + b$

- A) 3 B) 0 C) -3
 D) 2 E) -2

151. Si el sistema:

$$(a - 8)x - 3y = a - 1$$

$$6x + (a + 1)y = 1 - a$$

no tiene solución, hallar el valor de a .

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) $2 \vee 5$

152. Respecto al siguiente sistema:

$$2x + 5y = 3$$

$$10y + 25x = 15$$

Indicar la proposición correcta.

- A) No tiene solución.
 B) Tiene infinitas soluciones.
 C) Es compatible determinado.
 D) Es incompatible.
 E) CS = {4; 1}

153. Si (2; 3) es solución de sistema:

$$ax + by = -3$$

$$(a + 4)x + 2by = 14$$

hallar el valor de: $a + b$

- A) 5 B) 2 C) -1
 D) -3 E) 1

154. En el sistema:

$$(a - 3)x + by = 5$$

$$(1 - 4a)x + by = 2$$

su CS = $\left\{\left(-\frac{1}{3}; y_0\right)\right\}$. Hallar el valor de "a".

- A) -2 B) -1 C) 0
 D) 1 E) 2

155. Sea $(x_0; y_0; z_0)$ solución del sistema:

$$3x + 2y + z = 6$$

$$3x + y + z = 5$$

$$2x + y + z = 4$$

calcular: $5x_0 + 3y_0 + 2z_0$

- A) 2 B) 10 C) 8
 D) 6 E) 4

156. Si se tiene el sistema:

$$x + 2y + 4z = 4$$

$$2x + 4y + z = 7$$

$$4x + y + 2z = 10$$

hallar el valor de: $\frac{x+y}{z-3}$

- A) 1 B) -1 C) 1/2
 D) -1/2 E) -2/3

157. Calcular el valor de "a" para que el sistema tenga solución única:

$$x + y = 3 + a$$

$$x^2 + y = 3$$

- A) 1/2 B) -1/2 C) 1/4
 D) -1/4 E) -1

158. Determinar el valor de $x + y$, si se tiene que:

$$x - 9y = 28$$

$$\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 14$$

- A) 64 B) 62 C) 68
 D) 72 E) 76

159. Indicar un valor de xy , al resolver:

$$\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 4$$

$$x^2 - y^2 = 9$$

- A) 12 B) -18 C) 18
 D) 20 E) 24

160. Dado el sistema:

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$x^2 + |y| = 11$$

indicar cuántas soluciones tiene.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

161. Si: $x - \sqrt{y} = 14$; $x > 10 \wedge x + y = 20$

determinar: $\frac{x}{y}$

- A) 1 B) -1 C) 0
 D) 8 E) 4

162. Calcular $x^3 + y^3$, si:

$$\frac{5xy}{x+y} = \frac{3xy}{x-y} = 4$$

- A) 63 B) 28 C) 26
 D) 65 E) 0

163. Si el sistema: $3x + 5y = 1$

$$2ax - by = 8$$

tiene infinitas soluciones, hallar el valor de: $a - b$

- A) 52 B) -12 C) 34
 D) -28 E) 16

164. Respecto al conjunto:

$$A = \{x; y \mid 2x + 3y - 6 = 0; 4x - 3y - 6 = 0;$$

$$x - 1 = 1; 3y = 2\}$$

- A) Tiene 6 elementos B) Tiene 4 elementos
 C) Tiene 1 elemento D) Es el conjunto vacío
 E) Tiene un número ilimitado de elementos

165. Dado el sistema:

$$\sqrt{x^2 + 12y} + \sqrt{y^2 + 12x} = 33$$

$$x + y = 23$$

calcular: $\sqrt{2x - y}$

- A) 3 B) 2 C) 5 D) 7 E) 4

166. Determinar la única solución del sistema:

$$x^2 + y^2 = 144$$

$$y + 13 = nx$$

si: $n > 0$; proporcionar el valor de: $\left(\frac{x}{y}\right)$

- A) -7/6 B) -12/5 C) 7/12
 D) 5/7 E) 3/5

167. El sistema de segundo grado:

$$x^2 + y^2 = 16$$

$$y + 5 = mx$$

para un cierto valor de m admite solución única. Obtener dicho valor de m .

- A) $3/4$ B) $1/4$ C) $7/4$
D) $1/2$ E) $1/5$

168. Resolver en $\mathbb{R}$ el sistema:

$$\begin{aligned}x + y - z &= 1 \\x^2 - y^2 + z^2 &= 1 \\-x^3 + y^3 + z^3 &= -1\end{aligned}$$

Indicar el número de elementos del conjunto solución real del sistema.

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

169. Señalar cuántas soluciones tiene el sistema:

$$y^2 + z^2 - x = z^2 + x^2 - y = x^2 + y^2 - z = 1$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

170. Si las ecuaciones: $ax + by = 1$; $cx^2 + dy^2 = 1$ tienen solamente una solución, calcular: $\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d}$

- A) 1 B) $3/2$ C) $2/3$
D) $5/4$ E) $4/5$

171. Del sistema: $x^2 - y^2 = xy - ab$
 $(x + y)(ax + by) = 2ab(a + b)$

indicar un valor que toma x .

- A) $\sqrt{a}$ B) $\sqrt{b}$ C) $\sqrt{ab}$
D) $\sqrt{a + b}$ E) $\sqrt{a - b}$

172. Resolviendo el sistema: $x + y^2 = y + x^2 = a + a^2$, se obtienen para x e y dos valores de la forma:

$$\frac{1}{2}[1 \pm \sqrt{(na - 1)(na + 3)}]. \text{ Hallar } n.$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

173. Las raíces de: $P(x) = x^3 - kx^2 + 92x + n$

están en relación: $\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{3} = \frac{x_3}{5}$. Hallar el máximo valor de $k + n$.

- A) 138 B) 240 C) 136
D) 156 E) 102

174. Si P es un polinomio completo definido por

$P(x) = x^5 + \dots + 15$ y la ecuación $P(x) = 0$, tiene a $\sqrt[3]{-3}$ y a $\frac{5}{2+i}$ como raíces, hallar la sexta parte del resto de dividir $P(x)$ entre $(x^3 - 3)$.

- A) $x^2 - 3x + 2$ B) $x^2 - 4x - 6$
C) $x^2 - 4x + 1$ D) $x^2 - 4x - 5$
E) $x^2 - 4x + 5$

175. Si el polinomio $P(x) = x^3 + ax^2 + x + 2$ es divisible por $(x + 2)$, hallar el producto de las raíces racionales de la ecuación: $P(2x^3 + 2 - P(x)) = 0$

- A) 0 B) 5 C) -2
D) -3 E) 2

176. En una olimpiada matemática, se repartieron n medallas en el transcurso de los n días que duró el evento ($n > 1$). En el primer día, se entregó una medalla y la séptima parte de las $(n - 1)$ medallas restantes. En el segundo día, dos medallas y la séptima parte del nuevo resto y así sucesivamente. Si en el enésimo día, fueron distribuidos las n medallas restantes, ¿cuántas medallas se repartieron en total?

- A) 48 B) 50 C) 64
D) 16 E) 36

177. Al resolver:

$$\begin{aligned}(x + y)(x - y) &= 11 \\(y + 3)(y - 3) &= x\end{aligned}$$

indicar uno de los valores obtenidos para x o y .

- A) $-\sqrt{6}$ B) $-\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $-\sqrt{5}$ E) $-\sqrt{10}$

CLAVES

1. D	24. E	47. D	70. D	93. E	116. B	139. C	162. D
2. E	25. C	48. E	71. C	94. C	117. E	140. C	163. A
3. E	26. C	49. A	72. C	95. C	118. C	141. C	164. C
4. B	27. A	50. E	73. A	96. D	119. E	142. D	165. E
5. D	28. B	51. B	74. B	97. B	120. D	143. D	166. B
6. A	29. D	52. D	75. A	98. D	121. C	144. C	167. A
7. B	30. A	53. B	76. B	99. A	122. B	145. C	168. B
8. D	31. D	54. E	77. C	100. C	123. B	146. C	169. D
9. D	32. E	55. A	78. E	101. A	124. E	147. C	170. A
10. D	33. C	56. D	79. D	102. A	125. C	148. D	171. C
11. C	34. C	57. B	80. C	103. D	126. A	149. B	172. B
12. D	35. A	58. B	81. E	104. C	127. C	150. C	173. A
13. C	36. E	59. A	82. A	105. C	128. A	151. D	174. E
14. A	37. B	60. A	83. B	106. E	129. B	152. C	175. A
15. B	38. D	61. E	84. E	107. A	130. C	153. D	176. E
16. A	39. C	62. C	85. E	108. A	131. C	154. B	177. D
17. E	40. B	63. C	86. C	109. E	132. B	155. B	
18. D	41. D	64. E	87. E	110. B	133. B	156. B	
19. C	42. C	65. C	88. B	111. A	134. A	157. C	
20. A	43. A	66. D	89. E	112. A	135. E	158. C	
21. A	44. B	67. D	90. E	113. B	136. B	159. D	
22. B	45. D	68. B	91. D	114. D	137. D	160. E	
23. D	46. A	69. D	92. D	115. B	138. B	161. E	

Desigualdades Inecuaciones Valor absoluto

16

capítulo

Georg Friedrich Bernhard Riemann nació en Breselenz (Alemania) el 17 de septiembre de 1826 y murió en Verbania (Italia) el 20 de julio de 1866. Fue un matemático alemán que realizó contribuciones muy importantes al análisis y la geometría diferencial, algunas de las cuales allanaron el camino para el desarrollo más avanzado de la relatividad general. Su nombre está conectado con la función zeta, la hipótesis de Riemann, la integral de Riemann, el lema de Riemann, las variedades de Riemann, las superficies de Riemann y la geometría de Riemann.

Desde pequeño demostró una fabulosa capacidad para el cálculo unida a una timidez casi enfermiza. Durante sus estudios de



Alemania, 1826 - Italia, 1866

Bernhard Riemann

secundaria aprendía tan rápido que enseguida adelantaba a todos sus profesores. En 1846, a la edad de 19 años comenzó a estudiar Filología y Teología en la Universidad de Göttingen. En 1847 su padre reunió el dinero suficiente para que comenzara a estudiar matemáticas. En 1859, al doctorarse en Matemáticas ante Gauss, formuló por primera vez la hipótesis de Riemann, la cual es uno de los más famosos e importantes problemas sin resolver de las matemáticas. Lo ascendieron a profesor extraordinario en la Universidad de Göttingen en 1857 y se hizo profesor ordinario en 1859. En 1862 se casó con Elise Koch. Murió de tuberculosis en su tercer viaje a Italia en Selasca.

Fuente: Wikipedia

◀ DESIGUALDADES

Son relaciones de comparación entre dos o más cantidades reales de diferente valor.

Por ejemplo; si:

La edad de Juan es 40 años.

La edad de Pedro es 60 años.

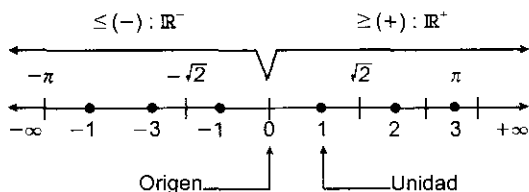
La edad de Luis es 70 años.

Se tendrá las siguientes relaciones:

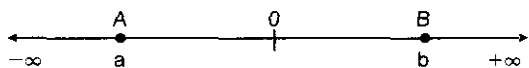
- La edad de Juan es menor que la edad de Pedro.
- La edad de Luis es mayor que la edad de Pedro.
- La edad de Juan es menor que la edad de Luis.

Intuitivamente estamos comparando magnitudes reales de una misma especie. Las desigualdades solo se verifican en el campo de los números reales que asociado a la recta real podemos observar:

Recta numérica real



Que para cada número real le corresponde un único punto de la recta real y reciprocamente para cada punto de la recta real, le corresponde un único número real. La correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de una recta real nos ayuda a dar una interpretación geométrica de la relación de orden entre los números reales. Para la gráfica adjunta:



La relación $a < b$ (se lee: a menor que b) significa que al punto A le corresponde el número real "a" y se encuentra a la izquierda del punto B al cual le corresponde el número real "b".

◀ AXIOMAS DE RELACIÓN DE ORDEN

I. Orden de tricotomía

$\forall a; b \in \mathbb{R}$, se cumple una y solo una de las siguientes posibilidades:

$$a < b \vee a = b \vee b < a$$

Por ejemplo: dado los número reales $-6; 3; -3$ y 4 ; se cumple que:

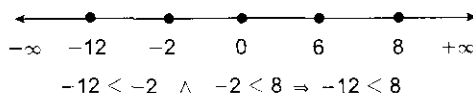
- $-6 < -3$
- $3 < 4$
- $-3 < 4$
- $-6 < 4$

II. Orden transitivo

$\forall a; b; c \in \mathbb{R}$, si: $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$

Ejemplo:

En la recta real:



III. Orden de la monotonía

$\forall a; b; c \in \mathbb{R}$

• Ley aditiva

$$\text{Si: } a < b \Rightarrow a + c < b + c$$

• Ley multiplicativa

$$\text{Si: } c \in \mathbb{R}^+ \wedge a < b \Rightarrow ac < bc$$

$$\text{Si: } c \in \mathbb{R}^- \wedge a < b \Rightarrow bc < ac$$

◀ RELACIONES QUE EXPRESAN DESIGUALDADES

1. a es menor que b ($a < b$)

$$a < b \Leftrightarrow a - b < 0$$

2. a es mayor que b ($a > b$)

$$a > b \Leftrightarrow a - b > 0$$

3. a es mayor o igual que b ($a \geq b$)

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$$

4. a es menor o igual que b ($a \leq b$)

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

◀ CLASES DE DESIGUALDADES

I. Desigualdades absolutas

Son aquellas que se verifican en el campo de los número reales y a su vez pueden ser numéricas o literales.

Ejemplos:

Númericas

- $8 > 0$
- $7 > 3$
- $-\frac{1}{5} \leq 0$

Literales

- $x^2 > -3$
- $-6 < (x - 2)^8$
- $x^8 + y^8 \geq 0$

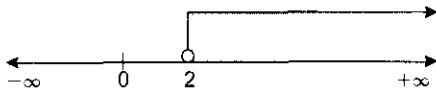
II. Desigualdades relativas

Estas desigualdades se conocen también con el nombre de inecuaciones y se caracterizan por que se verifican para un conjunto de valores denominados conjunto solución y su representación se visualiza en la recta real.

Ejemplos:

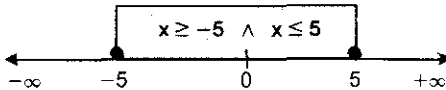
1. La inecuación: $4x - 3 > 5$, se verifica para todo valor de x mayor que dos ($x > 2$).

Su representación gráfica en la recta real sería de la siguiente forma:



2. La inecuación: $x^2 - 25 \leq 0$, se verifica para todo x , tal que: $x \geq -5 \wedge x \leq 5$

Su representación gráfica en la recta real sería de la siguiente forma:

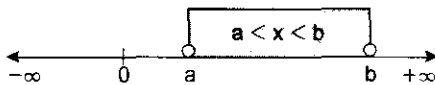


◀ INTERVALO

Es el conjunto de valores x pertenecientes a la recta real, limitado en sus extremos por los elementos a y b , tal que $a < b$; a y b pueden o no pertenecer al conjunto de valores x .

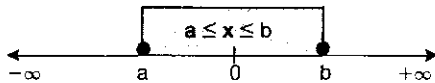
Clases de intervalo

- **Intervalo abierto:** $\langle a; b \rangle = \{x/a < x < b; a < b\}$
Su representación gráfica es:



$$\therefore x \in \langle a; b \rangle$$

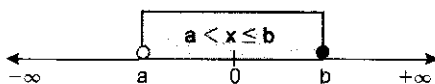
- **Intervalo cerrado:** $[a; b] = \{x/a \leq x \leq b; a < b\}$
Su representación gráfica es:



$$\therefore x \in [a; b]$$

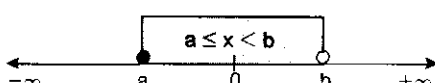
- **Intervalos mixtos:**

1. $\langle a; b \rangle = \{x/a < x \leq b; a < b\}$



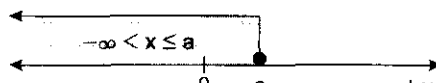
$$\therefore x \in \langle a; b \rangle$$

2. $[a; b) = \{x/a \leq x < b; a < b\}$



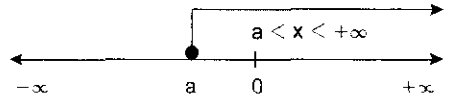
$$\therefore x \in [a; b)$$

3. $\langle -\infty; a \rangle = \{x/-\infty < x \leq a; -\infty < a\}$



$$\therefore x \in \langle -\infty; a \rangle$$

4. $[a; +\infty) = \{x/a \leq x < +\infty; a < +\infty\}$



$$\therefore x \in [a; +\infty)$$

◀ PROPIEDADES GENERALES DE LAS DESIGUALDADES

1. Si a los dos miembros de una desigualdad, se suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no se altera.

Si: $a > b \rightarrow a \pm c > b \pm c$

2. Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por una cantidad positiva, el signo de la desigualdad no se altera.

Si: $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc \wedge \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

3. Si a los dos miembros de una desigualdad se multiplica o divide por una cantidad negativa, el signo de la desigualdad se invierte.

Si: $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc \wedge \frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

4. Dos desigualdades de signo contrario se pueden restar miembro a miembro y el signo de la desigualdad resultante es el mismo que hace las veces de minuendo, es decir:

Dado el sistema: $a > b \wedge c < d$

Se cumple que:

$$a - c > b - d \vee c - a < d - b$$

5. Dos o más desigualdades del mismo sentido se pueden multiplicar o dividir miembro a miembro y el sentido de la desigualdad no se altera, siempre y cuando los miembros de las desigualdades sean cantidades positivas.

$\forall a; b; c; d; \in \mathbb{R}^+$; si $a > b \wedge c > d$

Se cumple: $ac > bd \vee \frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

6. Dos desigualdades de signo contrario y miembros positivos se pueden dividir miembro a miembro, el signo de la desigualdad resultante es el mismo que el signo de la desigualdad que hace las veces de dividiendo.

Es decir: $\forall a; b; c; d; \in \mathbb{R}^+$; si $a > b \wedge c < d$

Se cumple: $\frac{a}{c} > \frac{b}{d} \vee \frac{c}{a} < \frac{d}{b}$

7. Si a los dos miembros de una desigualdad se eleva a una potencia impar o se extrae raíces de índice

impar, el sentido de la desigualdad no se altera. Es decir:

Si:

$$a > b \Rightarrow \begin{cases} \bullet a^{2n+1} > b^{2n+1} \\ \bullet \sqrt[2n+1]{a} > \sqrt[2n+1]{b} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{Z}^+$

8. Si a los dos miembros de una desigualdad de términos negativos se eleva a un exponente par, el signo de la desigualdad se invierte, es decir:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

- Si $a > b \Rightarrow a^{2n} < b^{2n}$
- Si $a < b \Rightarrow a^{2n} > b^{2n}$

9. Si $a \in \mathbb{R}$, tal que: $a \neq 0 \Rightarrow a^2 > 0$

10. Si $a, b \in \mathbb{R}$ y son del mismo signo, entonces:

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

$$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$$

◀ INECUACIONES

Inecuaciones de primer grado con una incógnita

Son todas aquellas inecuaciones que al reducirse adoptan las formas:

$$\begin{array}{l} ax + b > 0 \quad \vee \quad ax + b < 0 \\ ax + b \geq 0 \quad \vee \quad ax + b \leq 0 \end{array}$$

x : es la incógnita y $a, b \in \mathbb{R} \wedge a \neq 0$

Ejemplos:

1. Resolver el sistema

$$\frac{2x-3}{4} - \frac{3x-1}{2} \geq 1 \quad \dots(\alpha)$$

$$\frac{5x-3}{3} - \frac{8x-1}{4} \leq -1 \quad \dots(\beta)$$

Resolución:

Resolviendo cada inecuación.

De (α) : $\text{MCM}(4; 2; 1) = 4$

$$2x - 3 - 2(3x - 1) \geq 4$$

$$2x - 3 - 6x + 2 \geq 4 \Rightarrow -4x \geq 5$$

$$\therefore x \leq -\frac{5}{4}$$

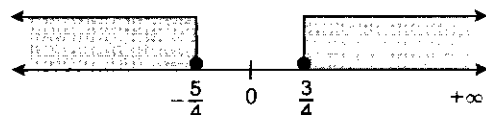
De (β) : $\text{MCM}(3; 4; 1) = 12$

$$4(5x - 3) - 3(8x - 1) \leq -12$$

$$20x - 12 - 24x + 3 \leq -12 \Rightarrow -4x \leq -3$$

$$\therefore x \geq \frac{3}{4}$$

En la recta real:



Como no hay intersección de las soluciones de

$$(\alpha) \text{ y } (\beta) \Rightarrow \boxed{X \in \emptyset}$$

2. Resolver: $ax + b \geq 0$; $a, b \in \mathbb{R}^+$

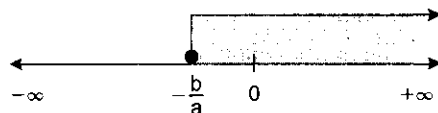
Resolución:

Resolver una inecuación de este tipo es similar a resolver una ecuación de primer grado, solo hay que tener en cuenta las propiedades generales de las desigualdades.

Transponiendo b al segundo miembro: $ax \geq -b$

Dado que $a \in \mathbb{R}^+$, es decir: $a > 0 \Rightarrow x \geq -\frac{b}{a}$

Graficando en la recta real:



$\therefore$ Vemos que $x \in \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$

3. Resolver: $\frac{3x-2}{2} - \frac{5x-3}{3} < \frac{x-1}{12}$

Resolución:

Siendo $\text{MCM}(2; 3; 12) = 12$ un número positivo, el signo de la desigualdad no se altera al efectuar las operaciones indicadas.

$$6(3x - 2) - 4(5x - 3) < x - 1$$

$$18x - 12 - 20x + 12 < x - 1$$

$$-2x < x - 1 \Rightarrow -3x < -1$$

Multiplicando por (-1) , obtenemos: $3x > 1$

$$\therefore x > \frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

4. Resolver:

$$(x+1)^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2 \leq 3(x+1)(x-1)$$

Resolución:

Efectuando las operaciones indicadas obtenemos:

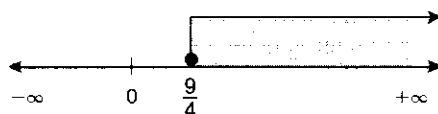
$$x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4 \leq 3x^2 - 3$$

Simplificando:

$$3x^2 - 4x + 6 \leq 3x^2 - 3 \Rightarrow -4x \leq -9$$

$$\text{Multiplicando por } (-1): 4x \geq 9 \Rightarrow x \geq \frac{9}{4}$$

Gráficamente:



$$\therefore x \in \left[\frac{9}{4}; +\infty\right)$$

Inecuaciones simultáneas del primer grado

En la resolución de inecuaciones simultáneas con dos incógnitas podemos aplicar cualquiera de las siguientes reglas.

- Se toman dos inecuaciones de sentido contrario despejando en cada una de ellas la misma incógnita, luego esta incógnita se elimina aplicando el principio de transitividad.
- Se puede eliminar una incógnita restando dos inecuaciones de sentido contrario, habiendo homogenizado previamente los coeficientes de la incógnita que se quiere eliminar.

Por ejemplo: si x e y son cantidades enteras y positivas, calcular $(x^2 + y^2)$, al resolver el sistema:

$$5x - 3y > 2 \quad \dots(1)$$

$$2x + y < 11 \quad \dots(2)$$

$$y > 3 \quad \dots(3)$$

Resolución:

Multiplicando la inecuación (1) por 2 y la inecuación (2) por 5, obtenemos:

$$10x - 6y > 4 \quad \dots(\alpha)$$

$$10x + 5y < 55 \quad \dots(\beta)$$

Restando miembro a miembro (α) y (β) :

$$10x - 6y - 10x - 5y > 4 - 55$$

$$-11y > -51 \Rightarrow y < \frac{51}{11}$$

$$\text{Dado que } 3 < y < \frac{51}{11} \Rightarrow y = 4$$

Reemplazando $y = 4$ en el sistema:

$$5x - 3y > 2 \Rightarrow x > 2,8$$

$$2x + y \leq 11 \Rightarrow x < 3,5$$

Aquí observamos que: $x = 3$

$$\therefore x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$$

Inecuaciones de segundo grado

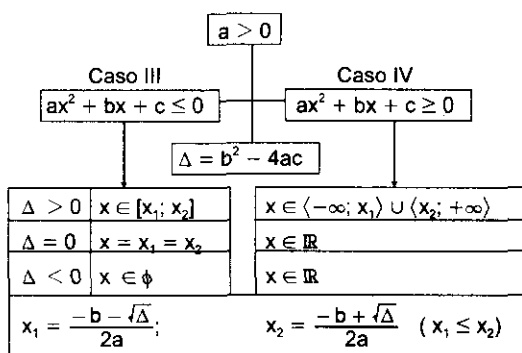
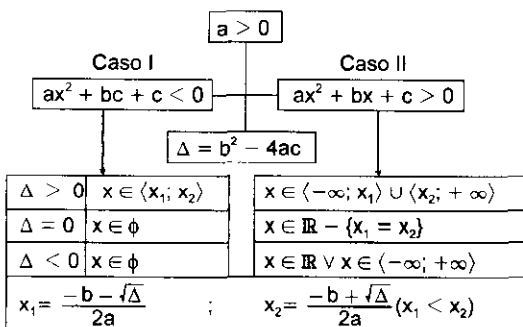
Son todas aquellas inecuaciones que al reducirse adopta la forma canónica:

$$ax^2 + bx + c > 0 \vee ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \vee ax^2 + bx + c \leq 0$$

Donde x es la incógnita; $a, b, c \in \mathbb{R} / a \neq 0$

Solución por el método del discriminante: $\Delta = b^2 - 4ac$



Inecuaciones de grado superior

Son aquellas inecuaciones que al ser reducidas adoptan cualquiera de las siguientes formas:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n > 0$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \geq 0$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n < 0$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \leq 0$$

Donde x es la incógnita y $n \in \mathbb{N} / n \geq 3$

Además: $\{a_0; a_1; a_2; \dots; a_n\} \in \mathbb{R} / a_0 \neq 0$

Solución por el método de los puntos críticos.

Pasos que deben efectuarse:

- Verificar que $a_0 > 0$.
- Todos los términos de la inecuación deben estar en el primer miembro.
- Se factoriza la expresión del primer miembro.
- Cada factor se iguala a cero, obteniendo los puntos de corte, que son los valores que asume la incógnita.
- Se llevan los puntos de corte en forma ordenada a la recta numérica.
- Cada zona determinada por dos puntos de corte consecutivos, se señalan alternadamente de derecha a izquierda con signos $(+)$ $\wedge$ $(-)$. Se inicia siempre con el signo más.
- Si la inecuación es de la forma: $P(x) > 0 \vee P(x) \geq 0$, con el coeficiente principal positivo, el intervalo solución está representado por las zonas $(+)$.
- Si la inecuación es de la forma: $P(x) < 0 \vee P(x) \leq 0$, con el coeficiente principal positivo, el intervalo solución está representado por las zonas $(-)$.

Nota

Este método también es aplicable para inecuaciones de segundo grado.

Por ejemplo, resolver: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$

Resolución:

Factorizando por divisores binomios se obtiene:

$$(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0 \Rightarrow \text{PC} \begin{cases} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Llevando los puntos de corte (PC) a la recta real; tendríamos que el conjunto solución es: $x \in [1; 2] \cup [3; +\infty)$

Inecuación fraccionaria

Es aquella inecuación que se caracteriza, porque la variable está presente en el denominador de cualquier expresión que forma parte de la inecuación:

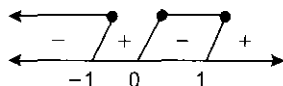
Por ejemplo: resolver: $\frac{x+1}{x-1} \leq \frac{x-1}{x+1}$

Resolución:

Garantizar la definición de las expresiones con: $x \neq \{1; -1\}$

Operaciones: $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \leq 0$

$$\frac{4x}{(x+1)(x-1)} \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-1)x \leq 0$$



CS: $(-\infty; -1] \cup [0; 1)$

Inecuaciones irracionales

Son aquellas inecuaciones cuyas incógnitas se encuentran afectadas por radicales o exponentes fraccionarios. De otro lado como las inecuaciones solo se verifican en el campo de los números reales, se cumple el siguiente principio fundamental.

Principio fundamental

En toda inecuación irracional de índice par, las cantidades subradicales deben ser mayores o iguales a cero y esto nos determina el universo dentro del cual se resuelve la inecuación dada.

Dada la inecuación: ${}^{2n}\sqrt{f(x)} + {}^{2n-1}\sqrt{g(x)} < 0$; $n \in \mathbb{Z}^+$

La inecuación se resuelve para valores que estén comprendidas dentro de las soluciones de: $f(x) \geq 0$.

Existen diversos casos de inecuaciones irracionales presentaremos algunos de ellos y su forma de resolverlos.

Ejemplos

1. Resolver: $\sqrt{x-3} + \sqrt{8-x} > 0$

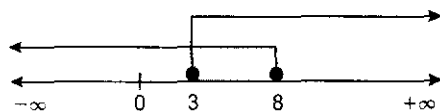
Resolución:

El conjunto solución a esta inecuación está determinado por la intersección de los universos de cada radical, es decir:

$$U_1: x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

$$U_2: 8-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 8$$

$\Rightarrow$ CS: $U_1 \cap U_2$



$\therefore x \in [3; 8]$

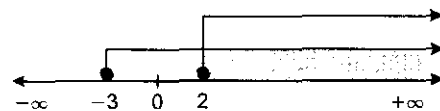
2. Resolver: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} \leq 5$

Resolución:

Determinación del universo:

$$x+3 \geq 0 \wedge x-2 \geq 0$$

$$x \geq -3 \wedge x \geq 2$$



Universo: $x \in [2; +\infty)$

Pasando un radical al segundo miembro.

$$\sqrt{x+3} \leq 5 - \sqrt{x-2}$$

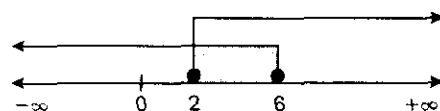
Elevando al cuadrado los dos miembros de la inecuación:

$$x+3 \leq 25 - 10\sqrt{x-2} + x-2$$

$$10\sqrt{x-2} \leq 20 \Rightarrow \sqrt{x-2} \leq 2$$

Elevando al cuadrado: $x-2 \leq 4 \Rightarrow x \leq 6$

Interceptando con el universo:



$\therefore x \in [2; 6]$

Nota

Algunas inecuaciones irracionales de índice par se transforman en sistemas, como las que mostramos a continuación:

a) Si: ${}^{2n}\sqrt{f(x)} < {}^{2n}\sqrt{g(x)}$, entonces:

$$f(x) \geq 0 \wedge f(x) < g(x)$$

b) Si: ${}^{2n}\sqrt{f(x)} \leq {}^{2n}\sqrt{g(x)}$, entonces:

$$f(x) \geq 0 \wedge f(x) \leq g(x)$$

c) Si: ${}^{2n}\sqrt{f(x)} > {}^{2n}\sqrt{g(x)}$, entonces:

$$g(x) \geq 0 \wedge f(x) > g(x)$$

d) Si: ${}^{2n}\sqrt{f(x)} \geq {}^{2n}\sqrt{g(x)}$, entonces:

$$f(x) \geq 0 \wedge f(x) \geq g(x)$$

Por ejemplo: resolver $\sqrt{16 - \frac{1}{x^2}} \geq \sqrt{16 - x}$

Resolución:

Para este caso, se cumple:

$$16 - x \geq 0 \quad \dots(1)$$

$$16 - \frac{1}{x^2} \geq 16 - x \quad \dots(2)$$

$$\text{De (1): } 16 - x \geq 0 \rightarrow x \leq 16$$

$$x \in (-\infty; 16] \quad \dots(\alpha)$$

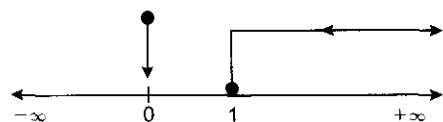
$$\text{De (2): } 16 - \frac{1}{x^2} \geq 16 - x$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2} \geq 0$$

Factorizando el numerador:

$$\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} \geq 0 \Rightarrow \text{PC} \begin{cases} \text{N: } x = 1 \\ \text{D: } x = 0 \end{cases}$$

Graficando en la recta real:



$$x \in [1; +\infty) \quad \dots(\beta)$$

 Interceptando (α) y (β) obtenemos la solución final.


$$x \in [1; 16]$$

◀ GRAFICA DE DESIGUALDADES CON DOS VARIABLES

Sabemos que la ecuación general de una recta es $ax + by + c = 0$, la cual es una ecuación algebraica con 2 variables. La solución de esta ecuación está dada por el conjunto de pares ordenados $(x; y)$ que satisfacen la ecuación dada.

Geométricamente la gráfica de estos pares ordenados es un conjunto de puntos a la cual se le conoce como línea recta.

- Si $c = 0$, se dice que la recta $ax + by = 0$ pasa por el origen de coordenadas.

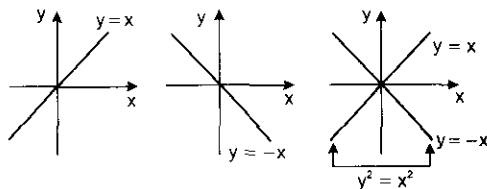
- Si $c \neq 0$, la recta $ax + by + c = 0$ no pasa por el origen de coordenadas.

Los conjuntos solución de ambas ecuaciones son de la forma:

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = 0\} \text{ para el primer caso, y}$$

$$\{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c = 0\} \text{ para el segundo caso.}$$

- Algunas rectas cuyas gráficas debemos tener presente son:



Inecuaciones lineales en dos variables

También llamadas inecuaciones con línea recta, son expresiones de la forma:

$$ax + by + c < 0 \quad \vee \quad ax + by + c \leq 0$$

$$ax + by + c > 0 \quad \vee \quad ax + by + c \geq 0$$

El conjunto solución de alguna de estas inecuaciones lineales está dada por el conjunto de pares ordenados $(x; y)$, tal que se satisface la condición de la inecuación elegida.

¿Cómo se determina este conjunto solución?

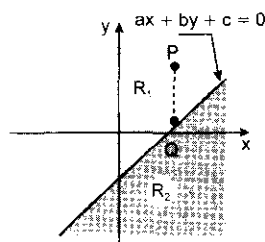
Demostración:

- Partimos de la ecuación:

$$ax + by + c = 0; b > 0$$

Geométricamente la gráfica de esta ecuación, que se llama recta, divide al plano $\mathbb{R}^2$ en dos regiones R_1 y R_2 , tal como aparece en el gráfico adjunto.

- ¿Cuándo decimos que un punto $P(x; y)$ pertenece a la región R_1 o a la región R_2 ?



Sea Q un punto perteneciente a la recta, de modo que tenga la misma abscisa x que P , luego Q es de la forma:

$$Q\left(x; \frac{-ax - c}{b}\right)$$

Como P y Q están sobre la misma recta vertical, tenemos:

- Si P está por encima de Q , entonces la ordenada de P es mayor que la de Q .

$$\text{Es decir: } y > \frac{-ax - c}{b} \Rightarrow by > -ax - c$$

$$\Rightarrow ax + by + c > 0 \quad (\text{ya que } b > 0)$$

En cuyo caso $P(x; y)$ pertenece a la región R_1 y satisface la inecuación: $ax + by + c > 0$

- Si P está por debajo de Q , entonces tal ordenada de P es menor que la de Q , es decir:

$$y < \frac{-ax - c}{b} \Rightarrow by < -ax - c$$

$$\Rightarrow ax + by + c < 0 \quad (\text{ya que } b < 0)$$

En cuyo caso $P(x; y)$ pertenece a la región R_2 y satisface la inecuación: $ax + by + c < 0$

Nota

Si la inecuación es del tipo $ax + by + c < 0$ o $ax + by + c > 0$, la región del plano encontrada, no incluye los puntos de la recta $ax + by + c = 0$.

Mientras que si la inecuación es del tipo $ax + by + c \leq 0$ o $ax + by + c \geq 0$, la región del plano encontrada, incluye los puntos de la recta $ax + by + c = 0$.

Regla práctica para encontrar las regiones R_1 o R_2 . Se presentan dos casos:

- Si la recta $ax + by + c = 0$ no pasa por el origen. Tomar el origen $(0; 0)$ y reemplazarlo en la inecuación dada, se tiene:
 - i) Si resulta verdadera (V) se sombrea el semiplano donde está el origen.
 - ii) Si resulta falsa (F) se sombrea el semiplano donde no está el origen.
- Si la recta $ax + by + c = 0$ pasa por el origen (es decir, la recta es de la forma $ax + by = 0$). Tomar un punto cualquiera, menos el origen, y reemplazarlo en la inecuación dada. Se repite el proceso anterior.

Ejemplos:

1. Graficar: $3x - 4y > 12$

Resolución:

Graficando la recta: $3x - 4y = 12$

Tabulando unos cuantos valores.

x	y
0	-3 $\Rightarrow (0; -3)$
4	0 $\Rightarrow (4; 0)$

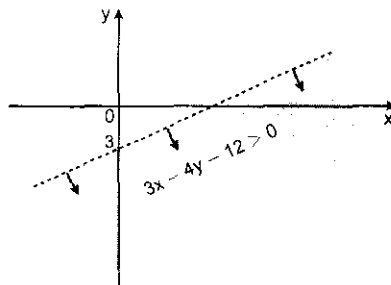
Este par de puntos se unen con una línea punteada, ya que la inecuación es del tipo $>$ (mayor que).

Como la recta no pasa por el origen, reemplazamos el origen $(0; 0)$ en la inecuación dada, resulta:

$$3(0) - 4(0) = 0 > 12 \quad (\text{F})$$

A continuación sombreamos el semiplano donde no está el origen, quedando tal como se muestra en el gráfico adjunto.

A tal semiplano, se le llama semiplano abierto y a la línea L que la limita se le llama línea de contorno o frontera.

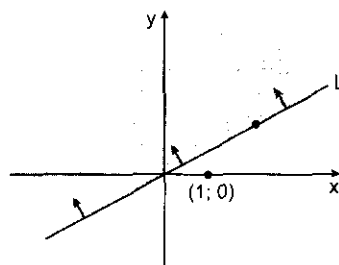


2. Graficar: $3x - 4y \leq 0$

Resolución:

Graficando la recta: $3x - 4y = 0$

x	y
0	0 $\Rightarrow (0; 0)$
4	3 $\Rightarrow (4; 3)$



Como la inecuación es del tipo $\leq$ (menor o igual que) este par de puntos se unen con línea cerrada. Como la recta pasa por el origen, tomamos un punto cualquiera, por ejemplo $(1; 0)$ y reemplazamos en la inecuación dada, resulta:

$$3(1) - 4(0) = 3 \leq 0 \quad (\text{F})$$

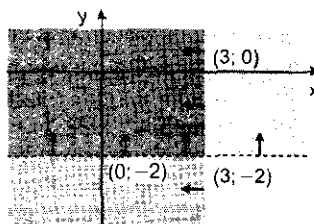
A continuación sombreamos el semiplano donde no está el punto $(1; 0)$.

A este semiplano se le llama semiplano cerrado.

3. Determinar la región definida por las inecuaciones $x \leq 3 \wedge y > -2$.

Resolución:

Graficamos la recta vertical $x = 3$ y la recta horizontal $y = -2$.



Siguiendo el proceso anterior, se tiene que la región es la que tiene doble sombreado.

4. Esbozar el gráfico de la región determinada por S, tal que:

$$S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 3y - 12 > 0 \wedge -x + 2y \leq 3\}$$

Resolución:

Tabulamos y graficamos.

Para $2x + 3y - 12 = 0$

Para $-x + 2y = 3$

x	y
0	4
6	0

x	y
0	3/2
-3	0

Para (0; 0):

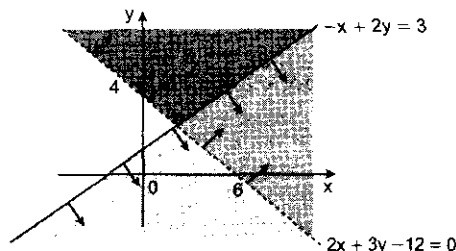
$$2(0) + 3(0) - 12 > 0$$

$$-0 + 2(0) \leq 3$$

$$\Rightarrow -12 > 0 \text{ (F)}$$

$$0 \leq 3 \text{ (V)}$$

Sombreado, tenemos.



∴ La región pedida es la que tiene doble sombreado.

5. Graficar $A/A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / 3 < |y| \leq 5\}$

Resolución:

Tenemos: $3 < |y| \leq 5$

$$|y| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq y \leq 5 \Rightarrow y \in [-5; 5]$$

$$\wedge |y| > 3 \Rightarrow y > 3 \vee y < -3$$

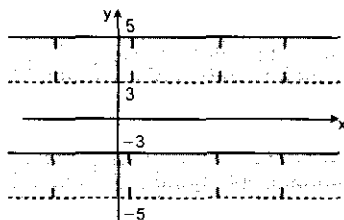
$$\Rightarrow y \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$$

Intersectando ambas soluciones tenemos:

$$y \in [-5; 5] \cap ((-\infty; -3) \cup (3; +\infty))$$

$$y \in [-5; 3) \cup (3; 5]$$

Graficando:



Inecuaciones de segundo grado con dos variables

Haremos el estudio para el caso de la circunferencia, parábola y elipse.

- a. Para la circunferencia. Toda ecuación de segundo grado en x e y de la forma:

$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, representará una circunferencia.

El centro y el radio de la circunferencia se encuentran mediante el método de completar cuadrados en x e y, resultando:

$$\text{Centro: } C = \left(-\frac{D}{2}; -\frac{E}{2}\right).$$

$$\text{Radio: } r = \frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}, \text{ donde: } D^2 + E^2 - 4F > 0$$

Ejemplos:

1. Graficar la región: $x^2 + y^2 \leq 9$

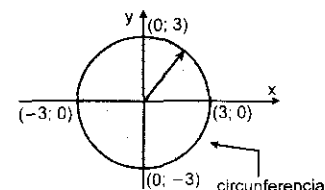
Resolución:

Graficamos la circunferencia: $x^2 + y^2 = 9$

Su centro está situado en (0; 0) y su radio es $r = \sqrt{9} = 3$.

Eligiendo (0; 0) y reemplazando en la inecuación $x^2 + y^2 \leq 9$, nos queda:

$$0^2 + 0^2 \leq 9 \Rightarrow 0 \leq 9 \text{ (V)}$$



Sombreamos la región que contiene al origen (0; 0), es decir, la parte interna de la circunferencia.

2. Graficar la región determinada por R, tal que: $R = \{(x; y) / x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 > 0\}$

Resolución:

Para encontrar el centro C y el radio r, completamos cuadrados en x e y:

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 9 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) - 25 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 25$$

El centro es $C = (3; -5)$ y el radio es $r = \sqrt{25} = 5$

Nota

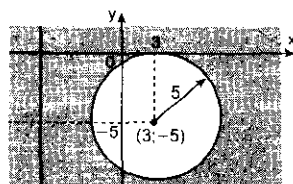
Compruebe lo anterior aplicando las fórmulas para el centro y el radio, donde:

$$D = -6; E = 10; F = 9$$

Eligiendo (0; 0) y reemplazando en la inecuación dada, resulta:

$$0^2 + 0^2 - 6 \times 0 + 10 \times 0 + 9 > 0 \text{ (V)}$$

Sombreamos la región que contiene al origen, es decir, la parte exterior de la circunferencia.



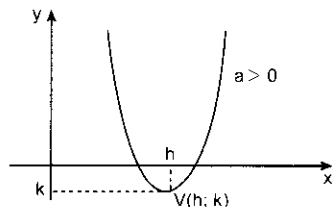
- b. **Para la parábola.** Todo trinomio de segundo grado en x o en y (pero no en ambos) de una de las formas: $y = ax^2 + bx + c$ $\vee$ $x = ay^2 + by + c$, representará una parábola.

Usando el método de completar cuadrados, los trinomios cuadrados anteriores se llevan a la forma:

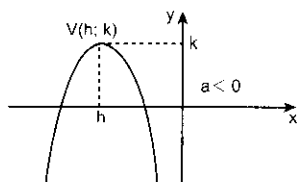
- **Para el primer caso:** $y - k = a(x - h)^2$, en donde el punto $V(h; k)$ recibe el nombre de vértice de la parábola; en donde $h = -b/2a$. Haciendo $x = h$ y reemplazando en $y = ax^2 + bx + c$, se calcula el valor de k .

✓ Propiedades

Si $a > 0$, la parábola $y = ax^2 + bx + c$, se abre hacia arriba, en cuyo caso se dice que el vértice $V(h; k)$ es el punto mas bajo de la parábola. Es decir, decimos que para $x = h$, el valor mínimo de $y = ax^2 + bx + c$, (se obtiene reemplazando $x = h$) es $y = k$.



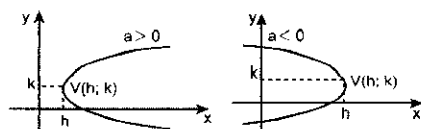
Si $a < 0$, la parábola $y = ax^2 + bx + c$, se abre hacia abajo, en cuyo caso el vértice $V(h; k)$ es el punto mas alto. Decimos que para $x = h$, el valor máximo de y es $y = k$.



- **Para el segundo caso:** $x - h = a(y - k)^2$, en donde el vértice es $V(h; k)$; $k = -b/2c$. Haciendo $y = k$, y reemplazando en: $x = ay^2 + by + c$, se calcula un valor de h .

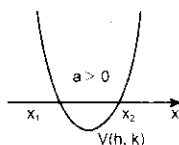
✓ Propiedades

Si $a > 0$, la parábola se abre hacia la derecha; mientras que si $a < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda.



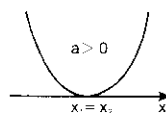
Casos particulares:

- I. La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, para $a > 0$, es una parábola que se abre hacia arriba; luego tenemos uno de los siguientes casos:



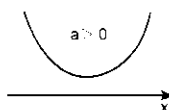
Se tienen dos raíces reales

$$x_1, x_2 \\ \Delta = b^2 - 4ac > 0$$



Hay dos raíces reales iguales

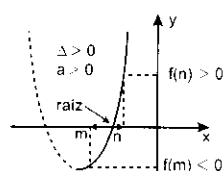
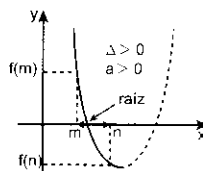
$$x_1 = x_2 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0$$



No hay raíces reales
(Hay dos raíces complejas)
 $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

- II. Otros casos son:

- a. Si $y = f(x) = ax^2 + bx + c$; $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces decimos que una de las raíces reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, está en el intervalo $\langle m; n \rangle$ si ocurre uno de los dos casos siguientes:



Tenemos que $f(m)f(n) < 0$ Tenemos que $f(m)f(n) < 0$

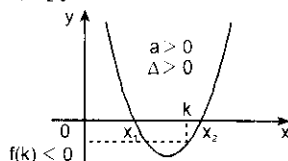
Conclusión. Para que la ecuación:

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$) tenga una raíz real en el intervalo $\langle m; n \rangle$ debe ocurrir dos casos:

- Que el discriminante sea mayor que cero:
 $\Delta = b^2 - 4ac > 0$; y
- Que $f(m)f(n) < 0$, donde $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- b. Sea $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$). ¿Qué condiciones deben cumplirse para que las raíces reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, estén una a la izquierda y la otra a la derecha del número k ?

Para esto efectuamos un gráfico; mostrando las raíces x_1, x_2 y el número x .



Conclusión. Para que la siguiente ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, ($a > 0$) tenga una raíz a la izquierda y la otra a la derecha del número k , debe ocurrir que:

- $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

- $f(k) < 0$, donde $f(x) = ax^2 + bx + c$

c. Decimos que: $ax^2 + bx + c > k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si se cumplen dos condiciones:

- $a > 0$

- $\Delta = b^2 - 4a(c - k) < 0$; donde $k \in \mathbb{R}$.

d. En forma análoga: $ax^2 + bx + c < k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si se cumple que $a < 0 \wedge \Delta = b^2 - 4a(c - k) < 0$; donde $k \in \mathbb{R}$.

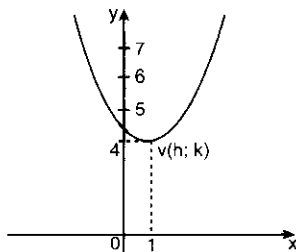
Ejemplo:

¿Para qué valor de $x + c$, ocurre que la mínima "y" de la parábola $y = x^2 - 2x + c$, vale 4?

Resolución:

Tenemos que $a = 1 > 0$, luego la parábola se abre hacia arriba.

El vértice $V(h; k)$ será el punto más bajo; de donde pasa $x = h$, el valor mínimo de $y = k$.



Pero por dato: $x = 4$; es decir $y = 4$

Por otro lado, para $y = x^2 - 2x + c$, se tiene que: $x = h = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

Luego reemplazamos $x = 1$, en $y = x^2 - 2x + c$; con lo cual: $4 = 1 - 2 + c \Rightarrow c = 5$

Finalmente se tiene: $x + c = 6$

◀ VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto de un número real x , es el número no negativo denotado por $|x|$ y definido por:

$$|x| = \begin{cases} x; & \text{si } x > 0 \\ 0; & \text{si } x = 0 \\ -x; & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Ejemplos:

- $|5| = 5$
- $|-5| = -(-5) = 5$
- $|0| = 0$
- $|-2| = 2$
- $|-3| = 3$
- $|3 - 3| = 3 - 3$

De los ejemplos podemos observar que:

- $\forall x \in \mathbb{R}; |x| \geq 0$
- $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$
- $|x| = |-x|$

✓ Propiedades

$\forall x, y \in \mathbb{R}$; se cumple:

- $|-x| = |x|$
- $|xy| = |x||y|$
- $|x|^2 = x^2 \vee |x^2| = x^2$
- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$
- $|x - y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \leq 0$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}; y \neq 0$
- $|x| + |y| \geq 2\sqrt{|x||y|}$

◀ ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

En resolución de ecuaciones con valor absoluto, debemos tener en cuenta lo siguiente:

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces $|x|$ es el número real no negativo definido por:

$$|x| = \begin{cases} x; & \text{si } x \geq 0 \\ -x; & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $|x| = |b| \Leftrightarrow x = b \vee x = -b$
- $|x| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge [x = b \vee x = -b]$

Ejemplos

1. Hallar el conjunto solución en la ecuación:

$$|x + 2|(x^4 - 1) = 0$$

Resolución:

Factorizando, se tendría: $|x + 2|(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1) = 0$
Igualando cada factor a cero.

- $|x + 2| = 0 \Rightarrow x = -2$
- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = i \vee x = -i$
- $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$
- $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

Como $x \in \mathbb{R}$; i y $-i$ no son parte de la solución.

$$\therefore \text{CS} = \{-2; 1; -1\}$$

Nota

$$-i = \sqrt{-1}; \text{ tal que } i^2 = -1$$

2. Resolver: $|x^2 - x - 3| = |x - 3|$

Resolución:

Para este caso se cumple la propiedad:

$$|x| = |b| \Leftrightarrow x = b \vee x = -b$$

Para nuestro caso:

$$x^2 - x - 3 = x - 3 \quad \dots(\alpha)$$

$$x^2 - x - 3 = -(x - 3) \quad \dots(\beta)$$

$$\text{De } (\alpha): x^2 - x - 3 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = 2$$

$$\begin{aligned} \text{De } (\beta): x^2 - x - 3 &= -x + 3 \Rightarrow x^2 = 6 \\ \Rightarrow x &= \sqrt{6} \vee x = -\sqrt{6} \\ \therefore \text{CS} &= (0; 2; \sqrt{6}; -\sqrt{6}) \end{aligned}$$

3. Hallar el conjunto solución en la ecuación:
 $|2x - 1| = x + 2$

Resolución:

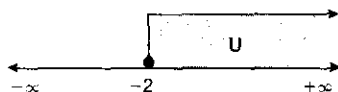
Para este caso se cumple la propiedad:

$$|x| = b \Leftrightarrow b \geq 0 \wedge \{x = b \vee x = -b\}$$

Para nuestro caso:

Universo de solución:

$$x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$$



$$x \in [-2; \infty)$$

Con lo cual:

$$2x - 1 = x + 2 \vee 2x - 1 = -x - 2$$

$$x = 3 \in U \vee x = -\frac{1}{3} \in U$$

$$\therefore \text{CS} = \left\{-\frac{1}{3}; 3\right\}$$

4. Resolver: $||x - 3| - 2| = 3$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } |x - 3| = a \quad \dots(\alpha)$$

Donde $a > 0$; se tendría: $|a - 2| = 3$

$$\Rightarrow a - 2 = 3 \vee a - 2 = -3$$

$$\Rightarrow a = 5 \vee a = -1 \text{ (No)}$$

$$\text{En } (\alpha), \text{ dado que } a > 0 \Rightarrow |x - 3| = 5$$

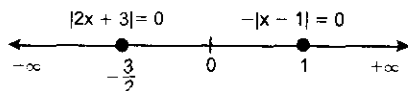
$$\Rightarrow x - 3 = 5 \vee x - 3 = -5$$

$$\Rightarrow x = 8 \vee x = -2 \quad \therefore \text{CS} = \{-2; 8\}$$

5. Resolver: $-|x - 1| + |2x + 3| = 5$

Resolución:

Igualando cada valor absoluto a cero determinamos los puntos de corte en la recta real:



Respecto a los signos de los valores absolutos en cada intervalo se tendría:

$$\bullet \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right): (-) \quad (-)$$

$$\bullet \left(-\frac{3}{2}; 1\right): (+) \quad (-)$$

$$\bullet (1; \infty): (+) \quad (+)$$

Analizando en cada intervalo:

$$\begin{aligned} \bullet x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right): & \quad -|2x + 3| + |x - 1| = 5 \\ & \quad -2x - 3 + x - 1 = 5 \\ & \quad x = -9 \end{aligned}$$

$$\text{Como: } -9 \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow x = -9; \text{ es solución.}$$

$$\begin{aligned} \bullet x \in \left(-\frac{3}{2}; 1\right): & \quad |2x + 3| + |x - 1| = 5 \\ & \quad 2x + 3 + x - 1 = 5 \\ & \quad 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Como: } 1 \in \left(-\frac{3}{2}; 1\right) \Rightarrow x = 1; \text{ es solución.}$$

$$\begin{aligned} \bullet x \in (1; +\infty): & \quad |2x + 3| - |x - 1| = 5 \\ & \quad 2x + 3 - x + 1 = 5 \Rightarrow x = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Como: } 1 \in (1; +\infty) \Rightarrow x = 1, \text{ no es solución.}$$

$$\therefore \text{CS} = \{-9; 1\}$$

6. Resolver: $|3x + 1| - |x - 1| = 12$, e indicar la suma de los cuadrados de las raíces de la ecuación dada.

Resolución:

$$|3x + 1| - |x - 1| = 12$$

$$\Rightarrow \left(x < -\frac{1}{3} \wedge -3x - 1 + x - 1 = 12\right)$$

$$\vee \left(-\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge 3x + 1 + x - 1 = 12\right)$$

$$\vee (x > 1 \wedge 3x + 1 - x + 1 = 12)$$

$$\Rightarrow \left(x < -\frac{1}{3} \wedge x = -7\right) \vee \left(-\frac{1}{3} \leq x \leq 1 \wedge x = 3\right)$$

$$\vee (x > 1 \wedge x = 5)$$

$$\Rightarrow (x = -7) \vee (x \in \emptyset) \vee (x = 5)$$

$$\Rightarrow x_1 = -7 \vee x_2 = 5 \quad \therefore x_1^2 + x_2^2 = 74$$

◀ INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Las inecuaciones con valor absoluto se resuelven teniendo en cuenta las siguientes propiedades:

$\forall x; a \in \mathbb{R}$; se cumple:

I.	$ x < a \Leftrightarrow (x + a)(x - a) < 0$ $ x \leq a \Leftrightarrow (x + a)(x - a) \leq 0$
II.	$ x > a \Leftrightarrow (x + a)(x - a) > 0$ $ x \geq a \Leftrightarrow (x + a)(x - a) \geq 0$
III.	$ x < a \Leftrightarrow a > 0 \wedge [-a < x < a]$ $ x \leq a \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge [-a \leq x \leq a]$
IV.	$ x > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a$ $ x \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$

Ejemplos:

1. Resolver: $|3x - 2| < |2x - 1|$

Resolución:

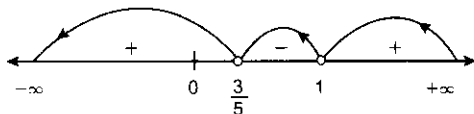
$$\text{Dado que: } |a| < |b| \Leftrightarrow (a + b)(a - b) < 0$$

Para la inecuación dada, se tendría:

$$(3x - 2 + 2x - 1)(3x - 2 - 2x + 1) < 0$$

$$(5x - 3)(x - 1) < 0 \Rightarrow \text{PC: } x = \frac{3}{5} \vee x = 1$$

De la recta real:



∴ Vemos que: $x \in \left(\frac{3}{5}; 1\right)$

2. Resolver: $|x^2 - x| > x - 1$

Resolución:

Desde que: $|a| > b \Leftrightarrow a < -b \vee a > b$

La inecuación dada se transforma en:

$$x^2 - x < -(x - 1) \vee x^2 - x > x - 1$$

Resolviendo cada una de las inecuaciones:

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 - x < -x + 1 &\Rightarrow x^2 - 1 < 0 \\ (x + 1)(x - 1) < 0 &\Rightarrow \text{PC: } x = -1 \vee x = 1 \end{aligned}$$

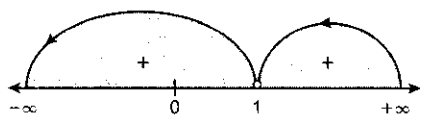
En la recta real:



Vemos que: $x \in (-1; 1)$... (α)

$$\begin{aligned} \bullet \quad x^2 - x > x - 1 \\ (x - 1)^2 > 0 &\Rightarrow \text{PC: } x = 1 \wedge x = 1 \end{aligned}$$

En la recta real:



Vemos que $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$... (β)

Dado que la solución es (α) ∪ (β):

$$\therefore x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty) \vee x \in \mathbb{R} - \{1\}$$

3. Resolver: $|3x - 2| < 5$

Resolución:

De acuerdo a las propiedades establecidas como:

$$5 > 0; \text{ entonces: } -5 < 3x - 2 < 5$$

Sumando 2 a todos los miembros:

$$-5 + 2 < 3x - 2 + 2 < 5 + 2$$

$$-3 < 3x < 7$$

$$\text{Dividiendo entre 3: } -1 < x < \frac{7}{3}$$

$$\therefore x \in \left(-1; \frac{7}{3}\right)$$

4. Resolver: $|2x + 5| \geq |5x - 2|$

Resolución:

$$\text{Como: } |a| \geq |b| \Rightarrow (a+b)(a-b) \geq 0$$

En la inecuación dada se tendría:

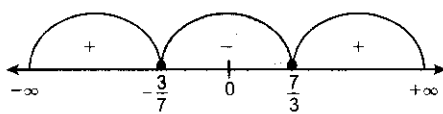
$$(2x + 5 + 5x - 2)(2x + 5 - 5x + 2) \geq 0$$

$$(7x + 3)(-3x + 7) \geq 0$$

Cambiando el signo de x

$$(7x + 3)(3x - 7) \leq 0 \Rightarrow \text{PC: } x = -\frac{3}{7} \vee x = \frac{7}{3}$$

En la recta:

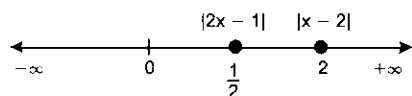


∴ Vemos que: $x \in \left[-\frac{3}{7}; \frac{7}{3}\right]$

5. Resolver: $|x - 2| - |2x - 1| \leq 2$

Resolución:

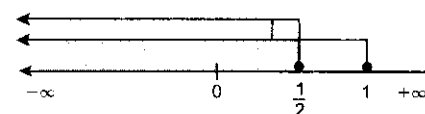
Igualando cada valor absoluto a cero para determinar los puntos de corte en la recta real; vemos que:



La inecuación a analizar es: $-|2x - 1| + |x - 2| \leq 2$

- Para el intervalo $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$; los signos de los valores absolutos son $(-; -)$ de donde:

$$2x - 1 - x + 2 \leq 2 \Rightarrow x \leq 1$$

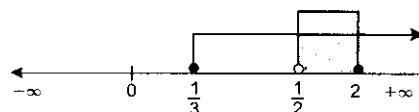


$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right] \quad \dots (\alpha)$$

- Para el intervalo $\left(\frac{1}{2}; 2\right]$; los signos de los valores absolutos son $(+; -)$ de donde:

$$-2x + 1 - x + 2 \leq 2 \Rightarrow -3x \leq -1$$

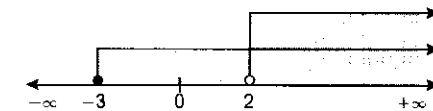
$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$$



$$x \in \left[\frac{1}{3}; 2\right] \quad \dots (\beta)$$

- Para el intervalo $(2; +\infty)$; los signos de los valores absolutos son $(+; +)$ de donde:

$$-2x + 1 + x - 2 \leq 2 \Rightarrow -x \leq 3 \Rightarrow x \geq -3$$



$$x \in [2; +\infty) \quad \dots (\theta)$$

La solución de la inecuación propuesta estará dada por $(\alpha) \cup (\beta) \cup (\theta)$

$$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right] \cup [2; +\infty) = (-\infty; +\infty)$$

$$\therefore x \in \mathbb{R}$$

6. Resolver:
- $|x| + |x - 1| < 5$

Resolución:

$$|x| + |x - 1| < 5$$

$$\text{Como: } |x + x - 1| \leq |x| + |x - 1|$$

$$\Rightarrow |2x - 1| < 5 \Rightarrow -5 < 2x - 1 < 5$$

$$\Rightarrow -4 < 2x < 6 \Rightarrow -2 < x < 3$$

$$\therefore \text{CS} = (-2; 3)$$

7. Sea:
- $A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{4(3x-1)}{9} - \frac{2-3x}{6} \leq x \right\}$

determinar el cardinal de A.

Resolución:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{N} / \frac{4(3x-1)}{9} - \frac{2-3x}{6} \leq x \right\}$$

$$\text{Por 18: } 8(3x-1) - 3(2-3x) \leq 18x$$

$$\Rightarrow 24x - 8 - 6 + 9x \leq 18x \Rightarrow 15x \leq 14$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{14}{15}; \text{ como } x \in \mathbb{N}, \text{ se tiene que: } A = \{ \} = \emptyset$$

$$\therefore n(A) = 0$$

8. Dados los conjuntos:

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-1}{2} \in ((-2; 3] - \{1\}) \right\}$$

$$Q = \{ x \in \mathbb{R} / (2x+1) \in ((-\infty; 9] \cap [-3; 9]) \}$$

determinar la suma de los elementos del conjunto $(P \setminus Q) \cap \mathbb{Z}$, ($\mathbb{Z}$: conjunto de números enteros).**Resolución:**

$$P = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{x-1}{2} \in ((-2; 3] - \{1\}) \right\}$$

$$\Rightarrow -2 < \frac{x-1}{2} \leq 3 \wedge \frac{x-1}{2} \neq 1$$

$$\Rightarrow -3 < x \leq 7 \wedge x \neq 3 \Rightarrow P = (-3; 7] - \{3\}$$

$$Q = \{ x \in \mathbb{R} / (2x+1) \in (-\infty; 9] \cap [-3; 9] \}$$

$$Q = \{ x \in \mathbb{R} / (2x+1) \in [-3; 9] \}$$

$$\Rightarrow -3 \leq 2x+1 < 9 \Rightarrow -2 \leq x < 4$$

$$\Rightarrow Q = [-2; 4)$$

$$\text{Luego: } P \setminus Q = ((-3; 7] - \{3\}) \setminus [-2; 4)$$

$$\Rightarrow P \setminus Q = (-3; -2) \cup [4; 7]$$

$$(P \setminus Q) \cap \mathbb{Z} = \{4; 5; 6; 7\}$$

$$\therefore \text{La suma de ellos es 22.}$$

9. Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$(x-1)^2 - 1 > (x-2)^2$$

Resolución:

$$(x-1)^2 - 1 > (x-2)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 > x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow 2x > 4 \Rightarrow x > 2$$

$$\therefore \text{CS} = (2; +\infty)$$

10. Resolver:
- $\sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} > -3$

Resolución:

Calculando los universos relativos:

$$U_1: x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3; +\infty)$$

$$U_2: 4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow x \in (-\infty; 4]$$

Intersecando se tiene:

$$U = [-3; +\infty) \cap (-\infty; 4] = [-3; 4]$$

Como la suma de 2 positivos es siempre mayor que un negativo.

$$\Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{4-x} > -3, \text{ es válido.}$$

$$\forall x \in [-3; 4]$$

11. Indicar cuál es el conjunto solución de x, luego de resolver la inecuación:
- $\sqrt{x+3} < 3 - \sqrt{x}$

Resolución:

Analizando se tiene que:

$$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \wedge x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Interceptando se tiene:

$$x \in [0; +\infty) \quad \dots(\alpha)$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } (\sqrt{x+3} + \sqrt{x})^2 < 3^2$$

$$x+3+2\sqrt{x^2+3x}+x < 9$$

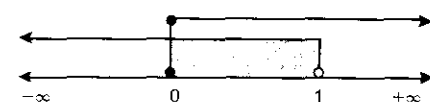
$$2x+3+2\sqrt{x^2+3x} < 9 \Rightarrow 2x+2\sqrt{x^2+3x} < 6$$

$$(\div 2) \Rightarrow \sqrt{x^2+3x} < 3-x \Rightarrow 3-x > 0 \Rightarrow x < 3$$

$$\text{Elevando al cuadrado: } x^2+3x < 9-6x+x^2$$

$$9x < 9 \Rightarrow x < 1 \wedge x < 3$$

$$x \in (-\infty; 1) \quad \dots(\beta)$$

Intersecando (α) y (β) 

$$\therefore \text{CS} = x \in [0; 1)$$

12. Determinar la solución de la inecuación:

$$\sqrt{x^2-14x+13} < x+1$$

Resolución:

Aplicando la propiedad:

$$\sqrt{a} < b \Leftrightarrow [a \geq 0 \wedge (b > 0 \wedge a < b^2)]$$

Luego, se tiene:

$$x^2-14x+13 \geq 0 \wedge$$

$$\{x+1 > 0 \wedge [x^2-14x+13 < (x+1)^2]\}$$

$$(x-13)(x-1) \geq 0 \wedge$$

$$\{x > -1 \wedge [(x-13)(x-1) < (x+1)^2]\}$$

$$x \in (-\infty; 1] \cup [13; +\infty) \cap \underbrace{x^2-14x+13 < x^2+2x+1}_{x > 3/4}$$

$$x > 3/4$$

$$\text{Luego: } x \in (-\infty; 1] \cup [13; +\infty) \wedge [x > 3/4]$$

$$\Rightarrow x \in (3/4; 1]$$

13. Resolver:
- $\sqrt{\frac{2x-8}{x-1}} + \sqrt{\frac{5-x}{x+3}} \geq 0$

Resolución:

Por propiedad:

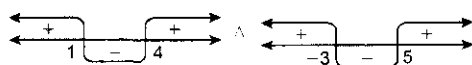
$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0$$

$$\text{Luego: } \frac{2x-8}{x-1} \geq 0 \wedge \frac{5-x}{x+3} \geq 0$$

Resolviendo:

$$(x-4)(x-1) \geq 0 \wedge (5-x)(x+3) \geq 0$$

$$(x-4)(x-1) \geq 0; x \neq 1 \wedge (x-5)(x+3) \leq 0; x \neq -3$$



$$x \in (-\infty; 1) \cup [4; +\infty) \wedge x \in (-3; 5]$$

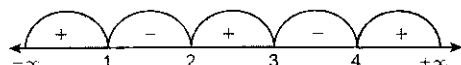
Luego, intersecando se tendrá:

$$\therefore x \in (-3; 1) \cup [4; 5]$$

14. Resolver: $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) \geq 0$

Resolución:

Los puntos críticos son: 1; 2; 3; 4



$$\therefore \text{CS} = (-\infty; 1] \cup [2; 3] \cup [4; +\infty)$$

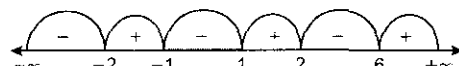
15. Resolver:

$$(x^2-4)(1-x)(x^2+x+1)^{27}(x^2-5x-6) > 0$$

Resolución:

Simplificando $(x^2+x+1)^{27}$, pues x^2+x+1 es positivo, nos queda $(x^2-4)(1-x)(x^2-5x-6) > 0$, pero podemos factorizar y nos queda:

$$(x+2)(x-2)(x-1)(x-6)(x+1) < 0$$



$$\therefore \text{CS} = (-\infty; -2) \cup (-1; 1) \cup (2; 6)$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Determinar la suma de elementos del siguiente conjunto:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{|6x-x^2|-4}{4-|x|} = -1 \right\}$$

Resolución:

$$\text{De } A: 4-|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 4$$

$$\text{Luego: } |6x-x^2|-4 = -4+|x|$$

$$\Rightarrow |6x-x^2| = |x|; \text{ de aquí:}$$

$$6x-x^2 = x \vee 6x-x^2 = -x$$

$$x(x-5) = 0 \vee x(x-7) = 0$$

$$(x=0 \vee x=5) \vee (x=0 \vee x=7) \Rightarrow A = \{0; 5; 7\}$$

$$\therefore \Sigma \text{ de elementos de } A: 12$$

2. Dados los siguientes enunciados:

I. $|x^2-3x+1| \leq |2x^2-4x+2| + |-x^2+3x-1|$

II. $\sqrt{4x^2+4x+1} = 0$, tiene 2 soluciones reales.

III. Si $x > 0$, la ecuación $\frac{x^2}{|x|} + \frac{|x|}{x^2} = 1$ no tiene solución real.

Señalar lo correcto.

Resolución:

Observación: $|x^2-3x+1| = |-x^2+3x-1|$

I. $|x^2-3x+1| \leq |2x^2-4x+2| + |x^2-3x+1|$

$$\Rightarrow |2x^2-4x+2| \geq 0$$

$$\text{Esto se verifica } \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{I) es V}$$

II. $\sqrt{4x^2+4x+1} = 0 \Rightarrow 4x^2+4x+1 = 0$

$$\Rightarrow (2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1/2$$

$$\Rightarrow \text{CS} = \{-1/2\} \Rightarrow \text{II) es F}$$

III. Si $x > 0 \Rightarrow \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x^2} = x + \frac{1}{x} = 1$

$$\text{De aquí: } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\text{De donde: } x \notin \mathbb{R} \Rightarrow \text{III) es V}$$

$$\therefore \text{Son correctos I) y III)}$$

3. Si se cumple que:

$$|2x+b| + |y-b| + 3|b-2| = 0$$

$$x, y, b \in \mathbb{R}, \text{ determinar: } T = x + y + 3b$$

Resolución:

$$\text{Como } |a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \text{La única posibilidad para que:}$$

$$2x+b = 0 \wedge y-b = 0 \wedge 3|b-2| = 0$$

$$\text{Es: } \underbrace{0}_{2x+b=0} \quad \underbrace{0}_{y-b=0} \quad \underbrace{0}_{3|b-2|=0}$$

$$\text{Obs. } \bullet 2x+b=0 \Rightarrow x = -b/2$$

$$\bullet y-b=0 \Rightarrow y = b$$

$$\bullet b-2=0 \Rightarrow b = 2$$

$$\text{O sea que: } x = -1; y = 2$$

$$\therefore T = x + y + 3b = 7$$

4. Si A es un conjunto definido por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / ||x-2| + |x+3| - ||x-1| - |x+4|| = 2\sqrt{x-x^2}\} \text{ y se proponen los siguientes enunciados:}$$

I. $n(A) = 3$

II. $\exists x_1, x_2 \in A / x_1 + x_2 = 3/2$

III. $\exists x \in A / x \in (0; 1/2)$

Indicar cuál(es) es (son) correcto(s).

Resolución:

$$\text{De } A: x-x^2 \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \leq 0$$

$$\text{De aquí: } 0 \leq x \leq 1 \text{ condición necesaria}$$

Con esto analizamos el signo de las cantidades dentro de las barras.

$$\bullet -2 \leq x-2 \leq -1 \Rightarrow |x-2| = 2-x$$

$$\bullet 3 \leq x+3 \leq 4 \Rightarrow |x+3| = x+3$$

- $-1 \leq x-1 \leq 0 \Rightarrow |x-1| = 1-x$
- $4 \leq x+4 \leq 5 \Rightarrow |x+4| = x+4$

En la ecuación:

$$|2-x+x+3| - |1-x-x-4| = 2\sqrt{x-x^2}$$

$$5 - |2x-3| = 2\sqrt{x-x^2} \Rightarrow 5 - |2x+3| = 2\sqrt{x-x^2}$$

Como $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 3 \leq 2x+3 \leq 5$

$$\Rightarrow |2x+3| = 2x+3$$

$$\Rightarrow 5 - (2x+3) = 2\sqrt{x-x^2}$$

$$\text{De aquí: } 1-x = \sqrt{x-x^2}$$

$$\text{Elevamos al cuadrado } (1-x)^2 = x(1-x)$$

$$(1-x)^2 - x(1-x) = 0 \Rightarrow (1-x)(1-2x) = 0$$

$$\text{De donde: } x = 1 \vee x = 1/2$$

$$\text{Luego: } A = \{1; 1/2\}$$

Con esto: (I) es F; (II) es V; (III) es F.

$\therefore$ Solo (II) es correcta.

5. Determinar la suma de los valores enteros que satisfacen la inecuación:

$$| |x-2| + 2x | \leq \sqrt{-x}$$

Resolución:

$$\text{De } | |x-2| + 2x | \leq \sqrt{-x} \quad \dots(\alpha)$$

$$\Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \text{ condición necesaria}$$

$$\text{Con esto: } x-2 \leq 2 \Rightarrow |x-2| = 2-x$$

$$\text{En } (\alpha): |2-x+2x| \leq \sqrt{-x}$$

$$\Rightarrow |x+2| \leq \sqrt{-x}$$

$$(x+2)^2 \leq -x \Rightarrow x^2 + 5x + 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq -1$$

Intersecando con la condición necesaria:

$$-4 \leq x \leq -1$$

De aquí, los valores enteros de x son:

$$-4; -3; -2; -1$$

$$\therefore \Sigma \text{ de todos ellos: } -10$$

6. Determinar el conjunto solución de la inecuación:

$$|x^4 - 10| \leq |x^2|^2 + 8x^2$$

Resolución:

$$\text{Sea: } |a|^2 = a^2; \forall a \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x^4 - 10| \leq x^4 + 8x^2$$

Es no (-)

$$\text{De aquí: } -(x^4 + 8x^2) \leq x^4 - 10 \leq x^4 + 8x^2$$

$$\Rightarrow -x^4 - 8x^2 \leq x^4 - 10 \wedge x^4 - 10 \leq x^4 + 8x^2$$

$$x^4 + 4x^2 - 5 \geq 0 \wedge 8x^2 + 10 \geq 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 + 5) \geq 0 \wedge x \in \mathbb{R}$$

Es (+)

$$\Rightarrow (x+1)(x-1) \geq 0 \wedge x \in \mathbb{R}$$

$$(x \leq -1 \vee x \geq 1) \wedge x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Intersecando: } x \leq -1 \vee x \geq 1$$

$$\therefore \text{CS} = \langle -\infty; -1 \rangle \cup [1; +\infty)$$

7. Determinar la suma de los elementos del conjunto:

$$M = \{x \in \mathbb{R} / |x-1|^2 + 3|2x-5| = 3|x-1| +$$

$$|1-x||2x-5|\}$$

Resolución:

$$\text{Observación: } |x-1| = |1-x|$$

De M: Transponiendo términos:

$$|x-1|^2 - 3|x-1| = |x-1||2x-5| - 3|2x-5|$$

$$|x-1|(|x-1|-3) = |2x-5|(|x-1|-3) \quad \dots(\alpha)$$

$$\text{Observación: } |x-1|-3=0 \Rightarrow |x-1|=3$$

$$\text{De aquí: } x-1=3 \vee x-1=-3$$

$$\Rightarrow x=4 \vee x=-2$$

$$\text{De } (\alpha): |x-1| = |2x-5|$$

$$\Rightarrow \underbrace{x-1=2x-5}_{x=4} \vee \underbrace{x-1=-(2x-5)}_{x=2}$$

$$x=4 \quad \vee \quad x=2$$

$$\text{Luego: } M = \{4; -2\}$$

$$\therefore \Sigma \text{ de elementos de } M: 4$$

8. Al resolver la inecuación, el conjunto solución es $A = \langle a; +\infty \rangle$, hallar el valor de "a".

$$\frac{2-|2-x|-x}{|x-x^2|-2} < 0$$

Resolución:

$$\text{De } \frac{2-|2-x|-x}{|x-x^2|-2} < 0 \quad \dots(I)$$

$$\text{Observación: } |x-x^2| = 2$$

$$\text{Resolvamos: } |x-x^2| = 2$$

$$\Rightarrow x-x^2=2 \vee x-x^2=-2$$

$$x^2-x+2=0 \vee x^2-x-2=0$$

$$\nexists x \in \mathbb{R} \quad \vee \quad (x-2)(x+1)=0$$

$$\Rightarrow x=2 \vee x=-1$$

Con esto decimos que: $x \neq 2 \wedge x \neq -1$, y como el CS = $\langle a; +\infty \rangle$ o sea que: $x > a$; quiere decir que $x > 2$ (condición necesaria).

$$\text{De (I): } \frac{2-|2-x|-x}{|x||1-x|-2} < 0$$

De la condición necesaria:

$$\bullet \quad 2-x < 0 \Rightarrow |2-x| = x-2$$

$$\bullet \quad 1-x < -1 \Rightarrow |1-x| = x-1$$

$$\bullet \quad |x| = x$$

$$\Rightarrow \frac{2-(x-2)-x}{x(x-1)-2} < 0 \Rightarrow \frac{2(2-x)}{x^2-x-2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)}{(x-2)(x+1)} > 0 \Rightarrow \frac{1}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

Intersecamos con la condición necesaria $x > 2$.

$$\Rightarrow \text{CS} = \langle 2; +\infty \rangle \quad \therefore \text{Identificando: } a = 2$$

9. Dados los conjuntos:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - |x|\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq |x^2 - |x||\}$$

$$C = \left\{ (x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq \frac{1}{4} \right\}$$

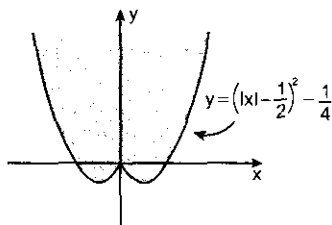
determinar la gráfica de $A \cap B \cap C$.

Resolución:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - |x|\}$$

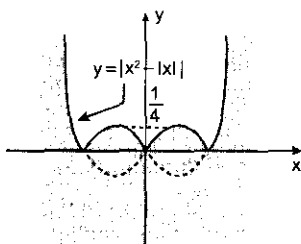
$$y \geq x^2 - |x| + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \Rightarrow y \geq \left(|x| - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

Su gráfica es:



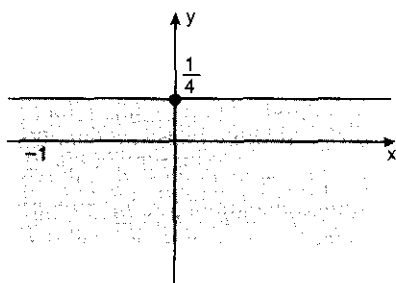
$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq |x^2 - |x||\}$$

Su gráfica es:

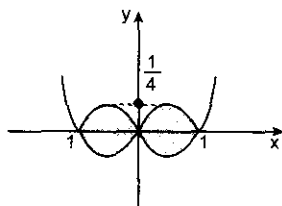


$$C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \leq \frac{1}{4}\}$$

Su gráfica es:



∴ La gráfica de $A \cap B \cap C$ es:



10. Graficar la región definida por el conjunto:

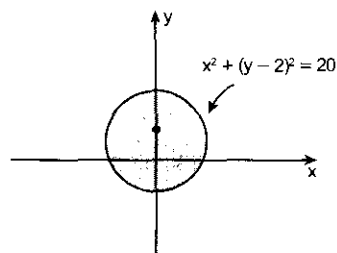
$$M = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / x^2 + y^2 \leq 4y + 16 \wedge x^2 + 2 \leq y\}$$

Resolución:

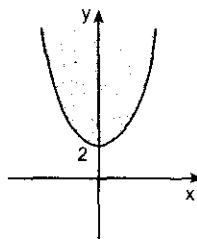
$$M = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4y + 16 \wedge x^2 + 2 \leq y\}$$

$$\bullet x^2 + y^2 \leq 4y + 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y \leq 16$$

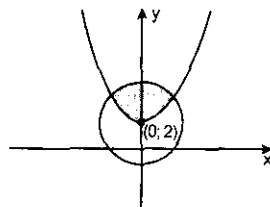
$$\Rightarrow x^2 + (y - 2)^2 \leq 20; \text{ cuya gráfica es:}$$



$$\bullet y \geq x^2 + 2$$



∴ La intersección de ambas es la gráfica de M.



11. Determinar el intervalo al cual pertenece "a", de tal manera que la desigualdad:

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4} < 0,$$

se verifique para todo valor de x.

Resolución:

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4} < 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como } x^2 - 8x + 20 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ax^2 + 2(a+1)x + 9a + 4 < 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Por propiedad: } a < 0 \wedge \Delta < 0$$

$$\Rightarrow a < 0 \wedge 4(a+1)^2 - 4(a)(9a+4) < 0$$

$$\Rightarrow a < 0 \wedge a^2 + 2a + 1 - 9a^2 - 4a < 0$$

$$\Rightarrow a < 0 \wedge 8a^2 + 2a - 1 > 0$$

$$\Rightarrow a < 0 \wedge (4a-1)(2a+1) > 0$$

$$\Rightarrow a < 0 \wedge 2a+1 < 0 \Rightarrow a < 0 \wedge a < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a < -\frac{1}{2} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$$

12. Representar en el plano cartesiano la región:

$$A = \{(x; y) \wedge (x+y)x \leq 0\}$$

Resolución:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / (x+y)x \leq 0\}$$

Usando la propiedad:

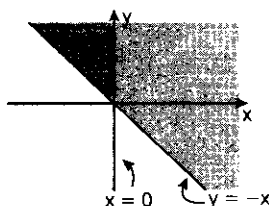
$$ab \leq 0 \Rightarrow (a \geq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \geq 0)$$

Se tiene que: $(x+y)x \leq 0$

$$\Rightarrow \underbrace{(x+y \geq 0 \wedge x \leq 0)}_M \vee \underbrace{(x+y \leq 0 \wedge x \geq 0)}_N$$

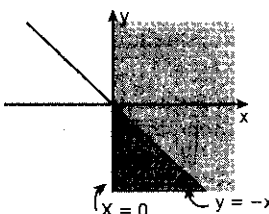
$$\Rightarrow A = M \cup N$$

$$\bullet M: x+y \geq 0 \wedge x \leq 0 \Rightarrow y \geq -x \wedge x \leq 0$$



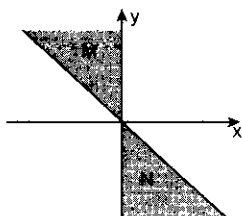
La zona más oscura representa a M.

$$\bullet N: x+y \leq 0 \wedge x \geq 0 \Rightarrow y \leq -x \wedge x \geq 0$$



La zona más oscura representa a N.

$$\therefore A = M \cup N \text{ será:}$$



13. Resolver:

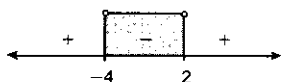
$$\frac{x^2+x+18}{2-x} + x - 1 > 0$$

Resolución:

$$\frac{x^2+x+18}{2-x} + x - 1 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2+x+18+(x-1)(2-x)}{2-x} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x+16}{2-x} > 0 \Rightarrow \frac{x+4}{x-2} < 0$$



$$\Rightarrow x \in (-4; 2)$$

14. Dado los siguientes conjuntos:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{\sqrt{|x|}}{1+|x|} \geq \frac{1}{2} \right\}$$

$$B = \left\{ y \in \mathbb{N} / \frac{|y|}{1+|y|} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

determinar el número de elementos de $A \cap B$.

Resolución:

$$\bullet \text{ De: } A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \frac{\sqrt{|x|}}{1+|x|} \geq \frac{1}{2} \right\}$$

$$\text{Como: } 1+|x| > 0, \forall x \in \mathbb{R} \wedge |x| \geq 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{|x|} \geq 1+|x|$$

$$\Rightarrow |x|+1-2\sqrt{|x|} \leq 0 \Rightarrow (\sqrt{|x|}-1)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{|x|}-1)^2 = 0$$

(pues un cuadrado no puede ser negativo)

$$\Rightarrow \sqrt{|x|} = 1 \Rightarrow x = 1 \vee x = -1$$

(ambos son enteros)

$$\Rightarrow A = \{1; -1\}$$

$$\bullet \text{ De: } B = \left\{ y \in \mathbb{N} / \frac{|y|}{1+|y|} \leq \frac{1}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow 2|y| \leq 1+|y| \Rightarrow |y| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1,$$

$$\text{Como } y \in \mathbb{N} \Rightarrow B = \{1\}$$

$$\therefore A+B = \{1\} \Rightarrow N(A \cap B) = 1$$

15. Si $a+1 < 0$; hallar el conjunto solución de $\sqrt{ax^2+x} < 1-ax$

Resolución:

$$a+1 < 0 \Rightarrow a < -1$$

$$\sqrt{ax^2+x} < 1-ax$$

$$\Rightarrow ax^2+x \geq 0 \wedge 1-ax > 0 \wedge ax^2+x < 1-ax$$

$$\Rightarrow x(-ax-1) \leq 0 \wedge x > -\frac{1}{a} \wedge -ax^2-(a+1)x+1 > 0$$

$$\Rightarrow \left(0 \leq x \leq -\frac{1}{a} \wedge x > -\frac{1}{a} \right) \wedge -ax^2-(a+1)x+1 > 0$$

$$\Rightarrow \left(0 \leq x \leq -\frac{1}{a} \right) \wedge \underbrace{(-ax-1)(x+1)}_{\geq 0} + \underbrace{2}_{+} > 0$$

La segunda desigualdad se satisface para todos los x de $\left[0; -\frac{1}{a} \right]$

$$\therefore \text{CS} = \left[0; -\frac{1}{a} \right]$$

16. Determinar a qué intervalo deberá pertenecer m , para que la gráfica de $f(x) = \frac{3x-8}{x^2-x+1} + m + 4$ se encuentre siempre sobre el eje x , para todo valor real de x .

Resolución:

La gráfica de f debe estar siempre por encima del eje x , es decir: $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{3x-8}{x^2-x+1} + m + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \frac{(m+4)x^2-(m+1)x+m-4}{x^2-x+1} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como: } x^2-x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow (m+4)x^2-(m+1)x+m-4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow m+4 > 0 \wedge \Delta < 0$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow m + 4 > 0 \wedge (m + 1)^2 - 4(m + 4)(m - 4) < 0 \\
 &\Rightarrow m > -4 \wedge 3m^2 - 2m - 65 > 0 \\
 &\Rightarrow m > -4 \wedge (3m + 13)(m - 5) > 0 \\
 &\Rightarrow m > -4 \wedge \left(m < -\frac{13}{3} \vee m > 5\right) \\
 &\therefore m > 5 \Rightarrow m \in (5; +\infty)
 \end{aligned}$$

17. Determinar qué condición debe satisfacer "a", para que cualquiera que sea el valor real atribuido a x, el trinomio $x^2 + 2x + a$, sea superior a 10.

Resolución:

$$\begin{aligned}
 &x^2 + 2x + a > 10; \forall x \in \mathbb{R} \\
 &\Rightarrow x^2 + 2x + a - 10 > 0; \forall x \in \mathbb{R} \\
 &\text{Por propiedad:} \\
 &1 > 0 \wedge (2)^2 - 4(a - 10) < 0 \\
 &\Rightarrow 1 - (a - 10) < 0 \Rightarrow a > 11 \\
 &\therefore a > 11
 \end{aligned}$$

18. Resolver: $-2x + 5 < 3x + 8 < 6x - 10$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 &-2x + 5 < 3x + 8 < 6x - 10 \\
 &\Rightarrow -2x + 5 < 3x + 8 \wedge 3x + 8 < 6x - 10 \\
 &\Rightarrow -\frac{3}{5} < x \wedge 6 < x \Rightarrow 6 < x \\
 &\therefore CS = (6; +\infty)
 \end{aligned}$$

19. Si $a > b > 0$ y S es el conjunto solución de la ecuación: $|x - a| + b = |x + a| - b$, hallar el conjunto S.

Resolución:

$$\begin{aligned}
 &|x - a| + b = |x + a| - b \wedge a > b > 0 \\
 &\Rightarrow (x < -a \wedge a - x + b = -x - a - b) \vee \\
 &\quad (-a \leq x \leq a \wedge a - x + b = x + a - b) \vee \\
 &\quad (x > a \wedge x - a + b = x + a - b) \\
 &\Rightarrow (x < -a \wedge a + b = -a - b) \text{ (F)} \\
 &\quad (-a \leq x \leq a \wedge x = \frac{b}{2}) \vee (x > a \wedge -a + b = a - b) \text{ (F)} \\
 &\Rightarrow (x \in \emptyset) \vee (x = b) \vee (x \in \emptyset) \Rightarrow x = b \quad \therefore S = \{b\}
 \end{aligned}$$

20. Determinar el conjunto solución de la ecuación:

$$|5 - |x - 2|| = |3x - 2|$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 &\text{Recuerde que: } |a| = |b| \Rightarrow a = b \vee a = -b. \\
 &\Rightarrow |5 - |x - 2|| = |3x - 2| \\
 &\Rightarrow 5 - |x - 2| = 3x - 2 \vee 5 - |x - 2| = 2 - 3x \\
 &\Rightarrow \underbrace{|x - 2| = 7 - 3x}_A \vee \underbrace{|x - 2| = 3x + 3}_B
 \end{aligned}$$

$$\text{En A: } |x - 2| = 7 - 3x$$

$$7 - 3x \geq 0 \wedge (x - 2 = 7 - 3x \vee x - 2 = 3x - 7)$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{7}{3} \wedge \left(x = \frac{9}{4} \vee x = \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x \leq \frac{7}{3} \wedge x = \frac{9}{4}\right) \vee \left(x \leq \frac{7}{3} \wedge x = \frac{5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{9}{4}\right) \vee (x \in \emptyset) \Rightarrow x = \frac{9}{4}$$

$$\text{En B: } |x - 2| = 3x + 3$$

$$3x + 3 \geq 0 \wedge (x - 2 = 3x + 3 \vee x - 2 = -3x - 3)$$

$$\Rightarrow x \geq -1 \wedge \left(x = -\frac{5}{2} \vee x = -\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \left(x \geq -1 \wedge x = -\frac{5}{2}\right) \vee \left(x \geq -1 \wedge x = -\frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow (x \in \emptyset) \vee \left(x = -\frac{1}{4}\right) \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore CS = \left\{-\frac{1}{4}, \frac{9}{4}\right\}$$

21. Dado el conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / ||x - 2| - |x - 3|| - 3x = 4\},$$

determinar: $n(A)$.

Resolución:

$$\begin{aligned}
 &A = \{x \in \mathbb{R} / ||x - 2| - |x - 3|| = 3x + 4\} \\
 &\Rightarrow ||x - 2| - |x - 3|| = 3x + 4 \\
 &\Rightarrow (x < 2 \wedge |2 - x + x - 3| = 3x + 4) \vee \\
 &\quad (2 \leq x \leq 3 \wedge |x - 2 + x - 3| = 3x + 4) \vee \\
 &\quad (x > 3 \wedge |x - 2 - x + 3| = 3x + 4) \\
 &\Rightarrow (x < 2 \wedge 1 = 3x + 4) \vee (2 \leq x \leq 3 \wedge \\
 &\quad |2x - 5| = 3x + 4) \vee (x > 3 \wedge 1 = 3x + 4) \\
 &\Rightarrow (x < 2 \wedge x = -1) \wedge [2 \leq x \leq 3 \wedge \\
 &\quad (2x - 5 = 3x + 4 \vee 2x - 5 = -3x - 4)] \vee \\
 &\quad (x > 3 \wedge x = -1) \\
 &\Rightarrow (x = -1) \vee \left[2 \leq x \leq 3 \wedge \left(x = -9 \vee x = \frac{1}{5}\right)\right] \\
 &\quad \vee (x \in \emptyset) \Rightarrow (x = -1) \vee (x \in \emptyset) \Rightarrow x = -1 \\
 &\text{Luego: } A = \{-1\} \quad \therefore n(A) = 1
 \end{aligned}$$

22. Determinar el conjunto solución de la ecuación:

$$|x - 7| + |x - 5| = |x - 2|$$

Como respuesta dar la suma de las soluciones por 3.

Resolución:

$$\begin{aligned}
 &|x - 7| + |x - 5| = |x - 2| \\
 &\Rightarrow (x < 2 \wedge 7 - x + 5 - x = 2 - x) \vee \\
 &\quad (2 \leq x < 5 \wedge 7 - x + 5 - x = x - 2) \vee \\
 &\quad (5 \leq x < 7 \wedge 7 - x + x - 5 = x - 2) \vee \\
 &\quad (x \geq 7 \wedge x - 7 + x - 5 = x - 2) \\
 &\Rightarrow (x < 2 \wedge x = 10) \vee \left(2 \leq x < 5 \wedge x = \frac{14}{3}\right) \vee \\
 &\quad (5 \leq x < 7 \wedge x = 4) \vee (x \geq 7 \wedge x = 10) \\
 &\Rightarrow (x \in \emptyset) \vee \left(x = \frac{14}{3}\right) \vee (x \in \emptyset) \vee (x = 10) \\
 &\Rightarrow x_1 = \frac{14}{3} \vee x_2 = 10 \\
 &\text{Se pide: } 3(x_1 + x_2) = 44
 \end{aligned}$$

23. Determinar la suma de raíces de: $|x| + |x - 2| = 5$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 &|x| + |x - 2| = 5 \\
 &\Rightarrow (x < 0 \wedge -x - x + 2 = 5) \vee (0 \leq x \leq 2) \\
 &\quad \wedge x + 2 - x = 5) \vee (x > 2 \wedge x + x - 2 = 5)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(x < 0 \wedge x = -\frac{3}{2} \right) \vee (0 \leq x \leq 2 \wedge 2 = 5) \vee \left(x > 2 \wedge x = \frac{7}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \left(x = -\frac{3}{2} \right) \vee (x \in \emptyset) \vee \left(x = \frac{7}{2} \right)$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2} \vee x_2 = \frac{7}{2} \quad \therefore x_1 + x_2 = 2$$

24. Si A es el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\sqrt{\frac{-x^2-3x}{-4+3x}} \leq -x, \text{ hallar A.}$$

Resolución:

$$\sqrt{\frac{-x^2-3x}{-4+3x}} \leq -x$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2-3x}{-4+3x} \geq 0 \wedge -x \geq 0 \wedge \frac{-x^2-3x}{-4+3x} \leq x^2$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+3)}{3x-4} \leq 0 \wedge x \leq 0 \wedge \frac{x^2+3x}{3x-4} \geq -x^2$$

$$\Rightarrow (x \leq 0 \wedge x+3 \leq 0) \wedge x^2+3x \leq -x^2(3x-4)$$

$$\Rightarrow (x \leq 0 \wedge x \leq -3) \wedge 3x^2+5x+3 \geq 0$$

$$\Rightarrow (x \leq -3) \wedge (x \in \mathbb{R}, \text{ pues } \Delta < 0)$$

$$\Rightarrow x \leq -3 \vee x = 0$$

$$\therefore \text{CS} = \langle -\infty; -3] \cup \{0\}$$

25. Al resolver: $\frac{\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt[4]{x^2-2}\sqrt[5]{x+6}} > 0$, se obtiene

$\langle a; b \rangle \cup \langle c; d \rangle$. Determinar: $a + b + c + d$

Resolución:

$$\frac{\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt[4]{x^2-2}\sqrt[5]{x+6}} > 0$$

$$\Rightarrow x^2-2 > 0 \wedge \frac{\sqrt[3]{4-x}}{\sqrt[5]{x+6}} > 0$$

$$\Rightarrow (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) > 0 \wedge \frac{4-x}{x+6} > 0$$

Pues: $\forall n \in \mathbb{N}: a \wedge a^{2n+1}\sqrt{a}$ son del mismo signo.

$$\Rightarrow (x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}) \wedge \frac{x-4}{x+6} < 0$$

$$\Rightarrow (x < -\sqrt{2} \vee x > \sqrt{2}) \wedge (-6 < x < 4)$$

$$\Rightarrow (x < -\sqrt{2} \wedge -6 < x < 4) \vee (x > \sqrt{2} \wedge -6 < x < 4)$$

$$\Rightarrow (-6 < x < -\sqrt{2}) \vee (\sqrt{2} < x < 4)$$

$$\Rightarrow x \in \langle -6; -\sqrt{2} \rangle \cup \langle \sqrt{2}; 4 \rangle$$

$$\text{Luego: } a = -6; b = -\sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{2}; d = 4 \quad \therefore a + b + c + d = -2$$

26. Al resolver la inecuación:

$\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} > -6$, se obtiene como conjunto solución al intervalo $[a; b]$. Hallar ab .

Resolución:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x} > -6$$

$$\Rightarrow x+1 \geq 0 \wedge 2-x \geq 0 \wedge$$

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{2-x}}{\geq 0} \geq \frac{-6}{-6} \text{ (la desigualdad se satisface)}$$

$$\Rightarrow x+1 \geq 0 \wedge 2-x \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq -1 \wedge x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2$$

$$\text{Luego: CS} = [-1; 2] = [a; b]$$

$$\Rightarrow a = -1 \wedge b = 2 \quad \therefore ab = -2$$

27. Al resolver la inecuación:

$\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6} > x-2$, se obtiene por conjunto solución $\langle -\infty; a \rangle \cup \langle b; +\infty \rangle$. Hallar ab .

Resolución:

Tenga en cuenta que:

$$\forall n \in \mathbb{N}: a > b \Leftrightarrow a^{2n-1} > b^{2n-1}$$

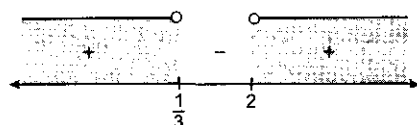
$$\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6} > x-2$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2+5x-6 > (x-2)^3$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2+5x-6 > x^3-6x^2+12x-8$$

$$\Rightarrow 3x^2-7x+2 > 0$$

$$\Rightarrow (3x-1)(x-2) > 0$$



$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; \frac{1}{3} \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$$

$$\text{Luego: } a = \frac{1}{3} \wedge b = 2 \quad \therefore ab = \frac{2}{3}$$

28. Determinar el conjunto por extensión:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / ((\sqrt[3]{2-x})(\sqrt[4]{x+1})(\sqrt[12]{x^2-9})) > 0\}$$

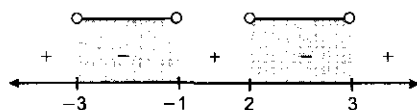
Si: $A = \langle a; b \rangle \cup \langle c; d \rangle$, hallar: $a + b + c + d$

Resolución:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / ((\sqrt[3]{2-x})(\sqrt[4]{x+1})(\sqrt[12]{x^2-9})) > 0\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} / (2-x)(x+1)(x^2-9) > 0\}$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1)(x+3)(x-3) < 0$$



$$x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$$

$$\Rightarrow A = \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$$

$$\text{Luego: } a = -3; b = -1 \wedge c = 2; d = 3$$

$$\therefore a + b + c + d = 1$$

29. Si $x \in \mathbb{R}$, en $m \leq \frac{x}{x^2-5x+9} \leq n$

hallar: $11m + n$

Resolución:

$$m \leq \frac{x}{x^2-5x+9} \leq n$$

$$m \leq \frac{x}{x^2-5x+9} \wedge \frac{x}{x^2-5x+9} \leq n$$

$$0 \leq \frac{-mx^2 + (5m+1)x - 9m}{x^2-5x+9} \wedge$$

$$\frac{-nx^2 + (5n+1)x - 9n}{x^2 - 5x + 9} \leq 0$$

$$0 \leq [mx^2 + (5m+1)x - 9m](x^2 - 5x + 9) \wedge$$

$$[-nx^2 + (5n+1)x - 9n](x^2 - 5x + 9) \leq 0$$

Análisis del trinomio: $x^2 - 5x + 9$, es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Discriminante: } \Delta = (-5)^2 - 4(9) < 0$$

Luego, en (I): $0 \leq -mx^2 + (5m+1)x - 9m$

$\forall x \in \mathbb{R}$ siempre es positivo o cero.

$$\Rightarrow (5m+1)^2 - 4(-m)(-9m) \leq 0$$

$$-11m^2 + 10m + 1 \leq 0$$

$$11m^2 - 10m - 1 \geq 0 \Rightarrow (11m+1)(m-1) \geq 0$$



$$\Rightarrow m \leq -\frac{1}{11} \cup m \geq 1$$

Luego, en (II): $-nx^2 + (5n+1)x - 9n \leq 0$

$$nx^2 - (5n+1)x + 9n \geq 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ siempre es positivo o cero.

$$\Rightarrow [-(5n+1)]^2 - 4n(9n) \leq 0$$

$$-11n^2 + 10n + 1 \leq 0$$

$$11n^2 - 10n - 1 \geq 0 \Rightarrow (11n+1)(n-1) \geq 0$$



$$\Rightarrow n \leq -\frac{1}{11} \cup n \geq 1$$

Finalmente de (I) $\wedge$ (II):

$$11m \leq -1$$

$$11n \geq 11$$

$$n \leq -\frac{1}{11}$$

$$n \geq 1$$

$$11m + n \leq -\frac{12}{11}$$

$$11m + n \geq 12$$

$$\therefore 11m + n \in \left(-\infty; -\frac{12}{11}\right] \cup [12; +\infty)$$

30. Si a y b son dos números positivos, siendo $a > b$, indicar dónde está el error de la siguiente secuencia:

$$ab > b^2$$

...I

$$-a^2 + ab > b^2 - a^2$$

...II

$$a(b-a) > (b-a)(b+a)$$

...III

$$a > b + a$$

...IV

$$0 > b$$

...V

Resolución:

El error se encuentra en el paso (IV), puesto que $(b-a)$ es negativo. En el enunciado se dijo que $(a > b)$ y como se ha dividido los dos miembros de la desigualdad entre un número negativo, el sentido de la desigualdad ha debido invertirse.

31. Hallar el intervalo en el cual debe estar comprendido el valor de n para que la inecuación:

$$\frac{3(2n+1)x^2 - 2(4n+5)x + 5n+9}{5x^2 - 6x + 5} < n+2$$

Se verifica que para todo valor de x .

Resolución:

Propiedad:

Sea: $ax^2 + bx + c$, con $a > 0$:

$$\Delta < 0 \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego, como $5x^2 - 6x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, entonces:

$$3(2n+1)x^2 - 2(4n+5)x + 5n+9 < (n+2)(5x^2 - 6x + 5)$$

$$(n-7)x^2 + (2n-2)x - 1 < 0$$

$$(7-n)x^2 + 2(n-1)x + 1 > 0$$

Como se debe verificar $\forall x \in \mathbb{R}$

$$a > 0 \wedge \Delta < 0$$

$$7-n > 0 \wedge 4(n-1)^2 - 4(7-n) < 0$$

$$n < 7 \wedge n^2 - n - 6 < 0$$

$$n < 7 \wedge -2 < n < 3$$

$$\therefore -2 < n < 3$$

32. Resolver $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} < 0$

Resolución:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} < 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^3}{(x-1)^3} < 0 \Rightarrow \frac{x+1}{x-1} < 0$$

$$\therefore x \in (-1; 1)$$

33. Si A es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{(\sqrt[4]{-2x-3x^2})(x-3)^4(2x-2)}{(x-1)^3\sqrt[3]{x^3+2x}\sqrt{-x}} \leq 0$$

hallar A .

Resolución:

$$x = 3 \vee \{-2x - 3x^2 \geq 0 \wedge x \neq 0; 1 \wedge$$

$$\left[\frac{2\sqrt[4]{-2x-3x^2}(x-3)^4}{(x-1)^3\sqrt[3]{-x}} \right] \left[\frac{1}{(x^3+2x)} \right] \leq 0$$

$$x = 3 \vee \{3x^2 + 2x \leq 0 \wedge x \neq 0; 1 \wedge \frac{1}{x(x^2+2)} \leq 0\}$$

$$x = 3 \vee \{-\frac{2}{3} \leq x \leq 0 \wedge x \neq 0; 1 \wedge x < 0\}$$

$$x = 3 \vee -\frac{2}{3} \leq x < 0 \therefore A = \left[-\frac{2}{3}; 0\right) \cup \{3\}$$

34. Calcular el menor valor $k \in \mathbb{R}$, tal que:

$$2x^2 - 3x + 4 \geq k, \forall x \in \mathbb{R}$$

Resolución:

$$2x^2 - 3x + 4 \geq k$$

$$2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right) \geq k - 4 + \frac{9}{8} \Rightarrow 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \geq k - \frac{23}{8}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow k - \frac{23}{8} \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{23}{8}$$

$$\therefore k_{\max} = \frac{23}{8}$$

35. Sean A y B dos conjuntos definidos por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / |x - 2| - |x + 3| = 4\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{R} / |x| + |3 - x| = 3\}$$

Demostrar: $\exists x \in A, \exists y \in B / x + y = 0$

Resolución:

$$\text{Con A: } |x - 2| = 4 + |x + 3|$$

$$\text{Usando: } |x| = a \Rightarrow x = a \vee x = -a$$

Se tiene:

$$x - 2 = 4 + |x + 3| \vee x - 2 = -4 - |x + 3|$$

$$\Rightarrow |x + 3| = x - 6 \vee |x + 3| = -x - 2$$

$$\Rightarrow \{x - 6 \geq 0 \wedge (x + 3 = x - 6 \vee x + 3 = 6 - x)\}$$

$$\vee \{-x - 2 \geq 0 \wedge (x + 3 = -x - 2 \vee x + 3 = x + 2)\}$$

$$\Rightarrow \{x \geq 6 \wedge (x \in \emptyset \vee x = \frac{3}{2})\} \vee \{x \leq -2 \wedge$$

$$(x = -\frac{5}{2} \vee x \in \emptyset)\}$$

$$\Rightarrow \{x \geq 6 \wedge x = \frac{3}{2}\} \vee \{x \leq -2 \wedge x = -\frac{5}{2}\}$$

$$\Rightarrow \{x \in \emptyset\} \wedge \{x = -\frac{5}{2}\} \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Con B: } |x| + |3 - x| = |3| = |x + 3 - x|$$

$$\text{Pero: } |a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$$

$$\Rightarrow x(3 - x) \geq 0 \Rightarrow x(x - 3) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in [0; 3]$$

$$\text{Luego: } A = \left\{-\frac{5}{2}\right\} \wedge B = [0; 3]$$

$$\text{De donde: para } x = -\frac{5}{2} \in A \wedge y = \frac{5}{2} \in B$$

$$\Rightarrow x + y = 0$$

$$\therefore \exists x \in A, \exists y \in B / x + y = 0$$

36. Si T es un conjunto definido por:

$$T = \{x \in \mathbb{R} / ||x^2 + 4| + 4x| - ||x^2 + 4| - 4x|| \geq 32\},$$

entonces el conjunto T^c , es:

Resolución:

$$T = \{x \in \mathbb{R} / ||x^2 + 4| + 4x| - ||x^2 + 4| - 4x|| \geq 32\}$$

De la inequación:

$$||x^2 + 4 + 4x| - |x^2 + 4 - 4x|| \geq 32$$

$$\geq 0 \quad \geq 0 \quad \vee \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow |x^2 + 4 + 4x - x^2 - 4 + 4x| \geq 32$$

$$\Rightarrow |8x| \geq 32 \Rightarrow |x| \geq 4$$

$$\Rightarrow x \geq 4 \vee x \leq -4 \Rightarrow x \in \langle -\infty; -4 \rangle \cup [4; +\infty)$$

$$\Rightarrow T = \langle -\infty; -4 \rangle \cup [4; +\infty)$$

$$\therefore T^c = \langle -4; 4 \rangle$$

37. En la siguiente ecuación
- $|x + 3| - |x - 1| = x + 1$

Si M es el número de raíces positivas y N es el número de raíces negativas, hallar la relación correcta entre los valores de M y N.

Resolución:

$$|x + 3| - |x - 1| = x + 1$$

Analizando por intervalos:

$$\text{Si } x < -3 \Rightarrow x + 3 < 0 \wedge x - 1 < 0$$

$$\text{Luego: } x < -3 \wedge -x - 3 + x - 1 = x + 1$$

$$\Rightarrow x < -3 \wedge x = -4 \Rightarrow x = -4$$

$$\text{Para } -3 \leq x < 1: x + 3 \geq 0 \wedge x - 1 < 0$$

$$\text{Luego: } -3 \leq x < 1 \wedge x + 3 + x - 1 = x + 1$$

$$\Rightarrow -3 \leq x < 1 \wedge x = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$\text{Para } x \geq 1: x + 3 > 0 \wedge x - 1 \geq 0$$

$$\text{Luego: } x \geq 1 \wedge x + 3 - (x - 1) = x + 1$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \wedge x = 3 \Rightarrow x = 3$$

$$\text{Con esto: } M = 1 \wedge N = 2$$

$$\therefore M^2 + N^2 = 5$$

38. Si M es un conjunto definido por:

$$M = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x^2}{|x| - 3} \geq 2 \Rightarrow |x(x + 1)| < |x + 4|\},$$

hallar el conjunto M.

Resolución:

De la proposición, resolviendo cada inequación, se tiene:

$$\frac{x^2}{|x| - 3} \geq 2 \Rightarrow |x| - 3 > 0 \wedge x^2 \geq 2(|x| - 3)$$

$$\Rightarrow |x| > 3 \wedge x^2 - 2|x| + 6 \geq 0$$

$$\Rightarrow |x| > 3 \wedge (|x| - 1)^2 + 5 \geq 0$$

$$\Rightarrow |x| > 3 \wedge x \in \mathbb{R} \Rightarrow |x| > 3$$

$$\Rightarrow x > 3 \vee x < -3$$

$$|x(x + 1)| < |x + 4| \Rightarrow |x^2 + x| < |x + 4|$$

$$|a| < |b| \Rightarrow (a + b)(a - b) < 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 4) < 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4 < 0, \text{ pues: } x^2 + 2x + 4 > 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x - 2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 2$$

Luego:

$$\frac{x^2}{|x| - 3} \geq 2 \Rightarrow |x(x + 1)| < |x + 4|$$

$$\Rightarrow (x > 3 \vee x < -3) \Rightarrow (-2 < x < 2)$$

$$\Rightarrow \sim (x > 3 \vee x < -3) \vee (-2 < x < 2)$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \vee -2 < x < 2$$

$$\Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \quad \therefore M = [-3; 3]$$

Obs.: $\sim \left(\frac{x^2}{|x| - 3} \geq 2 \right)$, significa que la relación $\geq$ no se

debe satisfacer, es decir: $\frac{x^2}{|x| - 3} < 2 \vee |x| - 3 = 0$

39. Si A es un conjunto definido por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / ||x^2 - 1| - x| = x\}, \text{ hallar la suma de los elementos del conjunto A.}$$

Resolución:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / ||x^2 - 1| - x| = x\}$$

De la ecuación:

$$x \geq 0 \wedge \{|x^2 - 1| - x = x \vee |x^2 - 1| - x = -x$$

$$\Rightarrow x \geq 0 \wedge \{|x^2 - 1| = 2x \wedge |x^2 - 1| = 0\}$$

$$\Rightarrow x \geq 0 \wedge \{x^2 - 1 = 2x \wedge x^2 - 1 = -2x \vee x^2 - 1 = 0\}$$

$$\Rightarrow x \geq 0 \wedge \{x^2 - 2x = 1 \vee x^2 + 2x = 1 \vee x^2 - 1 = 0\}$$

$$\Rightarrow x \geq 0 \wedge \{(x - 1)^2 = 2 \vee (x + 1)^2 = 2 \vee x^2 - 1 = 0\}$$

Resolviendo cada ecuación:

$$x \geq 0 \wedge \{(x = 1 + \sqrt{2} \vee x = 1 - \sqrt{2}) \vee$$

$$(x = -1 + \sqrt{2} \vee x = -1 - \sqrt{2}) \vee (x = 1 \vee x = -1)\}$$

$$x \in [0; +\infty) \wedge x \in \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}; 1; -1\}$$

$$x \in [0; +\infty) \cap \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}; -1 - \sqrt{2}; 1; -1\}$$

$$\Rightarrow x \in \{1 + \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}; 1\}$$

$$\therefore \text{La suma es: } 2\sqrt{2} + 1$$

40. Si
- M
- es un conjunto definido por:

$$M = \{y \in \mathbb{R} / y = |2x| + |-x| + |x-2| + |x+10| \wedge -10 < x < -2\} = \langle a; b \rangle,$$

 hallar el valor de: $(b-a)$
Resolución:

$$M = \{y \in \mathbb{R} / y = |2x| + |-x| + |x-2| + |x+10| \wedge -10 < x < -2\}$$

$$y = 2|x| + |x| + |x-2| + |x+10|$$

$$\Rightarrow y = 3|x| + 2 - x + x + 10$$

$$\Rightarrow y = 3|x| + 12 \wedge -10 < x < -2$$

$$\text{Luego: } -10 < x < -2 \Rightarrow 2 < |x| < 10$$

$$\Rightarrow 6 < |x| + 4 < 14 \Rightarrow 18 < \frac{3|x| + 12}{y} < 42$$

$$\Rightarrow 18 < y < 42$$

$$M = \langle 18; 42 \rangle = \langle a; b \rangle \Rightarrow a = 18 \wedge b = 42$$

$$\therefore b - a = 24$$

41. Al resolver la siguiente inecuación:

$$\sqrt{6 - \sqrt{15 - x}} > \sqrt{1 - x}, \text{ obtener su conjunto solución:}$$

Resolución:

$$\sqrt{6 - \sqrt{15 - x}} > \sqrt{1 - x}$$

$$15 - x \geq 0 \wedge 6 - \sqrt{15 - x} > 0 \wedge 1 - x \geq 0 \wedge 6 - \sqrt{15 - x} > 1 - x$$

$$\Rightarrow x \leq 15 \wedge \sqrt{15 - x} < 6 \wedge x \leq 1 \wedge 5 + x > \sqrt{15 - x}$$

$$\Rightarrow (x \leq 15 \wedge x \leq 1) \wedge 15 - x < 36 \wedge 5 + x > 0 \wedge$$

$$25 + 10x + x^2 > 15 - x$$

$$\Rightarrow (x \leq 1 \wedge x > -21 \wedge x > -5) \wedge x^2 + 11x + 10 > 0$$

$$\Rightarrow -5 < x \leq 1 \wedge (x < -10 \vee x > -1)$$

$$\Rightarrow (-5 < x \leq 1 \wedge x < -10) \vee (-5 < x \leq 1 \wedge x > -1)$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset \vee -1 < x \leq 1 \therefore x \in (-1; 1]$$

42. Al resolver:
- $\sqrt{15 - |x|} \leq \sqrt{|x| - 7}$
- , se obtiene:

 $[a; b] \cup [c; d]$. Calcular: $|a| + |b| + |c| + |d|$
Resolución:

$$\sqrt{15 - |x|} \leq \sqrt{|x| - 7}$$

$$\Rightarrow 15 - |x| \geq 0 \wedge |x| - 7 \geq 0 \wedge 15 - |x| \leq |x| - 7$$

$$\Rightarrow |x| \leq 15 \wedge |x| \geq 7 \wedge |x| \geq 11$$

$$\Rightarrow 11 \leq |x| \leq 15$$

$$\Rightarrow -15 \leq x \leq -11 \vee 11 \leq x \leq 15$$

$$\text{Luego: CS} = [-15; -11] \cup [11; 15]$$

$$\therefore |a| + |b| + |c| + |d| = 52$$

43. Si
- $\forall x \in [a; b] \cup [c; d]$
- :
- $2|3 + 5x - 8x^2| \leq 1 - x$
- ,

 calcular $|a| + |b| + |c|$
Resolución:

$$2|3 + 5x - 8x^2| \leq 1 - x$$

$$\Rightarrow |16x^2 - 10x - 6| < \frac{1-x}{2}$$

$$\Rightarrow 1 - x \geq 0 \wedge |16x^2 - 10x - 6| \leq |1 - x|$$

$$\text{Usando: } |a| \leq |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \leq 0$$

$$1 - x \geq 0 \wedge (16x^2 - 11x - 5)(16x^2 - 9x - 7) \leq 0$$

$$x \leq 1 \wedge (16x + 5)(16x + 7)(x - 1)^2 \leq 0$$

$$x \leq 1 \wedge \{x = 1 \vee -\frac{7}{16} \leq x \leq -\frac{5}{16}\}$$

$$\Rightarrow x \in \left[-\frac{7}{16}; -\frac{5}{16}\right] \cup \{1\}$$

$$\text{Luego: } a = -\frac{7}{16}; b = -\frac{5}{16}; c = 1$$

$$\therefore |a| + |b| + |c| = 7/4$$

44. Resolver:
- $\frac{|x-3| - |x-4|}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}{|x-4| + |x-3|}$

Dar la suma de todos los valores enteros que verifican.

Resolución:

$$\frac{|x-3| - |x-4|}{\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2}}{|x-4| + |x-3|}$$

$$\text{Note que: } x - 2 \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \wedge x \geq -1 \Rightarrow x \geq 2$$

Luego, la inecuación queda así:

$$(x-3)^2 - (x-4)^2 \leq \sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-2}^2$$

$$\Rightarrow (2x-7)(1) \leq 3 \Rightarrow x \leq 5$$

$$\text{Con esto: } x \geq 2 \wedge x \leq 5$$

$$\Rightarrow 2 \leq x \leq 5$$

$$\therefore \text{Los enteros son: } 2; 3; 4; 5 \text{ y suman } 14.$$

45. Resolver
- $\left| \frac{1}{x+2} \right| < \left| \frac{x+1}{x^2+4x+4} \right|$

Resolución:

$$\frac{1}{|x+2|} < \frac{|x+1|}{|x+2||x+2|}$$

$$\Rightarrow x \neq -2 \wedge |x+2| < |x+1|$$

$$\Rightarrow x \neq -2 \wedge (2x+3)(1) < 0$$

$$\Rightarrow x \neq -2 \wedge x < -3/2$$

$$x \in (-3; -3/2) \cup \{-2\}$$

46. Al hallar el conjunto solución de la siguiente

 inecuación: $\sqrt{3 - |x^2 - 6|} (x^2 - 4x + 3) < 0$, se obtiene $\langle a; b \rangle = \{\sqrt{b}\}$, hallar ab .

Resolución:

$$\sqrt{3 - |x^2 - 6|} (x-1)(x-3) < 0$$

$$\Rightarrow |3 - |x^2 - 6|| > 0 \wedge (x-1)(x-3) < 0$$

$$\Rightarrow 3 - |x^2 - 6| \neq 0 \wedge 1 < x < 3$$

$$\Rightarrow (x^2 \neq 9 \wedge x^2 \neq 3) \wedge 1 < x < 3$$

$$\Rightarrow x \neq 3 \wedge x \neq -3 \wedge x \neq \sqrt{3} \wedge x \neq -\sqrt{3} \wedge 1 < x < 3$$

$$\Rightarrow x \in (1; 3) - \{\sqrt{3}\}$$

$$\text{Luego: } a = 1 \wedge b = 3 \therefore ab = 3$$

47. Resolver
- $\sqrt{x-5} < \sqrt{2x-1}$

Resolución:

$$\sqrt{x-5} < \sqrt{2x-1}$$

$$2x-1 \geq 0 \wedge |x-5| < 2x-1$$

$$x \geq \frac{1}{2} \wedge (x-5 < 2x-1 \wedge x-5 > 1-2x)$$

$$x \geq \frac{1}{2} \wedge (-4 < x \wedge x > 2)$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \wedge (x > 2) \therefore x > 2$$

48. Resolver $|x + 2| - |x - 4| \leq \sqrt{x^2 - 36}$, si el conjunto solución es: $S = \langle -\infty; a \rangle \cup [-a\sqrt{2}; +\infty)$, hallar "a".

Resolución:

$$|x + 2| - |x - 4| \leq \sqrt{x^2 - 36}$$

$$\text{Note que: } x^2 - 36 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6 \vee x \leq -6$$

Entonces:

$$(x \leq -6 \wedge -x - 2 + x - 4 \leq \sqrt{x^2 - 36}) \vee (x \geq 6 \wedge x + 2 - x + 4 \leq \sqrt{x^2 - 36})$$

$$\Rightarrow (x \leq -6 \wedge -6 \leq \sqrt{x^2 - 36}) \vee$$

$$(x \geq 6 \wedge 6 \leq \sqrt{x^2 - 36})$$

$$\Rightarrow (x \leq -6) \vee (x \geq 6 \wedge 36 \leq x^2 - 36)$$

$$\Rightarrow x \leq -6 \vee \{x \geq 6 \wedge (x + 6\sqrt{2})(x - 6\sqrt{2}) \geq 0\}$$

$$\Rightarrow x \leq -6 \vee \{x \geq 6 \wedge x \geq 6\sqrt{2}\}$$

$$\Rightarrow x \leq -6 \vee x \geq 6\sqrt{2}$$

$$\text{Luego: } CS = \langle -\infty; -6 \rangle \cup [6\sqrt{2}; +\infty)$$

$$\therefore a = -6$$

49. Señale el conjunto solución de la inecuación respecto a la variable x, tal que:

$$\frac{\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y^2-x} - 2y}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2+x+3}} \leq 0, \text{ si } y > 0.$$

Resolución:

$$\text{Del denominador: } 0 \leq x \Rightarrow 0 \leq x \leq x + x^2 + 3$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{x + x^2 + 3}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{x^2 + x + 3} < 0.$$

Luego, la inecuación se reduce a:

$$\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y^2-x} - 2y \geq 0 \wedge y > 0$$

$$x + y^2 \geq 0 \wedge y^2 - x \geq 0 \wedge x \geq 0 \wedge$$

$$\sqrt{x+y^2} + \sqrt{y^2-x} \geq 2y$$

$$\Rightarrow (x \geq -y^2 \wedge x \leq y^2 \wedge x \geq 0) \wedge$$

$$x + y^2 + y^2 - x + 2\sqrt{y^4 - x^2} \geq 4y^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq y^2 \wedge \sqrt{y^4 - x^2} \leq y^2$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq y^2 \wedge y^4 - x^2 \leq y^4$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq y^2 \wedge x^2 \leq 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\therefore CS = \{0\}$$

50. Al resolver la inecuación:

$$\frac{(x^4 + x^2 + 1)(\sqrt{|x|} - 1 + 2)}{(x^3 + x^4 + 2)(9 - x^2)} \geq 0.$$

hallar el conjunto solución.

Resolución:

$$\text{Sea: } |x| - 1 \geq 0 \wedge 9 - x^2 > 0$$

$$\Rightarrow |x| \geq 1 \wedge x^2 < 9$$

$$\Rightarrow 1 \leq |x| \wedge |x| < 3 \Rightarrow 1 \leq |x| < 3$$

$$\Rightarrow x \in \langle -3; -1 \rangle \cup [1; 3)$$

51. Determine T = a + b del conjunto A definido por:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3x}\} = \left[a; \frac{b}{\sqrt{3}} \right)$$

Resolución:

$$\text{De A: } \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} < \sqrt{3x}$$

$$\text{Como: } x + 1 \geq 0 \wedge x - 1 \geq 0 \wedge 3x \geq 0$$

$$x \geq -1 \wedge x \geq 1 \wedge x \geq 0$$

$$\text{Intersecando: } x \geq 1$$

...(α)

$$(1)^2: x + 1 + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} + x - 1 < 3x$$

$$\text{De aquí: } \sqrt{(x+1)(x-1)} < \frac{x}{2} \vee \sqrt{x^2-1} < \frac{x}{2}$$

Aplicando en lo anterior:

$$\frac{x}{2} > 0 \wedge x^2 - 1 < \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$x > 0 \wedge 4x^2 - 4 < x^2$$

$$x > 0 \wedge 3x^2 - 4 < 0$$

$$x > 0 \wedge (\sqrt{3}x + 2)(\sqrt{3}x - 2) < 0$$

$$x > 0 \wedge \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} < x < \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{Intersecando: } 0 < x < \frac{2}{\sqrt{3}}$$

...(β)

$$\text{Luego: } CS = (\alpha) \cap (\beta)$$

$$CS = [1; +\infty) \cap \langle 0; \frac{2}{\sqrt{3}} \rangle = CS = [1; \frac{2}{\sqrt{3}})$$

Identificando con el dato:

$$a = 1 \wedge b = 2 \quad \therefore T = 1 + 2 = 3$$

52. Resolver: $x < \sqrt{1-2x}$, si la solución es:

$$S = \langle -\infty; a \rangle. \text{ Dar el valor de } T = (a + 1)^2.$$

Resolución:

$$\text{De } \sqrt{1-2x} > x, \text{ se tiene:}$$

$$(i) \quad x \geq 0 \wedge 1 - 2x > x^2$$

$$(ii) \quad x < 0 \wedge 1 - 2x \geq 0$$

$$\text{De (i): } x \geq 0 \wedge x^2 + 2x < 1$$

$$x \geq 0 \wedge (x + 1)^2 < 2$$

$$x \geq 0 \wedge -\sqrt{2} < x + 1 < \sqrt{2}$$

$$x \geq 0 \wedge -\sqrt{2} - 1 < x < \sqrt{2} - 1$$

$$\text{Intersecando } S_1: 0 \leq x < \sqrt{2} - 1$$

$$\text{De (ii): } x < 0 \wedge x \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Intersecando } S_2: x < 0$$

$$\text{Luego: } S = S_1 \cup S_2$$

$$\Rightarrow S = [0; \sqrt{2} - 1) \cup \langle -\infty; 0 \rangle \Rightarrow S = \langle -\infty; \sqrt{2} - 1)$$

Identificando con el dato:

$$a = \sqrt{2} - 1 \Rightarrow a + 1 = \sqrt{2} \quad \therefore T = (a + 1)^2 = 2$$

53. Al resolver: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$, se obtiene:

$$x \in \langle a + b\sqrt{c}; +\infty) \text{ si } a; b; c \in \mathbb{Z}^+, \text{ calcule el valor de } M = a + b + c$$

Resolución:

$$\text{De } \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+8} > 3$$

...(1)

$$\text{Como: } 2x + 1 \geq 0 \wedge x + 8 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \geq -8$$

$$\text{Intersecando: } x \geq -\frac{1}{2}$$

...(α)

$$\text{De (1): } \sqrt{2x+1} > 3 + \sqrt{x+8}$$

$$\text{Al cuadrado: } 2x + 1 > 9 + 6\sqrt{x+8} + x + 8$$

$$\text{De aquí: } \sqrt{x+8} < \frac{x-16}{6}$$

$$\frac{x-16}{6} > 0 \wedge x+8 < \left(\frac{x-16}{6}\right)^2$$

$$x > 16 \wedge 36x + 288 < x^2 - 32x + 256$$

$$x > 16 \wedge x^2 - 68x - 32 > 0$$

$$\Rightarrow x = 34 \pm 6\sqrt{33}$$

$$x > 16 \wedge (x < 34 - 6\sqrt{33} \vee x > 34 + 6\sqrt{33})$$

Intersectando: $x > 34 + 6\sqrt{33}$... (β)

Luego, la solución se obtiene: $(\alpha) \cap (\beta)$:

$$\Rightarrow x > 34 + 6\sqrt{33}$$

identificando con el dato: $a = 34$; $b = 6$; $c = 33$

$$\therefore a + b + c = 73$$

54. Si $(a-1)^n = a(a+1)^{n-1}$, calcule x en:

$$\frac{\sqrt[n]{ax+1} + \sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{ax+1} - \sqrt[n]{ax}} = a$$

Resolución:

$$\text{De } \frac{\sqrt[n]{ax+1} + \sqrt[n]{ax}}{\sqrt[n]{ax+1} - \sqrt[n]{ax}} = \frac{a}{1} \Rightarrow \frac{2\sqrt[n]{ax+1}}{2\sqrt[n]{ax}} = \frac{a+1}{a-1}$$

$$\text{A la n: } \frac{ax+1}{ax} = \frac{(a+1)^n}{(a-1)^n} \quad \dots (\alpha)$$

$$\text{Del dato: } (a-1)^n = a \frac{(a+1)^n}{a+1}$$

$$\text{De aquí: } \frac{a+1}{a} = \frac{(a+1)^n}{(a-1)^n}$$

En (α) :

$$\frac{ax+1}{ax} = \frac{a+1}{a} \Rightarrow ax+1 = ax+x \quad \therefore x = 1$$

55. Resolver la inecuación: $\sqrt[3]{x^3-7} < x-1$

Resolución:

$$\text{De: } \sqrt[3]{x^3-7} < x-1$$

Elevamos al cubo:

$$x^3 - 7 < x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\text{De aquí: } x^2 = x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2) < 0 \Rightarrow -1 < x < 2$$

$$\therefore \text{CS} = (-1; 2)$$

56. Resolver: $\sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6} < x-2$

Resolución:

$$\text{De } \sqrt[3]{x^3-3x^2+5x-6} < x-2$$

Elevamos al cubo:

$$x^3 - 3x^2 + 5x - 6 < x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

$$\text{De aquí: } 3x^2 - 7x + 2 < 0$$

$$\begin{array}{r} 3x \quad \quad -1 \\ \times \quad \quad -2 \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow (3x-1)(x-2) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 2$$

$$\therefore \text{CS} = \left(\frac{1}{3}; 2\right)$$

57. Sea:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / x^2 + 2\sqrt{x^2+6x} > 6(4-x) \frac{|x+3|-1}{|x+3|+1} \right\}$$

hallar: $n(A^c \cap \mathbb{Z})$

Resolución:

$$x^2 + 2\sqrt{x^2+6x} > 6(4-x) \frac{|x+3|-1}{|x+3|+1}$$

$$\Rightarrow |x+3|-1 \neq 0 \wedge x^2 + 2\sqrt{x^2+6x} > 6(4-x)$$

$$\Rightarrow |x+3| \neq 1 \wedge x^2 + 6x + 2\sqrt{x^2+6x} - 24 > 0$$

$$\Rightarrow x \neq -2; -4 \wedge x^2 + 6x \geq 0 \wedge$$

$$(\sqrt{x^2+6x}+6)(\sqrt{x^2+6x}-4) > 0$$

$$\Rightarrow x \neq -2; -4 \wedge x(x+6) \geq 0 \wedge \sqrt{x^2+6x}-4 > 0$$

$$\Rightarrow \{x \neq -2; -4 \wedge (x \leq -6 \vee x \geq 0)\} \wedge x^2 + 6x > 16$$

$$\Rightarrow \{x \leq -6 \vee x \geq 0\} \wedge (x+8)(x-2) > 0$$

$$\Rightarrow \{x \leq -6 \vee x \geq 0\} \wedge \{x < -8 \vee x > 2\}$$

$$\Rightarrow x < -8 \vee x > 2$$

$$\text{Luego: } A = \langle -\infty; -8 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$$

$$A^c \cap \mathbb{Z} = \{-8; 2\} \cap \mathbb{Z} = \{-8; -7; \dots; 2\}$$

$$\therefore n(A^c \cap \mathbb{Z}) = 11$$

58. Hallar el conjunto solución de:

$$|x+1| + |x-2| > \sqrt{4x^2-12x+8}$$

Resolución:

$$|x-1| + |x-2| > \sqrt{4x^2-12x+8}$$

$$\Rightarrow |x-1| + |x-2| > 2\sqrt{|x-1||x-2|}$$

Recuerde que:

$$\forall a \geq 0 \wedge \forall b \geq 0; a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a+b > 2\sqrt{ab} \Rightarrow a \geq 0 \wedge b \geq 0 \wedge a \neq b$$

$$\text{Luego, como: } |x-1| \geq 0 \wedge |x-2| \geq 0$$

$$\text{Solo queda que: } |x-1| \neq |x-2|$$

$$\Rightarrow x-1 \neq x-2 \wedge x-1 \neq 2-x$$

$$\Rightarrow -1 \neq -2 \wedge x \neq \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

59. Si $M = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt[4]{x^{12}} + \sqrt{x^6} - 1 \leq |x|\}$, hallar $\mathbb{R}^+ \cap M^c$

Resolución:

$$M = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt[4]{x^{12}} + \sqrt{x^6} - 1 \leq |x|\}$$

De la condición, se tiene:

$$|x|^3 + |x|^3 - 1 \leq |x| \Rightarrow |x|^3 + |x|^3 - |x| - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow (|x|-1)(2|x|^2+|x|+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow |x|-1 \leq 0 \Rightarrow |x| \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow M = [-1; 1]$$

$$\text{Luego: } \mathbb{R}^+ \cap M^c = \langle 1; +\infty \rangle$$

60. Si $\frac{\sqrt{x-2}+8}{|x-1|} \leq 2$, hallar el conjunto solución S.

Resolución:

$$\frac{\sqrt{x-2}+8}{|x-1|} \leq 2 \Rightarrow x-2 \geq 0 \wedge \frac{\sqrt{x-2}+8}{|x+1|} \leq 2$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \wedge \sqrt{x-2}+8 \leq 2(x-1)$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \wedge \sqrt{x-2} \leq 2x-10$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \wedge 2x-10 \geq 0 \wedge x-2 \leq (2x-10)^2$$

$$\Rightarrow x \geq 2 \wedge x \geq 5 \wedge 4x^2-41x+102 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 5 \wedge (4x-17)(x-6) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 5 \wedge x-6 \geq 0 \Rightarrow x > 6 \quad \therefore S = [6; +\infty)$$

61. Sabiendo que $a > 0$, hallar el intervalo al que pertenece, si: $\sqrt{ax^2 + (1-2a)x + a} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$

Resolución:

$$\forall x \in \mathbb{R}: \sqrt{ax^2 + (1-2a)x + a} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow ax^2 + (1-2a)x + a \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Como: } a > 0 \Rightarrow (1-2a)^2 - 4a^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow a > 0 \wedge 1 - 4a \leq 0$$

$$\Rightarrow a > 0 \wedge a \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a \in \left[\frac{1}{4}; \infty\right)$$

62. Hallar el intervalo los valores de x que satisfacen la siguiente desigualdad: $\frac{2x\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}(x-4)} > 1$

Resolución:

$$\frac{2x\sqrt{x-2} - 4\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}(x-4)} > 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{x-2}(x-2)}{\sqrt{x-2}(x-4)} > 1$$

$$\Rightarrow x-2 > 0 \wedge \frac{2(x-2)}{x-4} > 1$$

$$\Rightarrow x-2 > 0 \wedge \frac{x}{x-4} > 0$$

$$\Rightarrow x > 2 \wedge (x < 0 \vee x > 4)$$

$$\Rightarrow (x > 2 \wedge x < 0) \vee (x > 2 \vee x > 4)$$

$$\Rightarrow x \in \emptyset \vee x > 4 \Rightarrow x > 4$$

63. Al resolver: $\frac{(x^2 + x + 1)(|x| - 1)}{(x^4 + x^2 + 1)(x + 2)} > 0$

se obtiene S como conjunto solución; calcular: $S \cup [-1; 1]$

Resolución:

$$\frac{(x^2 + x + 1)(|x| - 1)}{(x^4 + x^2 + 1)(x + 2)} > 0$$

Como: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + x + 1 > 0$, también: $x^4 + x^2 + 1 > 0$

$$\Rightarrow \frac{|x| - 1}{x + 2} > 0 \Rightarrow (|x| - 1)(x + 2) > 0$$

Usando la propiedad:

$$ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$(|x| - 1 > 0 \wedge x + 2 > 0) \vee (|x| - 1 < 0 \wedge x + 2 < 0)$$

$$\Rightarrow \{|x| > 1 \wedge x < -2\} \vee \{|x| < 1 \wedge x < -2\}$$

$$\Rightarrow \{(x > 1 \vee x < -1) \wedge x < -2\} \vee$$

$$\{-1 < x < 1 \wedge x < -2\}$$

$$\Rightarrow \{-2 < x < -1 \vee x > 1\} \vee x \in \emptyset$$

$$\text{Luego: } -2 < x < -1 \vee x > 1$$

$$\Rightarrow S = \{-2; -1\} \cup (1; +\infty)$$

$$\therefore S \cup [-1; 1] = \{-2; +\infty\}$$

64. Luego de resolver: $\left| \frac{1}{x+2} \right| < \left| \frac{x+1}{x^2+4x+4} \right|$ podemos afirmar que:

Resolución:

$$\left| \frac{1}{x+2} \right| < \left| \frac{x+1}{x^2+4x+4} \right|$$

$$\frac{1}{|x+2|} < \frac{|x+1|}{|x+2|^2} \wedge x+2 \neq 0$$

$$\text{Como: } x+2 \neq 0 \Rightarrow |x+2| > 0$$

$$\text{Luego: } |x+2| < |x+1| \wedge x \neq -2$$

$$\Rightarrow (2x+3)(1) < 0 \wedge x \neq -2$$

$$\text{Pues: } |a| < |b| \wedge (a+b)(a-b) < 0$$

$$\Rightarrow x < -\frac{3}{2} \wedge x \neq -2$$

$$\therefore x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) - \{-2\}$$

65. Sea el conjunto M :

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2-|x||x-1|}{2-|x|} \leq 0 \right\}, \text{ hallar } M.$$

Resolución:

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{2|x||x-1|}{2-|x|} \leq 0 \right\}$$

Analizamos tres casos:

$$\text{I. } x < 0: \frac{2-(-x)(1-x)}{2-(-x)} \leq 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \wedge \frac{2-(x^2-x)}{2+x} \leq 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \wedge \frac{(x-2)(x+1)}{x+2} \geq 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \wedge \frac{x+1}{x+2} \leq 0$$

$$\Rightarrow x < 0 \wedge (-2 < x \leq -1)$$

$$\Rightarrow -2 < x \leq -1$$

$$\text{II. } 0 \leq x < 1: \frac{2-(x)(1-x)}{2-x} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x < 1 \wedge \frac{x^2+x+2}{2-x} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x < 1 \wedge 2-x < 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x < 1 \wedge x > 2 \Rightarrow x \in \emptyset$$

$$\text{III. } x \geq 1: \frac{2-(x)(x-1)}{2-x} \leq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \wedge \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} \leq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x+1 \leq 0$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \wedge x \neq 2 \wedge x < -1 \Rightarrow x \in \emptyset$$

Luego, de los casos: $-2 < x \leq -1$

$$\therefore M = \{-2; -1\}$$

66. Dada la inequación $||x| + 2| \leq |x|^2$, cuya solución es de la forma $\langle -\infty; a \rangle \cup [b; +\infty)$, hallar $a + b$.

Resolución:

$$||x| + 2| \leq |x|^2 \Rightarrow |x| + 2 \leq |x|^2$$

$$\Rightarrow |x|^2 - |x| - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{|x|+1}{+}(|x|-2) \geq 0 \Rightarrow |x| - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow |x| \geq 2 \Rightarrow x \geq 2 \vee x \leq -2$$

$$x \in \langle -\infty; -2 \rangle \cup [2; +\infty) \therefore a = -2 \wedge b = 2$$

67. Si $x \in \langle -3; 2 \rangle$ y además se verifica:

$$x^2 + 2|x| + 3 \geq K \quad (K \in \mathbb{R})$$

Encuentre el máximo valor de K .

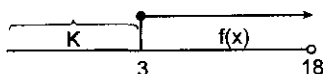
Resolución:

Sea $f(x) = x^2 + 2|x| + 3 = (|x| + 1)^2 + 2$

Como: $-3 < x \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq |x| < 3 \Rightarrow 3 \leq (|x| + 1)^2 + 2 < 18$

Es decir:



De ahí, máximo valor: $K = 3$

68. Resolver la inecuación: $\frac{(x+1)^3(x-7)^5(x^2+k)}{(x-1)^6(x^2-x+3)(x-5)^4} \leq 0$

siendo: $k > 0$

Resolución:

Como $k > 0$

$$\frac{\overbrace{(x+1)^3}^{+} \overbrace{(x-7)^5}^{+} \overbrace{(x^2+k)}^{+}}{\underbrace{(x-1)^6}_{+} \underbrace{(x^2-x+3)}_{+} \underbrace{(x-5)^4}_{+}} \leq 0$$

CVA: $\mathbb{R} - \{1; 8\}$... (α)

Reduciendo la inecuación a otra equivalente:

$(x+1)(x-7) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 7$... (β)

(α) + (β): CS: $[-1; 7] - \{1\}$

69. Determinar el conjunto solución S, que cumple:

$|-x| - 3| + |-x| - 2| + ||-x| + 1| + |-x| - 2| = 44$.

Dar como respuesta la suma de los cuadrados de los elementos de S.

Resolución:

Como $|x| = |-x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

la ecuación quedará así:

$|-x| - 3| + |-x| - 2| + ||-x| + 1| + |-x| - 2| = 44$.

Más aún:

$||x| + 3| + ||x| + 2| + ||x| + 1| + ||x| + 2| = 44$

$\Rightarrow |x| + 3 + |x| + 2 + |x| + 1 + |x| + 2 = 44$

$\Rightarrow 4|x| + 8 = 44 \Rightarrow |x| = 9$

$\Rightarrow x = 9 \vee x = -9 \Rightarrow \text{CS: } \{9; -9\}$

$\therefore (9)^2 - (-9)^2 = 162$

70. Decir el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $||a| - |b|| \leq |a + b|$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$

II. $|a + b| \leq |a + b + c|$, $\forall a; b \in \mathbb{R}$, $\forall c > 0$

III. $|x - 2| < 3 \Rightarrow x \in [-1; 5]$

Resolución:

I. $\forall x; y \in \mathbb{R}: |x + y| \leq |x| + |y|$

Luego: $\forall a; b \in \mathbb{R}$:

$|a| = |a + b + (-b)| \leq |a + b| + |-b|$

$\Rightarrow |a| \leq |a + b| + |b|$

$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a + b|$... (α)

$|b| = |b + a + (-a)| \leq |b + a| + |-a|$

$\Rightarrow |b| \leq |a + b| + |a|$

$\Rightarrow -|a + b| \leq |a| - |b|$... (β)

Luego, de (α) y (β):

$||a| - |b|| \leq |a + b|$ (V)

II. $\forall a; b \in \mathbb{R} \wedge \forall c > 0$:

$a + b < a + b + c \Rightarrow |a + b| \leq |a + b + c|$ (F)

III. $|x - 2| < 3 \Rightarrow -3 < x - 2 < 3$

$\Rightarrow -1 < x < 5$ (F)

$\therefore$ VFF

71. Hallar $A = \{6ab - 3| : a + 5b = 2; a; b \in \mathbb{R}^+\}$

Resolución:

$A = \{6ab - 3| : a + 5b > 2 \wedge a, b \in \mathbb{R}^+\}$

$a; b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + 5b \geq 2\sqrt{5ab}$

$2 \geq 2\sqrt{5ab} \Rightarrow \sqrt{5ab} \leq 1$

$0 < ab \leq 1/5 \Rightarrow 0 < 6ab \leq 6/5$

$-3 < 6ab - 3 \leq -9/5$

$\Rightarrow 9/5 \leq |6ab - 3| < 3 \therefore A = [9/5; 3)$

72. Hallar el número de soluciones de la ecuación

$||x^2 - 1| - 2| = 1/8$

Resolución:

$\Rightarrow |x^2 - 1| - 2 = \frac{1}{8} \vee |x^2 - 1| - 2 = -\frac{1}{8}$

$\Rightarrow |x^2 - 1| = \frac{17}{8} \vee |x^2 - 1| = \frac{15}{8}$

$\Rightarrow (x^2 - 1) = \frac{17}{8} \vee x^2 - 1 = -\frac{17}{8} \vee$

$(x^2 - 1) = \frac{15}{8} \vee x^2 - 1 = -\frac{15}{8}$

$\Rightarrow (x^2 = \frac{25}{8} \vee x^2 = -\frac{9}{8}) \vee (x^2 = \frac{23}{8} \vee x^2 = -\frac{7}{8})$

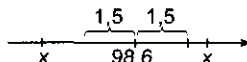
2 soluciones $x \notin \mathbb{R}$ 2 soluciones $x \notin \mathbb{R}$

$\therefore$ Hay 4 soluciones

73. La temperatura normal del cuerpo humano es de

98,6 °F. Si una temperatura x difiere de la normal por al menos 1,5° es considerada no sana, escriba la condición para una temperatura no sana x como una desigualdad que involucre valor absoluto, y resuelva para x .

Resolución:



$x - 98,6 \geq 1,5 \vee 98,6 - x \geq 1,5$

Es decir: $|x - 98,6| \geq 1,5$

Resolviendo: $x \geq 100,1 \vee x \leq 97,1$

74. Si A es un conjunto definido por:

$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{1+48-x}}{\sqrt{x-5}} + 1 > \sqrt{1-\frac{3}{x-4}} \right\}$

¿qué se puede afirmar?

Resolución:

En primer lugar, nótese que:

$8 - x \geq 0 \wedge x - 5 > 0 \wedge 1 - \frac{3}{x-4} \geq 0$

$\Rightarrow 8 \geq x \wedge x > 5 \wedge \frac{x-7}{x-4} \geq 0$

$\Rightarrow 5 < x \leq 8 \wedge (x < 4 \vee x \geq 7)$

$$\Rightarrow 7 \leq x \leq 8$$

En segundo lugar, si: $7 \leq x \leq 8$

$$\Rightarrow 3 \leq x - 4 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{3} \geq \frac{1}{x-4} \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\frac{3}{x-4} \leq -\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{3}{x-4} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq \sqrt{1 - \frac{3}{x-4}} \leq \frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x-4}}}{\sqrt{x-5}} + 1 > \sqrt{1 - \frac{3}{x-4}}$$

> 1 $0 \leq \frac{1}{2}$

La desigualdad se satisface: $A = [7; 8]$

Por lo que: $[7; 8] \supset A$

75. Si S es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{\sqrt{120 - x(x+1)(x-1)(x+2)}}{x^4 + x^2 + 1} \geq 2x - 7$$

hallar el conjunto S.

Resolución:

Para empezar: $120 - x(x+1)(x-1)(x+2) \geq 0$

$$\Rightarrow x(x+1)(x-1)(x+2) - 120 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + x)(x^2 + x - 2) - 120 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + x + 10)(x^2 + x - 12) \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 12 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 3$$

Por otro lado, si: $-4 \leq x \leq 3$

$$\Rightarrow -8 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow -15 \leq 2x - 7 \leq -1$$

$$\text{Con esto: } \frac{\sqrt{120 - x(x+1)(x-1)(x+2)}}{x^4 + x^2 + 1} \geq 2x - 7$$

≥ 0 < 0

$\therefore$ La desigualdad se satisface: $S = [-4; 3]$

76. Si A es el conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{|3x-1| - |2x| - |x-1|} + 2x \geq 1, \text{ hallar el conjunto A.}$$

Resolución:

I. $|3x-1| - |2x| - |x-1| \geq 0$

$$\Rightarrow |3x-1| \geq |2x| + |x-1|$$

Pero: $|3x-1| \leq |2x| + |x-1|, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow |3x-1| = |2x| + |x-1|$$

Sabemos que:

• $|a+b| \leq |a| + |b|, \forall a, b \in \mathbb{R}$

• $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$

$$\Rightarrow (2x)(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1$$

II. De la inecuación, como:

$$|3x-1| = |2x| + |x-1|, \text{ se tiene:}$$

$$\sqrt{0} + 2x \geq 1 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{Luego: } (x \leq 0 \vee x \geq 1) \wedge x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow A = [1; +\infty)$$

77. Si A y B son dos conjuntos definidos por:

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sqrt{\frac{x+1}{2-\sqrt{x+1}}} \geq x-3 \right\}$$

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x} < 0 \right\}$$

hallar el conjunto $A \cap B$.

Resolución:

$$\text{Con A: } \frac{\sqrt{x+1}-1}{2-\sqrt{x+1}} \geq 0 \wedge x+1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-2} \leq 0 \wedge x+1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{x+1} < 2 \wedge x+1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 \leq x+1 < 4 \Rightarrow 0 \leq x < 3$$

$$\text{Como: } 0 \leq x < 3 \Rightarrow -3 \leq x-3 < 0$$

La desigualdad se satisface, luego: $A = [0; 3)$

$$\text{Con B: } 2x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} > 0$$

$$x \geq \frac{1}{2} \wedge \sqrt{2x-1}-3 < 0$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \wedge \sqrt{2x-1} < 3$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \wedge x < 5 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 5 \Rightarrow B = \left[\frac{1}{2}; 5 \right)$$

$$\therefore A \cap B = \left[\frac{1}{2}; 3 \right)$$

78. Si S es el conjunto solución de la inecuación:

$$\frac{4x^2 + \sqrt{9-x^2} - 1}{4x^2 - 1} \geq 1, \text{ indique el valor de verdad}$$

de las proposiciones siguientes:

I. $S = \emptyset$

II. $S \cap \{x; 1/2\} \neq \emptyset$

III. $S = \{1/2; 3\}$

Resolución:

$$\text{De: } \frac{4x^2 - 1 + \sqrt{9-x^2}}{4x^2 - 1} \geq 1 \quad \dots(1)$$

$$\text{Se observa que: } 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 9 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-3) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3 \quad \dots(\alpha)$$

De (1), desdoblamos:

$$1 + \frac{\sqrt{9-x^2}}{4x^2-1} \geq 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{9-x^2}}{4x^2-1} \geq 0$$

$$\text{Se observa que: } \sqrt{9-x^2} \geq 0, \forall x, \text{ en } (\alpha)$$

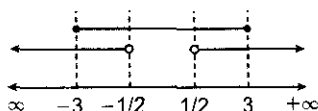
Aquí, se debe cumplir:

$$4x^2 - 1 > 0 \Rightarrow (2x+1)(2x-1) > 0$$

$$\text{De donde: } x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{1}{2} \quad \dots(\beta)$$

Luego:

$$\text{De: } (\alpha) \cap (\beta) = [-3; 3] \cap \left(\left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty \right) \right)$$



$$S = [-3; -1/2) \cup (1/2; 3]$$

∴ FFF

79. Resolver: $\sqrt{1-x} + \sqrt{x+1} \geq x-4$

Si el conjunto solución es: $S = [a; b]$, calcule el valor de: $T = (a+b)^{a+b+2}$

Resolución:

$$\text{De } \sqrt{1-x} + \sqrt{x+1} \geq x-4$$

$$1-x \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \wedge x \geq -1$$

$$\text{Intersecando: } -1 \leq x \leq 1 \quad \dots(\alpha)$$

Con esto, veamos el signo del 2.º miembro.

$$\text{Si } -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -5 \leq x-4 \leq -3$$

es (-)

La desigualdad se verifica $\forall x$, en (α) , dado que el primer miembro siempre será positivo mientras que el segundo será negativo.

$$CS = [-1; 1]$$

Identificando con el dato: $a = -1; b = 1$

$$\text{Luego: } T = (-1+1)^{-1+1+2} = 0^2 = 0$$

80. Sea el conjunto: $A = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x^2-x-2} + x > 1\}$
hallar el conjunto por extensión.

Resolución:

$$\text{De } A: \sqrt{x^2-x-2} > 1-x$$

$$\text{i. } 1-x \geq 0 \wedge x^2-x-2 > (1-x)^2$$

$$\text{ii. } 1-x < 0 \wedge x^2-x-2 \geq 0$$

$$\text{De (i): } x \leq 1 \wedge x^2 = x-2 > 1-2x+x^2$$

$$x \leq 1 \wedge x > 3$$

$$\text{Intersecando: } x \in \emptyset \quad \dots(S_i)$$

$$\text{De (ii): } x > 1 \wedge (x+1)(x-2) \geq 0$$

$$x > 1 \wedge (x \leq -1 \vee x \geq 2)$$

$$\text{Intersecando: } x \geq 2 \quad \dots(S_{ii})$$

$$\text{Luego: } CS = S_i \cup S_{ii} = \emptyset \cup [2; +\infty)$$

$$\therefore CS = [2; +\infty)$$

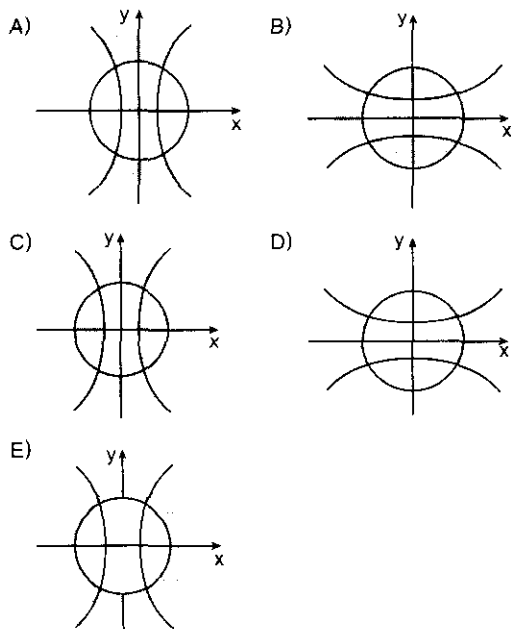


PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



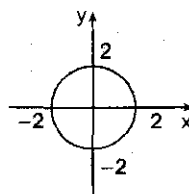
PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

El gráfico del conjunto solución del sistema de inecuaciones: $x^2 + y^2 \geq 4 \wedge x^2 - y^2 \geq 1$
es representado por la región sombreada:



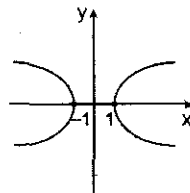
Resolución:

$$x^2 + y^2 \geq 4$$

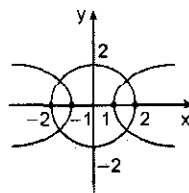


$$x^2 - y^2 \leq 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 + y^2 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{1 + y^2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{1 + y^2} \leq x \leq \sqrt{1 + y^2}$$



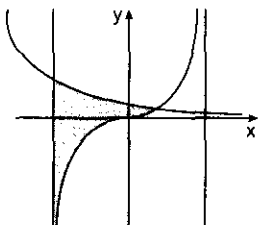
Intersección de gráficas:



Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

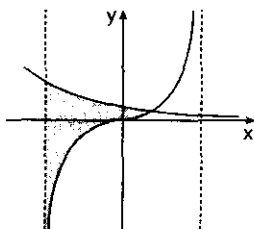
La región sombreada de la figura mostrada, representa el conjunto solución de un sistema de inecuaciones. Determine dicho sistema.



- A) $\begin{cases} y + e^{-x} \leq 0 \\ y - \tan x \geq 0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y - e^{-x} \geq 0 \\ y - \tan x \leq 0 \end{cases}$ C) $\begin{cases} y + e^{-x} \leq 0 \\ y + \tan x \geq 0 \end{cases}$
D) $\begin{cases} y - e^{-x} \geq 0 \\ y + \tan x \leq 0 \end{cases}$ E) $\begin{cases} y - e^{-x} \leq 0 \\ y - \tan x \geq 0 \end{cases}$
 $x \leq \pi/2$ $x \geq \pi/2$

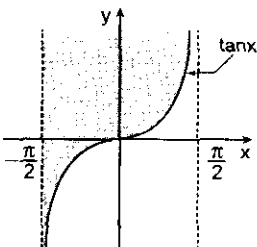
Resolución:

De la gráfica:



Tenemos:

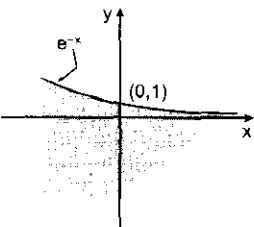
I.



Donde: $x \geq \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow y - \tan x \leq 0$

II.



$\Rightarrow$ Donde: $y - e^{-x} \leq 0$

...(S₁)

...(S₂)

El sistema pedido será determinado por la intersección de S₁ con S₂

$$y - e^{-x} \leq 0; y - \tan x \geq 0; x \leq -\frac{\pi}{2}$$

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

Halle el conjunto solución del sistema de inecuaciones:

$$\sqrt{1+x+2\sqrt{x}} \geq 1 - \sqrt{x} \geq 0$$

- A) $[0; +\infty)$ B) $(0; +\infty)$
C) $(0; 1)$ D) $[0; 1]$
E) $(1; +\infty)$

Resolución:

Se tiene:

$$\begin{array}{c} \text{II} \\ 0 \leq 1 - \sqrt{x} \leq \sqrt{1+x+2\sqrt{x}} \\ \text{I} \end{array}$$

De I: $\sqrt{x} \leq 1$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{array} \right\} 0 \leq x \leq 1 \quad \dots(\alpha)$$

De II: $1 - \sqrt{x} \leq \sqrt{1+x+2\sqrt{x}}$
radical doble

$$1 - \sqrt{x} \leq \sqrt{x} + 1 \Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{x} \Rightarrow x \geq 0 \quad \dots(\beta)$$

Finalmente, $\alpha \cap \beta$: CS = $[0; 1]$

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - I)

Sea la inecuación:

$$\left| \frac{|x|+1}{|x-1|} \right| \leq \frac{2x}{|x|}$$

Si S es el conjunto solución, se puede afirmar:

- A) $\langle -1; 1 \rangle \subset S$ B) $S \setminus [-1; 4] \neq \emptyset$
C) $S \setminus \langle -1; 1 \rangle = \emptyset$ D) $\langle 0; 2 \rangle \subset S$
E) $\langle -2; 0 \rangle \subset S$

Resolución:

$$\left| \frac{|x|+1}{|x-1|} \right| \leq \frac{2x}{|x|}$$

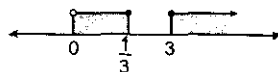
Notamos que: $x > 0 \wedge x \neq 1$

$$\frac{x+1}{|x-1|} \leq \frac{2x}{x} \Rightarrow |2x-2| \geq x+1$$

Entonces:

$$2x-2 \geq x+1 \wedge 2x-2 \leq -x-1$$

$$x \geq 3 \wedge x \leq \frac{1}{3} \wedge x > 0$$



$$CS = \left[0; \frac{1}{3} \right] \cup [3; +\infty)$$

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2012 - II)

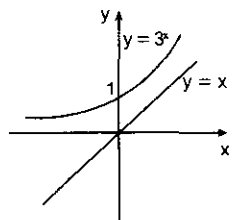
Luego de resolver la inecuación: $3^{1-x} < \frac{3}{x}$, se obtiene que x pertenece al intervalo:

- A) $\langle 0; +\infty \rangle$ B) $\langle 1; +\infty \rangle$
 C) $\langle 2; +\infty \rangle$ D) $\langle 3; +\infty \rangle$
 E) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

Resolución:

$$0 < 3^{1-x} < \frac{3}{x} \Rightarrow 0 < \frac{x}{3} < 3^{x-1} \Rightarrow \frac{x}{f(x)} < \frac{3^x}{g(x)}$$

Gráficamente: $f(x) < g(x)$; se verifica si $x \in \langle 0; +\infty \rangle$



Clave: A



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. En base al polinomio cuadrático $P(x) = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$
Indicar qué proposiciones son verdaderas.
- I. Si $a > b \wedge 4ac - b^2 > 0$, entonces $P(x) > 0$, siempre sería resuelto por puntos críticos.
- II. Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces $P(x) \leq 0$, se verifica únicamente para un elemento real.
- III. Si $a < 0 \wedge b^2 - 4ac < 0$, entonces $P(x) < 0$, se verifica $\forall x \in \mathbb{R}$.
- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III
2. Dado los conjuntos:
 $A = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + x + 1 > 0\}$
 $B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 8x + 16 > 0\}$
hallar: $A - B$
- A) $\{-4\}$ B) $\{2\}$ C) $\{1\}$
D) $\{-3\}$ E) $\{4\}$
3. Luego de resolver la inecuación:
 $(x + m)(n - x) \geq 0$; $0 < n < m$
el intervalo al cual pertenece x es $\in [-9; 5]$.
Hallar: $n + m$
- A) -4 B) 4 C) -14
D) 14 E) -2
4. Dada la inecuación en x :
 $mx + (n - 1)x + 2 \leq (m - n)x$
se obtiene como CS = $\{-\infty; -2\}$. Calcular: $2^n - n^2$
- A) 0 B) 1 C) -1 D) 2 E) -2
5. Resolver la inecuación en x :
 $10x^2 + 3ax - a^2 \geq 0$; $a > 0$
- A) $\left(-\frac{a}{2}; \frac{a}{5}\right)$ B) $\left[-\infty; -\frac{a}{2}\right] \cup \left[\frac{a}{5}; +\infty\right)$
C) $\left(-\frac{a}{2}; +\infty\right)$ D) $[-a/2; a/5]$
E) $\left[-\frac{a}{2}; +\infty\right)$
6. Si $f(x - 1) = x^2 - 2x$, resolver: $f(x) \leq 0$
- A) $\langle -1; 1 \rangle$ B) $[-1; 1]$ C) $\langle -1; 0 \rangle$
D) $\langle 0; 1 \rangle$ E) $\mathbb{R}$
7. Si la inecuación: $x^2 - 10x - 200 \leq 0$, tiene CS = $[a; b]$, indicar $(a + b)^2$.
- A) 50 B) 36 C) 49 D) 100 E) 90
8. Determinar el mayor valor entero M, si:
 $14x^2 + 56x + 6 > 14M$; $\forall x \in \mathbb{R}$
- A) -4 B) -3 C) -2
D) 4 E) 3

9. Resolver: $\frac{2x^2 - x}{3} \leq \frac{x^2 + 5}{2}$
- A) $x \in [-3; 5]$ B) $x \in [2; 5]$ C) $x \in [3; 5]$
D) $x \in [-2; 5]$ E) $x \in [-1; 5]$
10. Resolver: $x^2 - 9x + 20 > 20$
 $x^2 - 11x + 24 < 0$
- A) $\langle 3; 4 \rangle \cup \langle 5; 8 \rangle$ B) $\langle 3; 7 \rangle \cup \langle 8; 10 \rangle$
C) $\langle 3; 4 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle$ D) $\langle 1; 3 \rangle \cup \langle 5; 8 \rangle$
E) $\langle 2; 4 \rangle \cup \langle 5; 8 \rangle$
11. Si la siguiente inecuación: $x^2 + mx + n > 0$, tiene por CS = $\{-\infty; -4\} \cup \langle 2; +\infty \rangle$; hallar: $m + n$
- A) 4 B) -2 C) -6
D) 8 E) -8
12. Resolver $x^2 \leq 2m$ y dar como respuesta el producto de los valores enteros que verifican la inecuación, si $m > 0$.
- A) 2 B) -1 C) -2
D) 1 E) 0
13. Resolver: $(x - 6)^2 > -9$
- A) $\langle -3; 3 \rangle$ B) $[-3; 3]$
C) $\emptyset$ D) $\langle -\infty; 3 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$
E) $\mathbb{R}$
14. Resolver: $2x + 20 \leq (x + 2)(x + 4)$
- A) $\langle -\infty; -6 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$
B) $\langle -\infty; -6 \rangle \cup [2; +\infty)$
C) $\langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$
D) $\langle -\infty; -5 \rangle \cup [1; +\infty)$
E) $\langle -\infty; -4 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$
15. Resolver: $x^2 - x - 30 > 0$
- A) $\langle -5; 6 \rangle$ B) $\mathbb{R}$
C) $[-6; 15]$ D) $\langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle 6; +\infty \rangle$
E) $\emptyset$
16. Indicar si es verdadero (V) o falso (F) la expresión:
- $(x - 2)^2 \leq 0 \Rightarrow \text{CS} = \langle -\infty; 2]$
 $(x - 2)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{CS} = [2; +\infty)$
 $(x - 2)^2 > 0 \Rightarrow \text{CS} = \mathbb{R} - \{2\}$
 $(x - 2)^2 < 0 \Rightarrow \text{CS} = \{2\}$
- A) VVVV B) VVFF C) VFFF
D) FFVF E) FFFV
17. La inecuación cuadrática $x^2 + ab < (a + b)x$, tiene como CS = $\langle 2; 3 \rangle$. Calcular: $2(a + b) + (ab)^{-1} - 1/6$
- A) 5^3 B) 15 C) 25
D) 25^{-1} E) 10

18. Resolver: $2x^2 - 3x \leq (-1)^5$ y dar como resultado la suma del mínimo y el máximo valor que toma la inecuación.

A) 1/2 B) 5/2 C) 1 D) 3/2 E) 7/3

19. Halla la solución de la inecuación: $-x^2 + 8x - 7 > 0$

A) $\langle 1; 7 \rangle$ B) $\langle -1; 7 \rangle$ C) $\langle -1; 5 \rangle$
D) $\langle 2; 7 \rangle$ E) $\langle 3; 7 \rangle$

20. Si $x^2 + 2x - 3 = 0$, tiene CS = $\{a; b\}$, resolver la inecuación: $x^2 + (3a + 1)x \geq 5a - b$; $a < b$

A) $\emptyset$ B) $\mathbb{R} - \{2\}$ C) $\mathbb{R} + \{2\}$
D) $\{2\}$ E) $\mathbb{R}$

21. Si: $x^2 - 12x + 32 \geq 0 \wedge x^2 - 13x + 22 < 0$, tiene como conjunto solución A y B, respectivamente. Indicar $A \cap B$.

A) $[4; 11]$ B) $[2; 4]$
C) $\langle 2; 4 \rangle \cup [8; 11]$ D) $\langle 4; 8 \rangle$
E) $[4; 8] \cup \langle 11; +\infty \rangle$

22. Si $x \in \langle 3; 4 \rangle$, hallar la variación de $x^2 - 4x + 6$ intersecado con la variación de $x^2 + 2x + 3$.

A) $\langle 6; 9 \rangle$ B) $\langle 5; 9 \rangle$ C) $\langle 2; 6 \rangle$
D) $\langle 5; 6 \rangle$ E) $\emptyset$

23. Resolver: $6x - x^2 + 7 \geq 0$
Luego indicar la intersección de su conjunto solución con el intervalo $[-4; 5]$.

A) $[-4; 7]$ B) $\langle -4; -1 \rangle \cup \langle 5; 7 \rangle$
C) $[-1; 5]$ D) $[-1; 5]$
E) $\langle -1; 5 \rangle$

24. Resolver $x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})x + \sqrt{6} \geq 0$. Hallar el complemento de su CS e indicar todos sus elementos enteros.

A) $\{2; 3\}$ B) $\{1; 2\}$ C) $\{2; 3\}$
D) No tiene E) $\{1\}$

25. Resolver: $x^2 + 1 < 2x - 14 \leq 10$

A) $\langle 2; 3 \rangle$ B) $\langle 2; 3 \rangle$ C) $\langle -2; 3 \rangle$
D) $[2; 3]$ E) $\emptyset$

26. Si: $E = [-1; 2]$

$$H = \{x \in \mathbb{R} / (x - 4) \in E\}$$

$$J = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 - 5x < 6\}$$

hallar $H \cap J$.

A) $[1; 4]$ B) $\langle 1; 4 \rangle$ C) $\{1; 4\}$
D) $\{1; 2; 3; 4\}$ E) $\{3; 4; 5\}$

27. Resolver e indicar la suma de soluciones enteras $(x + 5)^2 + (x + 6)^2 < (x + 7)^2$

A) -20 B) -14 C) -12 D) 6 E) -6

28. Si la inecuación en x : $3x^2 + nx + m \geq 0$; $n \neq 0$ tiene como CS = $\langle -\infty; m \rangle \cup [n; +\infty)$. Calcular: $n^2 + m$

A) 1/3 B) -1/3 C) 3
D) 5/9 E) -5/3

29. La inecuación $x^2 + ax + a \leq 1$, tiene como CS = $\{b\}$. Calcular: $a^2 + b^2$

A) 3 B) 0 C) 5
D) 2 E) 4

30. Hallar la suma de elementos enteros que verifiquen la inecuación: $x^2 - 5x + 4 < 0$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

31. Proporcionar uno de los intervalos del conjunto solución de:

$$\frac{(x^2 - 3)^2 - 3(x^2 - 3) + 2}{(x^2 - 5)^2 + 5(x^2 - 5) + 4} \leq 0$$

A) $\langle -2; 2 \rangle$ B) $\langle -3; -2 \rangle$ C) $[-2; -1]$
D) $[1; 2]$ E) $[2; \sqrt{5}]$

32. Sabiendo que la siguiente inecuación cuadrática: $ax^2 + (1 - 2a)x + a \geq 0$ se verifica para todo $x \in \mathbb{R}$, hallar el conjunto de los valores de "a".

A) $\langle -\infty; 2 \rangle$ B) $[1/4; +\infty)$ C) $[2; 3]$
D) $[1; +\infty)$ E) $\langle 1/4; +\infty)$

33. Determinar para qué valor de n se verifica la desigualdad:

$$\frac{x^2 + nx - 1}{2x^2 - 2x - 3} < 1; \forall x \in \mathbb{R}$$

A) $\langle -2; 3 \rangle$ B) $\langle -2; +\infty \rangle$ C) $\langle -4; 2 \rangle$
D) $\langle -6; 2 \rangle$ E) $\langle -4; 8 \rangle$

34. ¿Cuáles de las siguientes equivalencias son correctas?

I. $\frac{x+1}{x^2+3} < 0 \Leftrightarrow x+1 < 0$

II. $\frac{x-2}{x+3} > 1 \Leftrightarrow (x-2) > (x+3)$

III. $\frac{x^2+1}{x} < 0 \Leftrightarrow x < 0$

IV. $\frac{2}{(x-2)^2} > 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 < 2; (x \neq 2)$

A) Todas B) I; II; III C) II; III; IV
D) I; III; IV E) I; II; IV

35. Dado el siguiente conjunto:

$$A = \left\{ x - 1 / \frac{(x+4)^4}{(x-2)^5(x+1)^3} \geq 0 \right\}$$

calcular la suma de los valores enteros de A' .

A) -2 B) -3 C) 2
D) 1 E) 5

36. Determinar el menor valor entero de m , para que el trinomio $mx^2 + (m-1)x + (m-1)$, sea positivo para cualquier valor real de x .

A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

37. Luego de resolver la inequación:

$$\frac{(x+5)(x^2+30)(x-5)}{x^2-14x+45} \leq 0$$

calcular el número de elementos enteros del CS.

A) 14 B) 13 C) 15
D) 12 E) 11

38. Resolver: $\frac{x-2}{x-3} < \frac{x+1}{x}$ e indicar un intervalo solución.

A) $0 < x < 3$ B) $-2 < x < 1$
C) $-5 < x < 0$ D) $-3 < x < -1$
E) $-5 < x < 2$

39. Sabiendo que: $(x-10)^2 - 6(x-10) + 8 < 0$, además: $\lambda = (x-10)^2 - 6x + 68$. Determinar el conjunto de todos los valores posibles para λ .

A) $\{12; 14\}$ B) $\{-1/2; 0\}$ C) $[-1; 0)$
D) $(-\infty; 0)$ E) $(-1; 0]$

40. Resolver el sistema en $\mathbb{Z}$:

$$3y - 2 > 2x + 3; \quad x + y > 5; \quad x + 3y < 15$$

Indicar el valor de: $E = \sqrt[3]{x^{y+a} y^{x+b}}$; si $a + 2b = 0$

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 1

41. Hallar los valores de x , para los cuales no se cumple la inequación:

$$\frac{x^5 - 9x^3 - x^2 + 9}{x^3 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} \geq 0$$

A) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ B) $(-3; 3) - \{1\}$
C) $[-3; 3] - \{1\}$ D) $(-3; 3)$
E) $[-3; 3]$

42. Resolver: $(x-a)(x-b)(x-c) < 0$ si se cumple: $a < b < c$

A) $x \in (a; b)$ B) $x \in (a; c)$
C) $x \in (b; c)$ D) $x \in (c; a)$
E) $x \in (-\infty; a) \cup (b; c)$

43. Resolver la inequación: $\frac{(2x+10)(x-4)^5(x-9)^3}{(x+2)^4(x-3)^5(x-6)} \leq 0$

Dar como respuesta la suma de los valores enteros de su CS.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 19 E) 21

44. Resolver la inequación: $10 + \frac{2}{x-7} - \frac{4x-3}{x-7} < \frac{x}{x-7}$

Dar como respuesta la suma de los valores enteros que la verifican.

A) 70 B) 50 C) 57
D) 38 E) 76

45. Sabiendo que $a < b$, además el CS del sistema: $6x^2 + 25x - 9 \leq 0 \wedge x^2 - (a+b)x + ab \geq 0$ admite dos elementos, calcular ab .

A) 1,5 B) 0,5 C) -0,25
D) -0,5 E) -13,5

46. Indicar el CS de la inequación racional:

$$\frac{(2x-1)^2(x+2)^5(x-3)^2}{(x^2+4x+5)(x-6)^5} < 0$$

A) $(-2; 6)$ B) $(-2; 3) - \{1/2\}$
C) $(-2; 6) - \{1/2; 3\}$ D) $(-2; \frac{1}{2}) \cup (3; 6)$
E) $(\frac{1}{2}; 6) - \{3\}$

47. Calcular el CS de: $\frac{(x-3)(x^2-2x-15)}{(x^2-8x+16)(x-3)} \leq 0$

Dar como respuesta la suma de sus valores enteros.

A) 1 B) 2 C) 4
D) 5 E) 7

48. Si el CS de la inequación: $(a-3)x^2 + 5x + (b-2) < 0$ es $(\frac{3}{2}; \frac{1}{4})$, calcular el valor de: $a + 2b$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 0 E) -4

49. Si S es el conjunto solución de la desigualdad:

$$\frac{x^{13}(x+3)^{16}(x-5)^{30}}{(x^3-27)(4x+16)} \geq 0$$

entonces, qué se cumple.

A) $[-4; 0] \subset S$ B) $[3; +\infty) \subset S$
C) $S = \{-4; 0\} \cup (3; +\infty)$ D) $[0; 3) \cap S = \emptyset$
E) $\{-3\} \subset S$

50. Si $\lambda = 3$, dar el conjunto de todos los valores de x que satisfacen: $x^\lambda \geq x^{\lambda-2}$; $x^{\lambda-1} < \frac{x^{\lambda-2}}{x}$

A) $[-1; 0)$ B) $(-1; 0]$ C) $[-1; 0]$
D) $(0; 1)$ E) $(-1; 0)$

51. Sabiendo que el conjunto solución de:

$$\frac{(x^2+x-2)(x^2-x-6)}{x^3+1} < 0$$

es $(-\infty; a) \cup (a; b) \cup (c; 3d)$, resolver:

$$ax + b \leq cx + d$$

A) $x \leq -\frac{3}{4}$ B) $x > -\frac{4}{3}$ C) $x < -\frac{4}{3}$
D) $x \geq -\frac{3}{4}$ E) $x \geq -\frac{1}{3}$

52. Calcular la suma de los elementos enteros que satisfacen la desigualdad:

$$5x - 11 \leq (x - 1)^2 \leq 7x - 17$$

- A) 15 B) 11 C) 9
D) 22 E) 18

53. Luego de resolver la inecuación: $\frac{(x+2)^3(x+7)^7}{(x-4)^2(x-5)} \leq 0$
Dar como respuesta el mayor elemento entero del CS.

- A) 5 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1

54. Dada la inecuación: $\frac{x+a}{x-a} > \frac{x+b}{x-b}$
Con: $-a > -b > 0$, dar como respuesta un intervalo solución.

- A) $(0; +\infty)$ B) $(a; b)$ C) $(a; 0)$
D) $(-\infty; 0)$ E) $(b; 0)$

55. Se va a doblar en forma de rectángulo un alambre de 14 metros de largo. ¿Qué condición debe satisfacer el lado más corto si la diagonal del rectángulo ha de medir menos de 5 metros?

- A) Entre 3 m y 3,5 m
B) Entre 3,5 m y 4 m
C) Entre 2,5 m y 3 m
D) Entre 3 m y 4 m
E) Entre 2 m y 3 m

56. Determinar el número entero x , tal que:

$$\frac{x}{x+1} < \frac{12}{19} < \frac{x+1}{x+2}$$

- A) 2 B) 3 C) 1
D) 4 E) 5

57. Luego de resolver: $\frac{x}{x-1} + \frac{x-1}{x} < \frac{2x}{x+1}$
Indicar el mayor valor entero que verifica la inecuación.

- A) -3 B) -2 C) -1
D) -4 E) -6

58. Con respecto a la desigualdad:

$$x^{14} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$$

se puede afirmar que es verdadera cuando:

- A) $x < 0$; únicamente
B) $0 < x < 1$; únicamente
C) $x < 1$; únicamente
D) x es cualquier real
E) $x \in \mathbb{R} - (0; 1)$

59. Hallar el menor número entero x , tal que:

$$\frac{x^2 + 5x - 10}{x^2 + 2x - 8} > 1$$

- A) -4 B) -3 C) -2
D) 1 E) 2

60. Escoger el mayor elemento del CS de:

$$\frac{x^2 + 4x + 1}{4x^2 + x + 9} + \frac{9x^2 + 6x + 19}{5(x^2 + x + 2)} \leq 2$$

- A) $\sqrt{3} - 1$ B) $\sqrt{3} + 2$ C) $-\sqrt{3} + 2$
D) $\sqrt{3} - 2$ E) $\sqrt{3} + 1$

61. Indicar el número de valores enteros de p , tal que:
 $(p^2 - 1)x^2 + p(p + 1)x + (p + 1) \leq 0$
 $p \neq \pm 1$, se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$.

- A) 4 B) 3 C) 2
D) 1 E) 0

62. Si $x \in (a; 2a)$ y $(x + a)(x - 3a) \in (A; B)$; $a \neq 0$.
Calcular $\left(\frac{A}{B}\right)$.

- A) $4/3$ B) $1/2$ C) $2/3$
D) $1/5$ E) $3/7$

63. Sea $\{a; b\} \subset \mathbb{R}$, tal que: $a < 0 < b$. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $a^2 + b^2 > 2ab$ II. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$

III. $a^{-1} < b^{-1}$ IV. $a < \frac{a+b}{2} < b$

V. $\sqrt[4]{4b} > \sqrt[3]{3a}$

- A) VVVVV B) VFVVV C) FVVVV
D) VVFFF E) VFVFF

64. Si: $x < a < 0$, entonces se cumple:

- I. $x^2 < ax < 0$
II. $x^2 > a^2 > 0$
III. $x^2 > a^2$, pero $a^2 < 0$
IV. $x^2 > ax > a^2$
V. $x^2 > ax$, pero $ax < 0$

- A) I y II B) II y IV C) Solo II
D) Solo I E) Solo V

65. Si $(a + b)(b + c)(a + c) \geq kabc$
hallar el máximo valor de k , si: $a; b; c \in \mathbb{R}^+$.

- A) 2 B) 5 C) 10
D) 12 E) 8

66. Si $a \in \mathbb{R}$ y se cumple: $a^2 + \frac{25}{a^2 + 1} \geq M$
hallar el mayor valor de M .

- A) 2 B) 5 C) 9
D) 12 E) 18

67. Si $(m; n; p; q) \subset \mathbb{R}^+$, tal que $\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)\left(\frac{n}{p} + \frac{q}{m}\right) \geq k$
indicar el mayor valor de k que verifica la desigualdad.

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 7

68. Sean: $\{a; b; c; d\} \subset \mathbb{R}^+$, tal que: $a^2 + b^2 = 1 \wedge c^2 + d^2 = 1$
Encontrar el máximo valor de: $ab + cd$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 8

69. Si $\frac{-3}{2x+1} \in [1; 8)$, determinar el menor valor de x .

A) -2 B) 4 C) 3
D) 7 E) 8

70. De las siguientes desigualdades, indicar la correcta:

I. $\sqrt{2} < \sqrt[5]{5}$
II. $\sqrt{10} - 2 < \sqrt{17} - \sqrt{11}$
III. $\sqrt{5} + \sqrt{24} \leq \sqrt{3} + \sqrt{2}$
IV. $\sqrt{11} + \sqrt{112} - \sqrt{11} - \sqrt{112} > 5$

A) III B) I y II C) IV
D) I E) II

71. Determinar el valor de verdad de las siguientes afirmaciones:

I. Si: $a < 0$; $b > 0 \Rightarrow a^2 - ab > 0$
II. Si: $\frac{1}{a}; \frac{1}{b} \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geq 4$
III. Si: $a; b; c \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ac$,
a menos que: $a = b = c$.

A) VVV B) VVV C) FFF
D) FFV E) VVF

72. Si $a; b; c$ son números positivos, ¿cuál es el menor valor que puede tomar M ?

$$M = \frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(a+c)^2}{ac}$$

A) 12 B) 15 C) 36
D) 5 E) 8

73. Si $\frac{1}{2x+8} \in \left[\frac{1}{12}; 2\right]$, entonces: $x \in [m; n]$.

Hallar $4mn$.

A) -80 B) -2 C) -15
D) -60 E) -30

74. Resolver en x : $ax^2 + (a+1)x + 1 < 0$
si: $a \in (-1; 0)$

A) $x \in (-\infty; -1) \cup (-1/a; +\infty)$
B) $x \in (-\infty; 2)$
C) $x \in (-5; 2)$
D) $x \in (2; 3)$
E) $x \in (1; 8]$

75. Sea $x \in \mathbb{R}^+$, encontrar el mayor valor de k para el cual se cumple: $\frac{x}{2} + \frac{3}{x} \geq k$

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) 3

76. Resolver la inecuación en x :

$$a^2(x-1) + a(x-a) - 1 > a - x - a^2$$

e indicar el mínimo valor de x ($x \in \mathbb{N}$).

A) 2 B) 3 C) 4
D) 1 E) 5

77. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si: $a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow \frac{b+1}{a} > \frac{1}{a}$

II. Si: $a > 0 \wedge b < 0 \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a}{b-a}$

III. Si: $\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}^+$, $a \neq b \neq c$
 $\Rightarrow (a+b)(a+c)(b+c) > 8abc$

A) FFF B) VVV C) VFF
D) FVF E) FFV

78. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Para $a \neq 0$; $a \in \mathbb{R}$, si $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$.

II. Para $a; b \in \mathbb{R}^+$: $a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$.

III. Para $a; b \in \mathbb{R}_0^+$: $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 0 \Leftrightarrow a = 0 \wedge b = 0$.

A) VVV B) FFV C) VFF
D) VVV E) FFF

79. Si $x > 0 \wedge y > 0 \wedge x + y = 1$, hallar el mayor valor de m , tal que: $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq m$

A) 12 B) 9 C) 5
D) 2 E) 1

80. Calcular el mayor valor de m , si: $2m\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$
 $\forall a; b \in \mathbb{R}_0^+$

A) 8 B) 1/2 C) 2
D) 4 E) 3

81. Hallar el mayor valor de m , si: $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + ac + bc} \geq 2m$

$$\{a; b; c\} \subset \mathbb{R}, (ab + ac + bc) > 0$$

A) 1/2 B) -1 C) 2
D) 4 E) -8

82. Calcular el menor valor de la expresión:

$$a(\sqrt{a} + 3\sqrt{b}) + b(\sqrt{b} + 3\sqrt{a}), \text{ donde } a; b \in \mathbb{R}_0^+$$

A) 3 B) 1 C) 0
D) 6 E) 2

83. Si $p + q + r = 7$; $\{p; q; r\} \subset \mathbb{R}^+$, calcular el mayor valor de m : $(7-p)(7-q)(7-r) \geq mpqr$

A) 2 B) 5 C) 7
D) 8 E) 10

84. Si la desigualdad: $x^2 + y^2 + z^2 \geq n(xy + yz + xz)$
se cumple $\forall x; y; z \in \mathbb{R}$. Hallar el mayor valor de n .

A) 3 B) 1 C) 4 D) 8 E) 5

85. Determinar en qué intervalo se encuentra la expresión:

$$\frac{x^2}{x^2 + 1}, \text{ si } x \in \mathbb{R}.$$

- A) $\langle 2; 3 \rangle$ B) $[0; 1)$ C) $\langle -1; 2]$
D) $\langle 2; 5]$ E) $\langle -1; 8]$

86. Hallar el mayor valor de P:

$$\frac{9(4m^2 + 4)}{m} \geq P; m \in \mathbb{R}^+$$

- A) 24 B) 36 C) 51
D) 28 E) 72

87. Resolver: $(x - 2)(x + 1) \leq 0$

- A) $x \in \langle -2; 1 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$
B) $x \in \langle -1; 2 \rangle$
C) $x \in \langle -3; 2 \rangle$
D) $x \in \langle -3; -1 \rangle \cup \langle 2; +\infty \rangle$
E) $x \in \langle -3; -2 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$

88. Resolver: $x^2 - 3x - 1 \leq 0$

- A) $\left[\frac{3 - \sqrt{13}}{2}; \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right]$ B) $[-1; 4]$
C) $\left\langle -\infty; \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \right\rangle$ D) $\mathbb{R}$
E) $[-\sqrt{3}; \sqrt{13}]$

89. Resolver: $x^2 - 2x - 4 > 0$
Indicar su intervalo solución.

- A) $\langle -1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10} \rangle$
B) $\langle 1 - \sqrt{10}; -1 + \sqrt{10} \rangle$
C) $\langle -\sqrt{10}; \sqrt{10} \rangle$
D) $\langle -\infty; 1 - \sqrt{10} \rangle \cup \langle 1 + \sqrt{10}; +\infty \rangle$
E) $\mathbb{R}$

90. Resolver: $(x + 7)(x - 2) < 0$
Indicar su intervalo solución.

- A) $x \in \langle -7; 2 \rangle - \{-5\}$
B) $x \in \langle -7; -2 \rangle$
C) $x \in \langle -7; 2 \rangle$
D) $x \in \langle -7; 2 \rangle \cup \{5\}$
E) $x \in \mathbb{R}$

91. Resolver: $x - 4 + \frac{5}{x-6} \geq 8 - x + \frac{5}{x-6}$

- A) $x \in [6; +\infty)$ B) $x \in \langle 6; +\infty \rangle$
C) $x \in \langle -\infty; 6 \rangle$ D) $x \in \langle -\infty; 6]$
E) $x \in \emptyset$

92. Resolver: $\frac{4x-3}{2} > \frac{5x-1}{3}$

- A) $x < \frac{7}{2}$ B) $x > \frac{7}{2}$ C) $x < \frac{11}{2}$
D) $x > \frac{11}{2}$ E) $x \in \mathbb{R}$

93. Resolver: $6x + 3 \leq 5x + 1 < 7x + 9$

- A) $x \in \langle -\infty; -2]$ B) $x \in \langle -4; +\infty \rangle$
C) $x \in \emptyset$ D) $x \in [-4; -2]$
E) $x \in \langle -4; -2]$

94. Resolver: $x^2 - 2x - 8 \leq 0$

- A) $x \in [-2; 4]$ B) $x \in \mathbb{R}$ C) $x \in \emptyset$
D) $x \in [-4; 2]$ E) $x \in [-1; 1]$

95. Resolver: $25x^2 - 20x + 4 < 0$

- A) $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{2}{5} \right\}$ B) $x \in \emptyset$ C) $x \in \mathbb{R}$
D) $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{2} \right\}$ E) $x \in \left[\frac{2}{5}; \frac{5}{2} \right]$

96. Indicar cuántos valores enteros no negativos verifican: $4x^2 - 4x - 49 < 0$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

97. Determinar cuántos valores enteros verifican la siguiente desigualdad:

$$\frac{x(2x - 28)}{98} \leq -1$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) Infinitos

98. Resolver $x^2 \leq 9$, y dar su intervalo solución.

- A) $[-3; 3]$ B) $\langle -\infty; -3] \cup [3; +\infty \rangle$
C) $\mathbb{R}$ D) $\emptyset$
E) $\langle -3; 3 \rangle$

99. Resolver: $x^2 > 9$, y dar un intervalo de su solución.

- A) $\langle -3; 3 \rangle$ B) $\langle -3; +\infty \rangle$ C) $\langle 3; +\infty \rangle$
D) $\mathbb{R}$ E) $\emptyset$

100. Resolver: $3x^2 - 11x + 6 < 0$, e indicar su intervalo solución.

- A) $\left[\frac{2}{3}; 3 \right]$ B) $\left\langle -\infty; \frac{2}{3} \right\rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$
C) $\left[\frac{2}{3}; 3 \right]$ D) $\emptyset$
E) $\langle 3; +\infty \rangle$

101. Calcular el máximo valor de la expresión:

$$\frac{100ab + 2a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}; \{a; b\} \subset \mathbb{R}^+$$

- A) 50 B) 52 C) 55
D) 60 E) 100

102. Dados $a; b \in \mathbb{R}$, tales que $a < b < 0$. Indicar el valor de verdad de las proposiciones.

- I. $a^n < b^n < 0$, si n es par
II. $\frac{1}{a^n} < \frac{1}{b^n} < 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$
III. $\frac{a^n}{b^n} > 0 \forall n \in \mathbb{Z}^+$

- A) VFF B) FFV C) VVV
D) FFF E) FVF

103. Si $x \in \{-3; 1\}$, determinar el único valor entero que toma la expresión: $\frac{x-1}{x+5}$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) -2 E) 2

104. Si $(5x - 16) \in (-1; 9)$ y además: $\frac{2}{3x+5} \in \left(\frac{m}{21}, \frac{n}{50}\right)$, calcular: ${}^{n-m}\sqrt{n+m}$

- A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}$ E) $\sqrt[3]{9}$

105. Si $(3^x - 7) \in (20; 236]$, hallar el intervalo que corresponde a: $2^x + 9$

- A) $[17; 41]$ B) $\langle 17; 41]$ C) $\langle 17; 40]$
D) $\langle -17; 39]$ E) $\langle -17; 40]$

106. Determinar el menor valor de M en:
 $-15 - x^2 - 6x \leq M; \forall x \in \mathbb{R}$

- A) -1 B) -9 C) 9
D) 6 E) -6

107. Si $x \in [2; 3]$, a qué intervalo pertenece: $\frac{2x+14}{x+1}$

- A) $[5; 6]$ B) $\langle 3; 7]$ C) $\{3; 9]$
D) $[1; 2]$ E) $[5; 8]$

108. Si $x \in [3; 5]$, además $a \leq \frac{x+1}{x-2} \leq b$, donde "a" es el mayor valor y "b" es el menor valor. Calcular: $a + b$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

109. Si $\frac{x}{3} \in \{-1; 7\}$, determinar a qué intervalo pertenece: $45 - 2x$

- A) $\langle 2; 7]$ B) $\langle 1; 9]$ C) $\langle -2; 15]$
D) $\langle 3; 48]$ E) $\{3; 51\}$

110. Calcular el mayor valor de k.

si se cumple: $\frac{\sqrt{a^4+1} + \sqrt{b^4+1}}{a+b} \geq k; a, b \in \mathbb{R}^+$

- A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$
D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

111. Calcular el menor valor de M, para que se verifique: $x^2 - 10x + 32 \geq M, \forall x \in \mathbb{R}$

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) 10

112. Calcular el menor valor que toma la expresión:

$$\frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{(b+c)^2}{bc} + \frac{(a+c)^2}{ac}; a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

- A) 2 B) 4 C) 6
D) 7 E) 10

113. Calcular el mayor valor de k, si:

$$\frac{x^2+x+1}{x-1} \geq k\sqrt{x}; x > 1$$

- A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $2\sqrt{7}$

114. Calcular el mayor valor de k, si se cumple:

$$\frac{x^2+4x+29}{x+2} \geq k; x > 0$$

- A) 5 B) 7 C) 9
D) 10 E) 12

115. Si $x \leq -2$ y $f(x) = \frac{1}{x^2-2}$, calcular el menor valor

de m que verifique: $f(x) \leq m$

- A) $1/4$ B) 4 C) $1/2$
D) 1 E) 2

116. Si $x \in [-1; 2]$, entonces $(1 - 4x - 4x^2) \in (m; n)$, calcular mn.

- A) -46 B) -23 C) -69
D) 23 E) 46

117. Si $(2x + 1) \in [5; 9]$, hallar el menor valor de M que verifique: $\frac{x+3}{x-5} < M$

- A) $5/3$ B) $-5/3$ C) $1/5$
D) $-1/3$ E) $1/3$

118. Dados los conjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -4 \leq x < 7\}$$

$$B = \{y \in \mathbb{R} / -4 < y \leq 5\}$$

$$C = \{z \in \mathbb{Z} / z \in A \wedge z \notin B\}$$

hallar la suma de elementos de C.

- A) 0 B) 2 C) 7
D) 14 E) 18

119. Si $(2x - 1) \in \langle -4; 1 \rangle$, calcular el mayor valor entero de: $4x^2 - 1$

- A) 1 B) 3 C) 8
D) 15 E) 7

120. Resolver: $x^2 - x - 6 \geq 0$, dar el intervalo solución.

- A) $\langle -\infty; 2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$ B) $\langle -\infty; 2 \rangle \cup [3; +\infty)$
C) $[2; 3]$ D) $\langle 3; +\infty \rangle$
E) $\langle -\infty; 2 \rangle$

121. Encontrar la suma de soluciones enteras de la inequación: $\sqrt{|x-1|-1} \geq \sqrt{8-|2-2x|}$

- A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

122. Sea A el número de pares de números reales (a; b) que son soluciones de la ecuación:

$$\sqrt{1-b} + \sqrt{b-1} = a^2 + b^2$$

hallar el valor de A.

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) ∞

123. Hallar el número de soluciones de la ecuación:

$$2t(\sqrt{1-16t^2}) = \sqrt{1-16t^2}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

124. Hallar el mínimo valor de "a", si:

$$x^2 + 3x + a - 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

- A) 13/4 B) 11/4 C) 10/3
D) 5/4 E) 7/3

125. Sea $B = [5; +\infty)$, el intervalo solución de:

$$x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3 \geq 8, \text{ hallar el menor valor de "a".}$$

- A) 1 B) 5 C) 2 D) 4 E) 3

126. Sea $A = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 + 1)(x^3 - 5) > 0\}$, indicar el complemento de A.

- A) $\langle -\infty; \sqrt[3]{5} \rangle$ B) $\langle -\infty; 3 \rangle$ C) $\langle -\infty; -\sqrt[3]{5} \rangle$
D) $\langle -\infty; 2 \rangle$ E) $\langle -\infty; 7 \rangle$

127. Resolver: $(x^3 - 1)(x^3 + 8) \leq 0$

- A) $[-2; 0]$ B) $\langle 3; 5 \rangle$ C) $\langle 2; 11 \rangle$
D) $\langle 2; 5 \rangle$ E) $[-2; 1]$

128. Resolver: $\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 3x + 2} \leq 0$

- A) $\langle -\infty; 1 \rangle \cup \langle 1; 2 \rangle \cup \langle 2; 3 \rangle$
B) $\langle -\infty; 2 \rangle - \{1\}$
C) $\langle -\infty; 3 \rangle$
D) $\langle -\infty; 4 \rangle$
E) $\langle -\infty; 3 \rangle$

129. Hallar los valores de x, tal que:

$$\frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x-3}}{\sqrt{x-5} - \sqrt{x-7}} \geq 0$$

- A) $\langle 2; +\infty \rangle$ B) $\langle 3; +\infty \rangle$
C) $\langle 5; +\infty \rangle$ D) $[7; +\infty)$
E) $[5; 7] \cup [-2; 3]$

130. Resolver: $\frac{3x+2}{5} \geq \frac{5x+3}{2}$

- A) $\langle -\infty; -\frac{11}{9} \rangle$ B) $\langle -\infty; 11 \rangle$ C) $\langle -\infty; 19 \rangle$
D) $\langle -\infty; 13 \rangle$ E) $\langle -\infty; 15 \rangle$

131. Hallar el intervalo de x, tal que: $x + 2 \leq 2x + 1 \leq 7$

- A) $[1; 3]$ B) $\langle 1; 2 \rangle$ C) $\langle 0; 1 \rangle$
D) $\langle 0; 3 \rangle$ E) $\langle -3; 0 \rangle$

132. Hallar el conjunto solución de:

$$x^2 - \sqrt{5+2\sqrt{6}}x + \sqrt{6} \leq 0$$

- A) $[\sqrt{2}; \sqrt{5}]$ B) $\{\sqrt{2}; \sqrt{3}\}$ C) $[-\sqrt{2}; \sqrt{3}]$
D) $[-\sqrt{3}; 1]$ E) $[-\sqrt{2}; 0]$

133. Sean los conjuntos: $A = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x + 6 \leq 0\} \wedge$
 $B = \{x \in \mathbb{R} / 2x - 5 > 0\}$, hallar: $A \cap B$

- A) $\langle \frac{5}{2}; 3 \rangle$ B) $\left\{ \frac{5}{2}; 3 \right\}$ C) $\langle 2; 3 \rangle$
D) $[2; 3]$ E) $\left[2; \frac{5}{2} \right)$

134. Hallar los valores de $x < 100$, tales que:

$$5\sqrt{x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 7x - 6} \geq x - 1$$

- A) $\left[\frac{5}{2}; 100 \right)$ B) $\left[\frac{5}{2}; \frac{7}{2} \right]$ C) $\left\langle \frac{3}{2}; \frac{5}{2} \right\rangle$
D) $\left[\frac{7}{2}; 9 \right]$ E) $\left\langle \frac{3}{2}; 100 \right\rangle$

135. Resolver: $\sqrt{\frac{x^3+3x+1}{x^3+2x+3}} + \sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^3+3x+1}} = 2$, e in-

dicar la solución aumentado en 1/3.

- A) 1/5 B) 2/3 C) 7/3
D) 3/7 E) 3/2

136. Resolver: $\sqrt{x^2 - 5x} \geq -x^2 + x - 1$

- A) $[0; 5]$ B) $[0; 2]$ C) $\langle 0; 5 \rangle$
D) $\langle 0; 2 \rangle$ E) $\langle 2; 5 \rangle$

137. Resolver: $|x - 5| + |x - 3| = 4$, e indicar el producto de valores de x.

- A) 12 B) 14 C) 16
D) 10 E) 8

138. Si la ecuación en x: $|x + 4| + x^2 - x = a - |y - 7|$, tiene como CS = $\emptyset$, hallar el mayor valor entero de "a".

- A) 0 B) -1 C) -2
D) 1 E) 2

139. Si x_0 es una solución no nula de la ecuación en x:

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+n| = \frac{n(n+1)}{2}$$

hallar el valor de: $(x_0 + n)^4$

- A) 1 B) 0 C) n^4
D) 16 E) 4

140. Al resolver: $|1 - \{1 - x\}| = a$; $a < 5$, calcular la suma de valores de x.

- A) 0 B) 1 C) 10
D) 4 E) 6

141. Al resolver la inecuación en x:

$$|x + 2| + |x - a| \leq |2x + 2 - a|$$

se obtiene CS = $\mathbb{R}$. Hallar el valor de "a".

- A) 2 B) 1 C) -2
D) -1 E) -4

142. Indicar el número de valores enteros que verifican

$$|x| + |x+1| + |x+2| \leq 3$$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

143. Calcular
- a
- y
- b
- , si:

$$f(x) = \begin{cases} a; & x \geq 5 \\ b/x; & 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

$$\text{siendo: } f(x) = \frac{|x-5| + |x-2| + |7|}{x}$$

- A) 2 y 5 B) 2 y 7 C) 3 y 7
D) 2 y 10 E) 2 y 3

144. Sea
- $a * b = \frac{|a+b| - |a-b|}{2}$
- ;
- $ab \neq 0$

$$\text{calcular: } \frac{(x+y) \cdot (x-y)}{(x+y)}, \text{ siendo: } x < 0 < y$$

- A) 1 B) x C) y
D) -1 E) $x + y$

145. Al resolver:
- $-1 \leq \frac{x^2 - 1}{|x| + 1} \leq 2$

se obtiene $x \in [-b; a]$. Calcular: $a + b$

- A) 0 B) 2 C) -2 D) 6 E) -4

146. Hallar la suma de valores enteros que adquiere "a", al resolver:
- $|x^2 + 2x + 5| > |x - a|$
- ,
- $\forall x \in \mathbb{R}$

- A) 7 B) 13 C) -10
D) 9 E) -7

147. Determinar el número de soluciones en la ecuación

$$||x - a| + b| = c + 2b, \text{ sabiendo que } 0 < c < b < a.$$

- A) 4 B) 2 C) 1
D) 0 E) ∞

148. Resolver:
- $x \leq |2x - 3| < x + 7$
- , y hallar el producto de los extremos del intervalo de variación de
- x
- .

- A) -40 B) 40 C) 3
D) -50 E) -30

149. Resolver:
- $x > 4(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)$

- A) $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ B) $x \in (0; 1)$
C) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$ D) $x \in (-1; 1)$
E) $x \in [-1; 0)$

150. Resolver:
- $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+7} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} - \sqrt{8}$

- A) $1 \leq x \leq 2$ B) $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$
C) $x \in \left[\frac{1+\sqrt{2}}{4}; 2\right]$ D) $x \in \left[\frac{\sqrt{2}-1}{4}; 2\right]$
E) $x \in \emptyset$

151. Determinar con qué valores de "a", el sistema:

$$x^2 + \left(1 - \frac{3}{x}a\right)x + \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} < 0 \wedge x = a^2 - \frac{1}{2},$$

no tiene soluciones.

- A) $a \geq 0$ B) $a \geq 1$ C) $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$
D) $a \leq 0$ E) $a \in (0; 1)$

152. Dado el sistema:

$$y - x^2 + x + 6 \geq 0 \wedge y - x \leq -3$$

hallar la máxima distancia que existe entre dos puntos que pertenecen al conjunto solución.

- A) $2\sqrt{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) 2
D) $4\sqrt{2}$ E) 8

153. Calcular el conjunto de valores reales de "a", para los cuales, la siguiente desigualdad se verifica para todo valor real de
- x
- .

$$3a(a+2)x^2 + 3(x+1) > x(9x+8a)$$

- A) $\langle -3; 1 \rangle$ B) $\langle 1; 4 \rangle$
C) $\langle 0; 2 \rangle$ D) $\langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$
E) $\langle 1.5; 2.786 \rangle$

154. ¿Qué valores debe tomar
- n
- (
- $n \in \mathbb{R}$
-) para que cualquiera que sea el valor de
- x
- en
- $\mathbb{R}$
- , el valor del polinomio
- $P(x) = x^2 + 2nx + n$
- , sea no menor que
- $3/16$
- ?

- A) $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right\rangle$
C) $\left\langle -\infty; \frac{1}{4} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{4}; +\infty \right\rangle$ D) $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4} \right]$
E) $\left\langle \frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right\rangle$

155. Resolver la ecuación:

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 1} + \sqrt{3x^2 - 6x + 1} = x$$

- A) $-\sqrt{\frac{140}{11}}$ B) $\sqrt{\frac{140}{11}}$ C) $\sqrt{\frac{140}{13}}$
D) $\sqrt{\frac{144}{13}}$ E) $x \neq \emptyset$

156. Hallar la suma de soluciones de la ecuación:

$$\sqrt[3]{-2(3-x)} + 2 = \sqrt{x+1}$$

- A) 30 B) 32 C) 37
D) 38 E) 40

157. Hallar el valor de
- x
- que verifica:

$$\frac{9(7x-3)^2}{2x+1} = \left(\frac{125}{3}\right)\sqrt{14x^2+x-3}$$

Dar como respuesta $x^2 + x + 1$.

- A) 21 B) $3/7$ C) 4
D) $3/5$ E) $B \vee C$

158. Sabiendo que
- $b > a > c > 1$
- , resolver el sistema adjunto:

$$\frac{\sqrt{x}(x-3a+c)}{(x-a)^2} \leq 0$$

$$\frac{(x-a-c)^2}{(x-a+1)(x-4b+c)} \leq 0$$

$$a-b < \sqrt{(x^2+a)(x-a+2b)}$$

- A) $x \in [a-2b; 4b-c)$
 B) $x \in \mathbb{R}_0^+; -\{a-1; a+c\}$
 C) $x \in \{4b-c; +\infty\}$
 D) $x \in [a-2b; a-1)$
 E) $x \in (a-1; 3a-c] - \{a; a+c\}$

159. Al resolver: $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 \leq 0$

Indicar su conjunto solución.

- A) $\emptyset$ B) $\{-1; 0\}$ C) $\mathbb{R}$
 D) $\mathbb{R}_0$ E) $\{0; 1\}$

160. Hallar el conjunto solución de:

$$\frac{(2x+1)(x^2+1)}{(x+1)(4x^2+4x+1)} \leq \frac{-2x(2x+1)}{(1+4x+4x^2)(1+x)}$$

- A) $\{-\infty; -1\}$ B) $\{1/2; +\infty\}$
 C) $\{-1; -1/2\}$ D) $\{1; 2\}$
 E) $\{1/2; 1\}$

161. Al resolver la racional fraccionaria: $-1 < \frac{x+x^2}{1-x^2} \leq 1$

Indicar la solución.

- A) $x \geq 1/2$ B) $x \leq 1/2 \wedge x \neq -1$
 C) $0 < x \leq 1/2$ D) $x > 0$
 E) $0 < x < 1$

162. Determinar a, de modo que el sistema:

$$x^2 + 2y^2 \leq a \wedge x + y = 2, \text{ tenga solución única en } \mathbb{R}.$$

- A) 8/3 B) 5/3 C) 1/3 D) 4/3 E) 1/2

163. Hallar todo valor de a que hace que se cumpla el sistema de inecuaciones.

$$ax^2 + (1-a^2)x - a > 0 \wedge -2 \geq x \geq 2$$

- A) $a \in \langle -2; 1 \rangle$ B) $\left[-2; \frac{1}{2}\right]$ C) $a \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right]$
 D) $\emptyset$ E) $a \in \langle 1; 22 \rangle$

164. Señalar un valor de y en el sistema:

$$\sqrt{x + \frac{1}{y}} + \sqrt{x + y - 1} = \frac{11}{2}$$

$$2x + y + \frac{1}{y} = \frac{65}{4}$$

- A) $\frac{-7 + \sqrt{110}}{16}$ B) 1/4 C) $\frac{\sqrt{3+1}}{2}$
 D) 4 E) Hay dos respuestas

165. Al resolver la ecuación:

$$\sqrt{x+m} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-1}, \text{ establecer el valor de verdad de las siguientes proposiciones.}$$

- I. Si $m > 0$, entonces existen 2 soluciones reales.
 II. Si $m = 0$, la suma de soluciones es 2.
 III. Si $m < 0$, existen soluciones reales.

- A) VFV B) VVV C) FVF
 D) FFF E) FFV

166. Determinar cuántas soluciones posee la ecuación:

$$7x - \frac{\sqrt{3x^2 - 8x + 1}}{x} = \left(\frac{8}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)^2$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

167. Determinar cuántos números naturales no son solución de:

$$\frac{\sqrt{x} + 9}{\sqrt[8]{x^3} + 1} \geq \frac{8(\sqrt[8]{x^3} - 1)}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x+1}}$$

- A) 1295 B) 1213 C) 1214
 D) 1377 E) 295

168. Resolver: $x\left(4(3^x) - \frac{4x^2 + x + 2}{x^2 + x + 1}\right) \geq 0$

- A) $\left\langle -\infty; -\frac{4}{3} \right\rangle \cup [5; 7)$ B) $\left\langle -\infty; -\frac{2}{3} \right\rangle \cup \{0; +\infty\}$
 C) $\langle -\infty; -6 \rangle \cup \langle -1; 2 \rangle$ D) $\langle -\infty; -5 \rangle \cup \langle -1; 7 \rangle$
 E) $\langle -\infty; 3 \rangle \cup [4; +\infty)$

169. Resolver: $x^2 + \frac{1}{x^2} \leq 2006^2 + \frac{1}{2006^2}$, e indicar la cantidad de enteros que la cumplan.

- A) 4012 B) 2012 C) 4028
 D) 126 E) 2376

170. ¿Para qué valores del parámetro real k, el sistema satisface?

$$-3 < \frac{x^2 + kx - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- A) $k \in \langle -1; 2 \rangle$ B) $k \in \langle -1; 2]$
 C) $k \in [-1; 2)$ D) $k \in [-6; 7)$
 E) $k \in [-6; -1) \cup [2; 7)$

171. ¿Cuál es el intervalo del parámetro n, a fin de que la desigualdad?

$$\frac{nx^2 + 2(n+1)x + 9n + 4}{x^2 - x + 3} < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- A) $n \in \mathbb{R}^-$ B) $n \in \mathbb{R}^+$ C) $n \in \mathbb{R}$
 D) $n < -1/2$ E) $n > 1/4$

172. Sabiendo que: $\frac{1}{a-3} + \frac{1}{b-3} = 1$, resolver:

$$\frac{x-a}{(x-3)(3-a)} + \frac{x-b}{(x-3)(3-b)} \geq 0; x > 3$$

- A) $\{3; 7\}$ B) $\{3; 5]$ C) $\{3; 6]$
 D) $\{4; 7]$ E) $\{5; 6\}$

173. Resolver: $\frac{8}{3\sqrt[3]{5}} \geq (\sqrt[3]{2x-5})(\sqrt[3]{8-2x}) \wedge \frac{5}{2} < x < 4$

e indicar la cantidad de soluciones enteras.

- A) 2 B) 3 C) 1 D) 4 E) 0

CLAVES

1. C	24. D	47. B	70. A	93. B	116. A	139. A	162. A
2. E	25. E	48. B	71. A	94. A	117. B	140. C	163. C
3. D	26. E	49. C	72. A	95. B	118. B	141. C	164. A
4. B	27. C	50. C	73. E	96. D	119. E	142. C	165. D
5. B	28. B	51. E	74. A	97. A	120. B	143. D	166. E
6. B	29. C	52. E	75. A	98. A	121. A	144. D	167. C
7. D	30. A	53. B	76. A	99. C	122. A	145. D	168. B
8. A	31. E	54. E	77. B	100. A	123. C	146. E	169. A
9. A	32. B	55. D	78. D	101. B	124. A	147. B	170. B
10. A	33. D	56. C	79. B	102. B	125. E	148. A	171. D
11. C	34. D	57. B	80. B	103. C	126. C	149. E	172. B
12. E	35. A	58. D	81. A	104. C	127. E	150. A	173. C
13. E	36. C	59. B	82. C	105. B	128. A	151. B	
14. B	37. A	60. D	83. D	106. E	129. D	152. D	
15. D	38. A	61. E	84. B	107. A	130. A	153. E	
16. D	39. A	62. A	85. B	108. E	131. A	154. D	
17. E	40. B	63. B	86. E	109. E	132. B	155. B	
18. D	41. A	64. B	87. B	110. A	133. A	156. E	
19. A	42. E	65. E	88. A	111. C	134. A	157. A	
20. E	43. A	66. C	89. B	112. C	135. C	158. E	
21. C	44. B	67. C	90. C	113. B	136. A	159. A	
22. E	45. A	68. A	91. B	114. D	137. A	160. C	
23. D	46. C	69. A	92. E	115. C	138. B	161. B	

Programación lineal

17

capítulo

George Bernard Dantzig nació el 8 de noviembre de 1914 y murió el 13 de mayo de 2005. Fue un profesor, físico y matemático estadounidense reconocido por desarrollar el «método simplex» y es considerado como el padre de la programación lineal. Recibió muchos honores, tales como la Medalla Nacional de Ciencias en 1975 y el premio de teoría John von Neumann en 1974. Fue miembro de la Academia Nacional de Ciencias, la Academia Nacional de Ingeniería y la Academia Americana de Artes y Ciencias. Obtuvo su licenciatura en Matemáticas y Física en la Universidad de Maryland en 1936, su grado de máster en Matemáticas en la Universidad de Michigan y su doctorado en la Universidad de California, Berkeley en 1946. Además, recibió un doctorado honorario en la Universidad de Maryland (1976).



George Dantzig

Inicialmente iba a aceptar un puesto como profesor en Berkeley, pero fue persuadido por su esposa y colegas del Pentágono para volver a las Fuerzas Aéreas como consejero matemático de la USAF. Fue ahí, en 1947, donde por primera vez presentó un problema de programación lineal y propuso el «método simplex» para resolverlo. En 1952 se convirtió en investigador matemático en la Corporación RAND, en cuyos ordenadores comenzó a implementar la programación lineal.

Fuente: Wikipedia

◀ DEFINICIÓN

La programación lineal es un algoritmo matemático, consistente en una secuencia de procesos y métodos que permiten resolver problemas de optimización. En el presente anexo, centraremos nuestro trabajo en aquellos problemas de programación lineal que presentan dos variables (bidimensionales).

◀ DESIGUALDADES LINEALES

Una desigualdad lineal entre dos variables "x" e "y" es cualquier relación de la forma $Ax + By + C > 0$ ($0 < 0$) o $Ax + By + C \geq 0$ ($0 \leq 0$). La gráfica de una desigualdad lineal consta de todos aquellos puntos (x; y) que satisfacen la desigualdad. Consiste de una región del plano xy, no solo de una línea o curva.

La gráfica de la desigualdad $Ax + By + C > 0$ es un semiplano acotado por la línea recta cuya ecuación es $Ax + By + C = 0$.

La gráfica de $y > mx + b$ es el semiplano debajo de la línea $y = mx + b$ y la gráfica de $y < mx + b$ es el semiplano debajo de la línea $y = mx + b$. Si la gráfica incluye a la línea, la indicamos con una línea continua; de otra forma usamos una línea a trazos. Este tipo de líneas siempre corresponde a una desigualdad estricta ($>$ o $<$) y una línea continua está asociada a una desigualdad débil ($\geq$ o $\leq$).

Ejemplo:

Bosqueje la gráfica de la desigualdad lineal: $2x - 3y < 6$

Resolución:

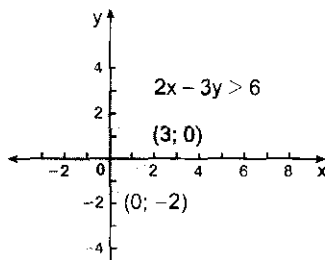
En primer término resolvemos en la desigualdad dada para "y" en términos de "x" (esto es, la expresamos en una de las formas $y > mx + b$ o $y < mx + b$).

$$\begin{aligned} 2x - 3y &< 6 \\ -3y &< -2x + 6 \end{aligned}$$

Luego: $y > \frac{2}{3}x - 2$

Enseguida graficamos la línea $y = \frac{2}{3}x - 2$. Para $x = 0$, tenemos que $y = -2$. Así, $(0; -2)$ es un punto sobre la línea. De nuevo, cuando $y = 0$, tenemos que $\frac{2}{3}x - 2 = 0$, entonces $x = 3$. En consecuencia, $(3; 0)$ es otro punto sobre la línea. Graficamos estos puntos y los unimos mediante una línea a trazos (porque tenemos una desigualdad estricta).

Puesto que la desigualdad dada, cuando la resolvemos para y, contiene el signo mayor que, la gráfica es el semiplano situado por arriba de la línea a trazos. (Véase la figura siguiente):



◀ SISTEMA DE INECUACIONES

Si consideramos $\{(x; y) : x + 2y = 5\} \cap \{(x; y) : 3x - y = 8\}$, vemos que es un conjunto con un elemento, es decir, $\{(3; 1)\}$ (Véase la figura A).

Cambiamos ahora las ecuaciones a desigualdades, y consideremos la intersección.

$$\{(x; y) : x + 2y < 5\} \cap \{(x; y) : 3x - y < 8\}$$

que está representada en la figura B.

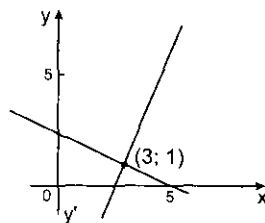


Fig. A

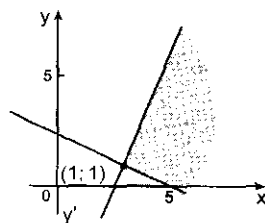


Fig. B

Como hemos rayado los dos semiplanos que no se piden, toda la parte no sombreada de la gráfica es la intersección pedida. El punto $(1; 1)$ está en esta área y podemos utilizarlo como comprobación:

$1 + 2 < 5$; $3 - 1 < 8$, que son ambas verdaderas.

De hecho el conjunto es infinito, pero los pares ordenados que forman sus elementos están restringidos por la condición $x < 3$. Cualquier punto con una abscisa

"x" de 3 o mayor estará en la parte rayada. Podemos demostrar esto algebraicamente.

Ejemplo:

$$\begin{cases} x + 2y < 5 \\ 3x - y < 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y < 5 \\ 6x - 2y < 16 \\ 7x < 21 \\ x < 3 \end{cases}$$

En este caso no hay restricción sobre el valor de la ordenada "y", pero en otros ejemplos puede suceder lo contrario, o puede haber restricciones tanto en "x" como en "y". Si se trata de eliminar "x" para obtener una condición que rijan "y", se hallará que esto es imposible.

Ejemplo:

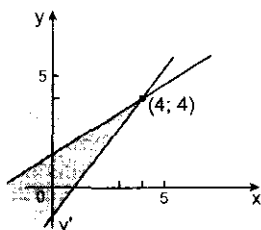
Hallar las restricciones sobre "x" e "y" si:

$$y < 2x - 4 \text{ y } 2y > x + 4.$$

$$\begin{cases} y < 2x - 4 \\ 2y > x + 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y > 4 \\ -x + 2y > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x - 2y > 8 \\ -x + 2y > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x > 12 \\ x > 4 \\ x + 4 > 8 \end{cases}$$

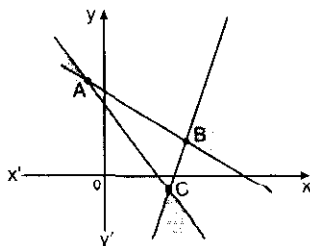
En consecuencia: $2y > x + 4 > 8 \Rightarrow y > 4$.

Por tanto, $x > 4$ o $y > 4$ son las restricciones. Esto se ve también en la gráfica de la figura siguiente:



Puede también obtenerse la condición $y > 4$, eliminando "x" de las dos desigualdades. Esto no podría efectuarse en el ejemplo anterior, porque necesitaría hacer una resta de desigualdades.

Volvamos al primer ejemplo: si se da una tercera desigualdad además de las otras dos del ejemplo 1, el área pedida puede reducirse a la interior de un triángulo (ver figura).



Por ejemplo, $5x + 3y > 4$ deja el triángulo ABC.

Hasta ahora hemos considerado intersecciones que nos dan conjuntos infinitos porque $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$. Sin embargo, para muchos problemas prácticos $x \in \mathbb{N}^+$, $y \in \mathbb{N}^+$. Por ejemplo, un problema en que interviene

la distribución de obreros y camiones puede tener como solución ideal $3\frac{1}{2}$ obreros y $6\frac{1}{7}$ camiones. Sería absurdo.

¿Qué es la programación lineal?

En infinidad de aplicaciones de la realidad cotidiana o especializada se presentan situaciones en las que se exige maximizar o minimizar algunas funciones que están sujetas a determinadas limitaciones, denominadas restricciones.

Ejemplos:

- Problema de maximización.** En una granja se preparan dos clases de alimento, P y Q mezclando dos productos A y B. Un saco de P contiene 8 kg de A y 2 kg de B, y un saco de Q contiene 10 kg de A y 5 kg de B. Cada saco de P se vende a 300 nuevos soles y cada saco de Q a 800 nuevos soles. Si en la granja hay almacenados 80 kg de A y 25 kg de B, ¿cuántos sacos de cada tipo de alimento deben prepararse para obtener los máximos ingresos?

Resolución:

Si designamos por "x" al número de sacos de alimentos de clase P y por "y" el número de sacos de clase Q que se han de vender, la función: $z = 300x + 800y$ representará la cantidad de unidades obtenidas por la venta de los sacos, y por tanto es la que debemos maximizar.

Podemos hacer un pequeño cuadro que nos ayude a obtener las restricciones:

	n.º	kg de A	kg de B
P	x	8x	2x
Q	y	10y	5y
		≤ 80	≤ 25

Por otra parte, las variables "x" e "y", lógicamente, han de ser no negativas, por tanto: $x \geq 0$, $y \geq 0$; entonces el conjunto de restricciones es:

$$\begin{cases} 8x + 10y \leq 80 \\ 2x + 5y \leq 25 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- Problema de minimización.** Una compañía para promocionar una marca de productos lácteos se basa en el reparto gratuito de jugos con sabor a limón o a fresa. Se decide repartir al menos 30 000 jugos. Cada jugo de limón necesita para su elaboración 0,5 gramos de un producto de preservación y cada jugo de fresa necesita 0,2 gramos del mismo producto. Se dispone de 9 kilogramos de este producto para preservación.

El costo de producción de un jugo de limón es de 30 um y 20 um uno de fresa.

En los dos ejemplos descritos está claro que tanto la cantidad que deseamos maximizar como la cantidad que deseamos minimizar podemos expresar-

las en forma de ecuaciones lineales. Por otra parte, las restricciones que imponen las condiciones de ambos problemas se pueden expresar en forma de inecuaciones lineales.

Resolución:

Si representamos por "x" el número de jugos de limón e "y" el número de jugos de fresa, se tiene que la función de costo es: $Z = 30x + 20y$

Por otra parte, las condiciones del problema imponen las siguientes restricciones:

- De número: $x + y \leq 80$
- De preservación: $0.5x + 0.2y \leq 9000$
- Las variables "x" e "y" han de ser, lógicamente, no negativas; es decir: $x \geq 0, y \geq 0$

El conjunto de restricciones es:

$$x + y \leq 80$$

$$0.5x + 0.2y \leq 9000$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

◀ PROBLEMA GENERAL

Un problema de programación lineal con dos variables, tiene la siguiente formulación general:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } z = f(x, y) = ax + by + c \\ \text{sujeto a: } a_1x + b_1y \leq c_1 \\ \quad \quad \quad a_2x + b_2y \leq c_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad a_nx + b_ny \leq c_n \end{array} \right.$$

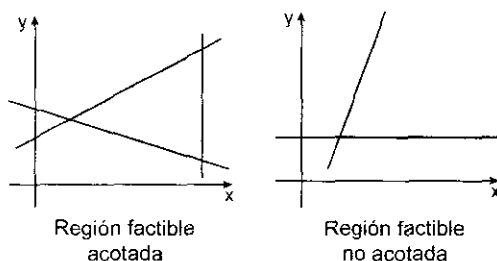
Pudiendo cambiarse maximizar por minimizar, y el sentido de las desigualdades.

En un problema de programación lineal intervienen:

- La función $f(x, y) = ax + by + c$, llamada función objetivo y que es necesario optimizar. En esa expresión "x" e "y" son las variables de decisión, mientras que a, b y c son constantes.
- Las restricciones deben ser inecuaciones lineales. Su número depende del problema en cuestión. El carácter de desigualdad viene impuesto por las limitaciones, disponibles o necesidades, que son: inferiores a... (menores: $< o \leq$); como mínimo de... (mayores: $> o \geq$). Tanto si se trata de maximizar como de minimizar, las desigualdades pueden darse en cualquiera de los dos sentidos.
- Al conjunto de valores de "x" e "y" que verifican todas y cada una de las restricciones se le denomina conjunto (o región) factible. Todo punto de ese conjunto puede ser solución del problema; todo punto no perteneciente a ese conjunto no puede ser solución. En el apartado siguiente veremos cómo se determina la región factible.
- La solución óptima del problema será un par de valores (x_0, y_0) del conjunto factible que haga que $f(x, y)$ tome el valor máximo o mínimo.

Determinación de la región factible

La solución de un problema de programación lineal, en el supuesto de que exista, debe estar en la región determinada por las distintas desigualdades. Esta recibe el nombre de región factible y puede estar o no acotada.



La región factible incluye o no los lados y los vértices, según que las desigualdades sean en sentido amplio ($\leq o \geq$) o en sentido estricto ($< o >$).

El procedimiento para determinar la región factible es el siguiente:

- Se resuelve cada inecuación por separado, es decir, se encuentra el semiplano de soluciones de cada una de las inecuaciones.
- La región factible está formada por la intersección o región común de las soluciones de todas las inecuaciones.

Los sistemas de inecuaciones lineales pueden presentar varias opciones respecto a sus soluciones: puede no existir solución; en el caso de que exista, el conjunto solución puede ser acotado o no.

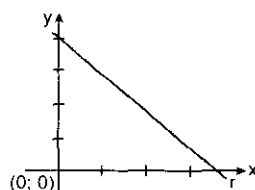
Ejemplo:

Dibuja la región factible asociada a las restricciones:

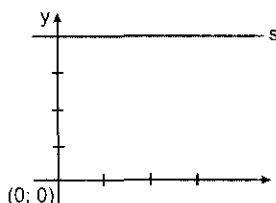
$$\begin{array}{l} x + y \geq 4 \\ y \leq 4 \\ y \geq x \end{array}$$

Las rectas asociadas son:

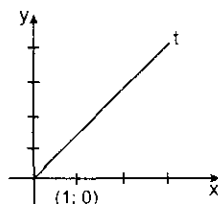
$$r: x + y = 4; s: y = 4; t: y = x$$



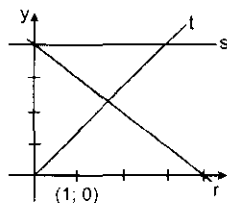
- A. Elegimos el punto $O(0, 0)$, que se encuentra en el semiplano situado por debajo de la recta. Introduciendo las coordenadas $(0, 0)$ en la inecuación $x + y \geq 4$, vemos que no la satisface: $0 + 0 = 0 < 4$. Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano situado por encima de la recta $r: x + y = 4$



- B. Procedemos como en el paso anterior. Las coordenadas (0; 0) satisfacen la inecuación $y \leq 4$ ($0 \leq 4$). Por tanto, el conjunto de soluciones de la inecuación es el semiplano que incluye al punto O.



- C. La recta t asociada a la restricción pasa por el origen, lo cual significa que si probáramos con el punto $O(0; 0)$ no llegaríamos a ninguna conclusión. Elegimos el punto (1; 0) y vemos que no satisface la inecuación $y \geq x$ ($y = 0 < 1 = x$). Por tanto, el conjunto solución de esta inecuación es el semiplano determinado por la recta t que no incluye al punto (1; 0).



- D. La región factible está tomada por los puntos que cumplen las tres restricciones, es decir, se encuentran en los tres semiplanos anteriores.

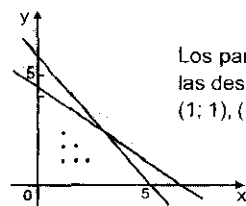
Valores óptimos

Analizamos el ejemplo siguiente:

Resuélvase el siguiente conjunto de desigualdades, gráficamente.

$$x + y < 5, \quad x + 2y < 8, \quad x \in \mathbb{N}^+, \quad y \in \mathbb{N}^+$$

La gráfica será:



Los pares ordenados que satisfacen las desigualdades son:

(1; 1), (1; 2), (1; 3), (2; 1), (2; 2), (3; 1)

A este ejemplo podremos ahora añadir otra cuestión. ¿Cuál es el valor máximo de a) $x + 3y$; b) $2x + y$; c) $x + y$; respecto al conjunto de pares ordenados hallados?

Como tenemos solo seis posibilidades esta cuestión puede responderse por agotamiento, o sea, comprobando todas estas posibilidades.

Valores de $x + 3y$:

Para (1; 1) $\Rightarrow 1 + 3 = 4$	Para (2; 1) $\Rightarrow 2 + 3 = 5$
(1; 2) $\Rightarrow 1 + 6 = 7$	(2; 2) $\Rightarrow 2 + 6 = 8$
(1; 3) $\Rightarrow 1 + 9 = 10$	(3; 1) $\Rightarrow 3 + 3 = 6$

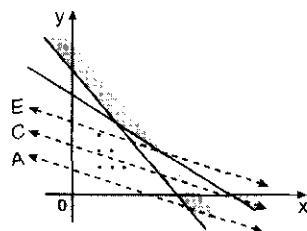
Una verificación rápida indica que el mejor valor (o el máximo en este caso) es 10, cuando $x = 1$ e $y = 3$.

Verificamos que el valor máximo de $2x + y$ es 7, cuando $x = 3$ e $y = 1$. Examinemos: $x + y$

Los valores de $x + y$:

Para (1; 1) $1 + 1 = 2$	Para (2; 1) $2 + 1 = 3$
(1; 2) $1 + 2 = 3$	(2; 2) $2 + 2 = 4$
(1; 3) $1 + 3 = 4$	(3; 1) $3 + 1 = 4$

Aquí el valor máximo es evidentemente 4, pero hay tres pares ordenados que dan este valor: (1; 3), (2; 2) y (3; 1). La resolución por agotamiento es adecuada para pocas posibilidades, o sea, para decidir entre unas pocas soluciones posibles después de una eliminación, pero también podemos aplicar un método gráfico que es bastante más directo. (Ver figura).



Sea: $x + 3y = k$ (k : cte.)

$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}k$, que es la ecuación de una recta de pendiente $\frac{1}{3}$.

Dicha recta es $\overline{AB}$, pero $\overline{AB}$ corta al eje y en (0; 1).

En consecuencia, $\frac{1}{3}k = 1 \Rightarrow k = 3$.

Análogamente, puede trazarse la recta CD , lo que conduce a $k = 6$. Recordemos que estamos tratando de hallar el máximo de $x + 3y$, esto es, obtener el valor mayor de k , lo que significa encontrar el mayor valor de $\frac{1}{3}k$.

De modo que una vez que tenemos una recta guía, tal como $\overline{AB}$, podemos utilizar una regla y una escuadra para obtener una recta paralela que satisfaga las dos condiciones siguientes:

- La ordenada en el origen debe ser tan grande como sea posible.

II. Al menos contenga un punto de los dados dentro del área restringida.

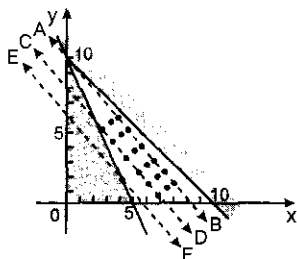
Es claro que la recta EF satisface ambas condiciones y podemos decir que: $\frac{1}{3}k = 3\frac{1}{3} \Rightarrow k = 10$, o más fácilmente, leer las coordenadas del único punto que satisface las condiciones originales de la desigualdad, $\{1; 3\}$, lo que nuevamente da $x + 3y = 10$.

Ensayar el mismo método con $2x + y$, poniendo $2x + y = k$, o sea, $y = -2x + k$, y comprobar con su resultado anterior.

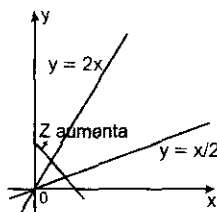
Cuando se hace lo mismo para $x + y = k$, se obtendrá que el valor máximo es 4, y que la recta que da esto pasa por los tres puntos que hemos hallado antes.

¿Cuál es el valor mínimo de $x + y$ si $x \in \mathbb{N}^+$, $y \in \mathbb{N}^+$, $x + y < 10$; $2x + y > 10$; $x + 4y > 8$?

Primero hacemos una gráfica de las desigualdades.



Por ejemplo, maximizar la función $Z = f(x, y) = x + y$ sujeta a las restricciones: $y \leq 2x$; $y \geq x/2$



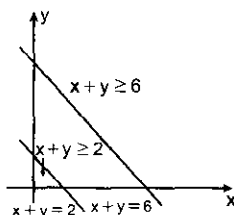
Tiene por región factible la zona sombreada que aparece en la figura, que es una región no acotada. La función crece indefinidamente para valores crecientes de "x" e "y".

En este caso no existe un valor extremo para la función objetivo, por lo que puede decirse que el problema carece de solución.

Para que suceda esta situación la región factible debe estar no acotada.

No factibles. Cuando no existe el conjunto de soluciones que cumplen las restricciones, es decir, las restricciones son inconsistentes.

Por ejemplo, maximizar la función $Z = f(x, y) = 3x + 8y$ sujeta a las restricciones: $x + y \geq 6$; $x + y \leq 2$; $x \geq 0$; $y \geq 0$



No existe la región factible, ya que las zonas sombreadas que aparecen en la figura son únicamente soluciones de alguna de las inecuaciones.

Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema de desigualdades no determina ninguna región factible. Este tipo de problemas carece de solución.

Ejemplos:

- Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas, produce cierto tipo de mesas y sillas que venden a 2000 um y 3000 um por unidad, respectivamente. Desea saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente un operario para maximizar los ingresos, teniendo las siguientes restricciones:
 - El número total de unidades de los dos tipos no podrá exceder de 4 por día y operario.
 - Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación; cada silla, 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.
 - El material utilizado para cada mesa cuesta 400 um. El material utilizado para cada silla cues-

ta 200 um. Cada operario dispone de 1200 um diarias para material.

- Expresar la función objetivo y las restricciones del problema.
- Representar gráficamente la región factible y calcular los vértices de la misma.
- Resolver el problema.

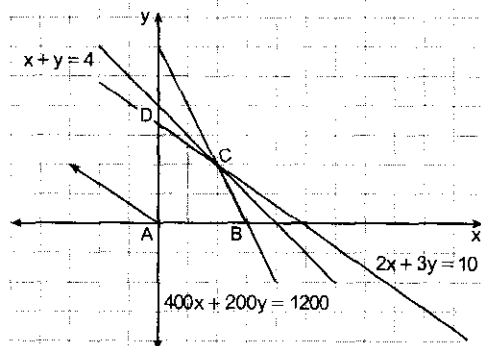
Resolución:

- Las variables son: "x": n.º de mesas fabricadas por operario y día, "y": n.º de sillas fabricadas por operario y día. Por tanto, la función objetivo es:

$$F(x, y) = 2000x + 3000y$$

$$\text{Las restricciones son: } \begin{cases} x + y \leq 4 \\ 2x + 3y \leq 10 \\ 400x + 200y \leq 1200 \\ x \geq 0 ; y \geq 0 \end{cases}$$

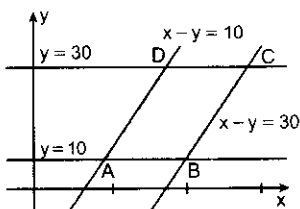
- Representación gráfica:



Las coordenadas de los vértices son: A(0; 0); B(3; 0); C(2; 2); D(0; 10/3)

- El mayor beneficio se produce a lo largo del segmento que va del vértice C al D, que es uno de los lados de la región factible. El único punto de este lado con coordenadas enteras es el vértice C, que será por tanto la solución del problema. Un operario debe fabricar diariamente 2 mesas y 2 sillas para optimizar el beneficio.
- Dos pinturas A y B tienen ambas dos tipos de pigmentos p y q; A está compuesto de un 30% de p y un 40% de q, B está compuesto de un 50% de p y un 20% de q, siendo el resto incoloro. Se mezclan A y B con las siguientes restricciones:
 - La cantidad de A es mayor que la de B. Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos. B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos.
 - ¿Qué mezcla contiene la mayor cantidad del pigmento p?
 - ¿Qué mezcla hace q mínimo?

Sean "x" e "y", respectivamente, los gramos de las pinturas A y B que aparecen en la mezcla. Traduzcamos a inequaciones las restricciones a las que se han de someter esas cantidades.



- La cantidad de A es mayor que la de B: $x > y$
- Su diferencia no es menor que 10 gramos y no supera los 30 gramos: $30 \geq x - y \geq 10$
- B no puede superar los 30 gramos ni ser inferior a 10 gramos: $30 \geq y \geq 10$

Además sabemos que: $x \geq 0$; $y \geq 0$

Veamos las cantidades de pigmento de cada tipo:

Cantidad de pigmento de tipo p. $F_p(x, y) = 0,3x + 0,5y$

Cantidad de pigmento de tipo q. $F_q(x, y) = 0,4x + 0,2y$

La región factible es la que aparece sombreada en la imagen.

Sus vértices son:

A(20; 10), B(40; 10), C(60; 30) y D(40; 30)

- La mayor cantidad de pigmento p se produce para 60 gramos de la pintura A y 30 de la B:
 $F_p(40; 30) = 0,3 \times 40 + 0,5 \times 30 = 27$;
 $F_p(20; 10) = 11$; $F_p(40; 10) = 17$; $F_p(60; 30) = 33$
- La menor cantidad de pigmento que se produce para 20 gramos de la pintura A y 10 de la B:
 $F_q(40; 30) = 0,4 \times 40 + 0,2 \times 30 = 22$;
 $F_q(20; 10) = 10$; $F_q(40; 10) = 18$;
 $F_q(60; 30) = 30$

3. **El problema del transporte.** El problema de la determinación del plan de embarques que minimice el desembolso total, conociendo de antemano las disponibilidades y las demandas de cada puerto se conoce como el problema del transporte. Hoy en día es un problema sencillo de programación lineal, pero en 1942 Koopmans no podía saber que el suyo era un caso particular de un problema más general.

En el problema del transporte se trata de encontrar los caminos para trasladar mercancía, desde varias plantas (orígenes) a diferentes centros de almacenamiento (destinos), de manera que se minimice el costo del transporte.

Para que un problema pueda ser resuelto por el método del transporte debe cumplir:

1. La función objetivo y las restricciones deben ser lineales.
2. El total de unidades que salen en origen debe ser igual al total de unidades que entran en destino.

Ejemplo:

Una empresa dedicada a la fabricación de componentes de ordenador tiene dos fábricas que producen, respectivamente, 800 y 1500 piezas mensuales. Estas piezas han de ser transportadas a tres tiendas que necesitan 1000; 700 y 600 piezas, respectivamente. Los costos de transporte, en um por pieza, son los que aparecen en la tabla adjunta.

¿Cómo debe organizarse el transporte para que el costo sea mínimo?

	Tienda A	Tienda B	Tienda C
Fábrica I	3	7	1
Fábrica II	2	2	6

En este tipo de problema se exige que toda la producción sea distribuida a los centros de ventas en las cantidades que precisa cada uno; por tanto, no pueden generarse stocks del producto ni en las fábricas ni en los centros de ventas.

En consecuencia, los 800 artículos producidos en la fábrica I deben distribuirse en las cantidades x, y, z a A, B y C, de manera que $x + y + z = 800$. Pero, además, si desde I se envían "x" unidades a A, el resto, hasta las 1000 necesarias en A, deben ser enviadas desde la fábrica II; esto es, $1000 - x$ unidades serán enviadas desde II a A.

Del mismo modo, si desde I a B se envían "y", el resto necesario, $700 - y$, deben enviarse desde II. Y lo mismo para C, que recibirá "z" desde I y $600 - z$ desde II.

En la siguiente tabla de distribución se resume lo dicho:

Envíos	a la tienda A (1000)	a la tienda B (700)	a la tienda C (600)
Desde la fábrica I (800)	x	y	$800 - x - y$
Desde la fábrica II (1500)	$1000 - x$	$700 - y$	$x + y - 200$

La última columna la hemos obtenido de la siguiente forma:

Como $x + y + z = 800$, se tiene que $z = 800 - x - y$, de donde, $600 - z = 600 - (800 - x - y) = x + y - 200$.

Ahora bien, todas las cantidades anteriores deben ser mayores o iguales que cero. Por tanto, se obtienen las siguientes desigualdades:

$$x \geq 0; 1000 - x \geq 0; y \geq 0; 700 - y \geq 0; 800 - x - y \geq 0; x + y - 200 \geq 0$$

Simplificando las desigualdades anteriores, se obtienen las siguientes inequaciones:

$$1000 \geq x \geq 0; 700 \geq y \geq 0; 800 \geq x + y \geq 0$$

Recordemos que nuestro objetivo es abaratar al máximo los costos de transporte. Estos costos se hallan multiplicando las cantidades enviadas desde cada fábrica a cada tienda por los respectivos costos de transporte unitario.

Se obtiene:

$$Z = f(x, y) = 3x + 2(1000 - x) + 7y + 2(700 - y) + (800 - x - y) + 6(x + y - 200) = 6x + 10y + 3000$$

En definitiva, el programa lineal a resolver es:

Minimizar: $Z = 6x + 10y + 3000$

Sujeto a: $1000 \geq x \geq 0$

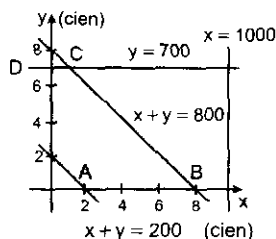
$700 \geq y \geq 0$

$800 \geq x + y \geq 0$

La región factible se da en la parte sombreada de la imagen.

Sus vértices son: A(200; 0); B(800; 0); C(100; 700); D(0; 700) y E(0; 200).

El costo, el valor de Z en cada uno de esos puntos, es:



- En A, 4200
- En B, 7800
- En C, 10 600
- En D, 10 000
- En E, 5000

El mínimo se da en A, cuando $x = 200$ e $y = 0$.

Luego, las cantidades a distribuir son:

Envíos	a la tienda A(1000)	a la tienda B(700)	a la tienda C(600)
Desde la fábrica I (800)	200	0	600
Desde la fábrica II (1500)	800	700	0

4. **El problema de la dieta.** El problema se designa así porque en sus orígenes consistió únicamente en determinar la dieta humana más económica. En su forma industrial más corriente, el problema con-

siste en saber cómo mezclar del modo más económico posible las materias primas que constituyen un producto de fórmula química conocida.

Ejemplo:

En una granja de pollos se da una dieta (para engordar) con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado solo se encuentran dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad A y cinco de B, y el tipo Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 1000 um y el de tipo Y es de 3000 um, se pregunta:

¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un costo mínimo?

Podemos organizar la información mediante una tabla:

	U	A	B	Costo
Comp. x	x	x	5x	1000x
Comp. y	y	5y	y	3000y
Total		≥ 15	≥ 15	$1000x + 3000y$

La función objetivo del costo total f, si se emplean "x" kg del compuesto X e "y" kg del compuesto Y, es: $Z = f(x, y) = 1000x + 3000y$

El conjunto de restricciones es:

$$x \geq 0; y \geq 0; x + 5y \geq 15; 5x + y \geq 15$$

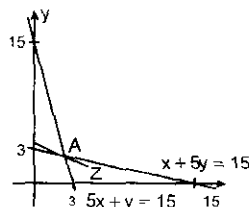
Con estos datos representamos la región factible y las rectas de nivel de la función objetivo.

De todas las rectas del nivel que tocan a la región factible, hace que el costo Z sea mínimo la que pasa por el vértice A(2,5; 2,5).

La solución óptima se obtiene comprando 2,5 unidades de X y 2,5 unidades de Y.

El costo total es:

$$Z = f(2,5; 2,5) = 1000 \times 2,5 + 3000 \times 2,5 = 10\,000.$$





PROBLEMAS

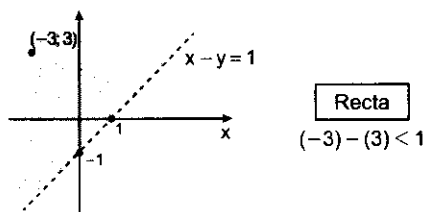
RESUELTOS



1. Resolver: $\begin{cases} x - y < 1 & \dots(I) \\ x + y > 2 & \dots(II) \end{cases}$

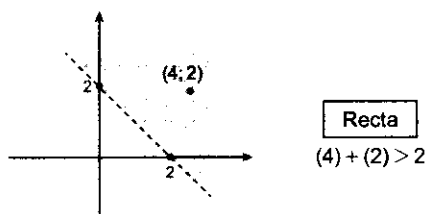
Resolución:

De (I): $x - y = 1$ (Frontera de la región)

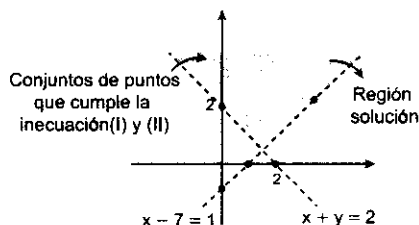


La región sombreada representa la solución de la inecuación (I).

De (II): $x + y = 2$ (Frontera de la región)



La región sombreada representa la solución de la inecuación (II).

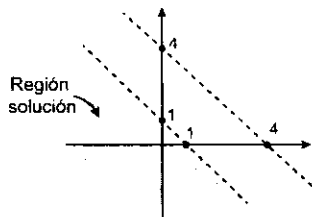
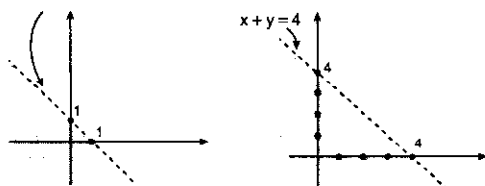


2. Resolver: $\begin{cases} x + y < 1 & \dots(I) \\ x + y < 4 & \dots(II) \end{cases}$

Resolución:

De (I): $x + y = 1$

De (II):

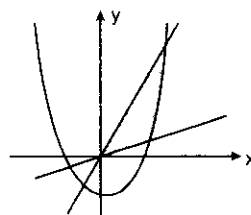


3. Dados los conjuntos:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y/4 \leq 2 \leq y\}$$

$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y < (x-1)(x+1)\}$$

La región sombreada corresponde a:



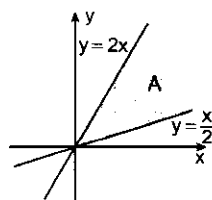
Resolución:

Grafiquemos cada uno de los conjuntos.

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{y}{4} \leq \frac{x}{2} \leq y\}$$

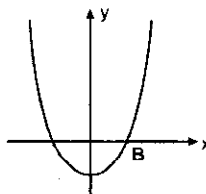
$$\text{De aquí: } \frac{y}{4} \leq \frac{x}{2} \wedge \frac{x}{2} \leq y \quad \text{o} \quad y \leq 2x \wedge y \geq \frac{x}{2}$$

Graficando A:



$$B = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y < x^2 - 1\}$$

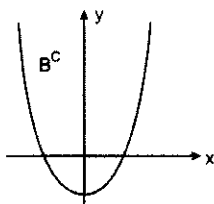
Graficando B: $y < x^2 - 1$



A partir de B, podemos decir:

$$B^c = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq x^2 - 1\}$$

Graficando B^c :



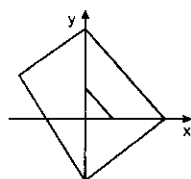
Ahora podemos decir que la gráfica dada es la representación de $A \cap B^c$.

Pero: $A + B^c = A - B$

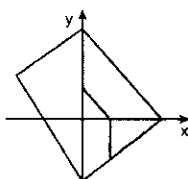
4. Determinar la solución del sistema:

$$|x| + |y| \leq 4$$

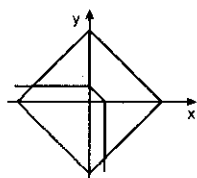
$$x + |x| + y + |y| \geq 2$$



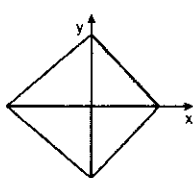
I.



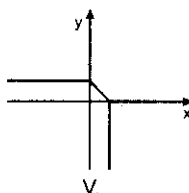
II.



III.



IV.



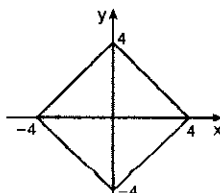
V.

Resolución:

De: $|x| + |y| \leq 4$

...(I)

Gráfico de (I):



De: $x + |x| + y + |y| \geq 2$...(II)

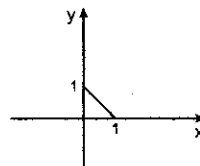
Analizamos los casos y grafiquemos cada uno.

• Si $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

En (II): $x + x + y + y \geq 2$

$\Rightarrow x + y \geq 1 \Rightarrow y \geq 1 - x$

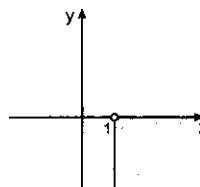
Gráfico:



• Si $x \geq 0 \wedge y < 0$

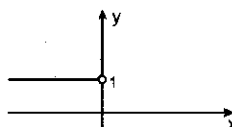
En (II): $x + x + y - y \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$

Gráfico:



• Si $x < 0 \wedge y \geq 0$

En (II): $y \geq 1$



• Si $x < 0 \wedge y < 0$

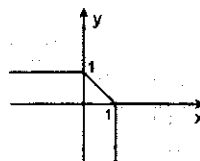
En (II): $x - x + y - y \geq 2$

$\Rightarrow 0 \geq 2$ (absurdo)

$\Rightarrow$ no hay solución ($\emptyset$)

Finalmente, la gráfica de (II):

Viene dado por la unión de las 3 gráficas anteriores, ésta es:



Por último, la intersección de las gráficas de (I) y (II), nos reproduce la solución gráfica del sistema dado.

5. Resolver el sistema lineal de

$$\text{Inecuaciones} \begin{cases} x + y + z \leq 6 \\ x + y \geq 3 \\ y + z \geq 5 \\ x + z \geq 4 \\ x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

Indique el valor de: $S = xyz$

Resolución:

Sea: $x + y + z \leq 6$...(I)

$x + y \geq 3$...(II)

$y + z \geq 5$...(III)

$x + z \geq 4$...(IV)

Donde: $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{De (I): } y + z \leq 6 - x$$

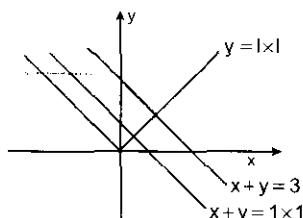
$$\text{Con (III): } 5 \leq y + z \leq 6 - x$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Observación: } x \leq 1 \Rightarrow x = 1 \\ \text{En (I): } y + z \leq 5 \\ \text{De (III): } y + z \geq 5 \end{array} \right\} \Rightarrow y + z = 5 \quad \{(\alpha)\}$$

$$\text{Además, de (II) y (IV): } \left. \begin{array}{l} y \geq 2 \\ z \geq 3 \end{array} \right\}$$

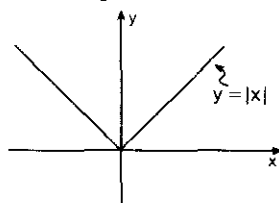
$$\text{De } (\alpha): y = 2 \wedge z = 3 \quad \therefore S = (1)(2)(3) = 6$$

6. Indicar el sistema cuya solución gráfica es:

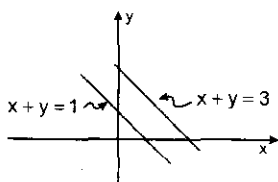


Resolución:

Según gráfico, la región sombreada se obtiene de intersectar las dos regiones sombreadas siguientes:



El gráfico corresponde a: $y \geq |x|$



El gráfico corresponde a:

$$x + y \geq 1; x + y \leq 3; x \geq 0; y \geq 0$$

Finalmente el sistema es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y \geq 1 \\ x + y \leq 3 \\ y \geq |x|; x \geq 0; y \geq 0 \end{array} \right.$$

7. Determinar el valor de $E = \frac{x+y}{z}$, en el siguiente

sistema de inecuaciones lineales:

$$z - 1 < x + y < z + 1$$

$$z - 7 < x - y < z - 5$$

$$10 < x + z < 12; x, y, z \in \mathbb{Z}^+$$

Resolución:

$$\text{Sea: } z - 1 < x + y < z + 1 \quad \dots(I)$$

$$z - 7 < x - y < z - 5 \quad \dots(II)$$

$$10 < x + z < 12 \quad \dots(III)$$

Donde: $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$

$$\left. \begin{array}{l} \text{En (I), resto } z: -1 < x + y - z < 1 \\ \text{En (II), resto } z: -7 < x - y - z < -5 \end{array} \right\} (+)$$

$$\text{Sumando: } -8 < 2(x - z) < -4$$

$$\text{De aquí: } -4 < x - z < -2 \quad \dots(IV)$$

$$(III) + (IV): 6 < 2x < 10 \Rightarrow 3 < x < 5$$

Observación: $x = 4 \in \mathbb{Z}^+$

$$\text{En (III): } 10 < 4 + z < 12$$

$$\Rightarrow 6 < z < 8 \Rightarrow z = 7 \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{En (I): } 6 < 4 + y < 8$$

$$\Rightarrow 2 < y < 4 \Rightarrow y = 3 \in \mathbb{Z}^+$$

$$\text{Con esto: } E = \frac{4+3}{7} = 1$$

8. Determinar los valores enteros de "x" e "y" que cumplen:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y > 10 \\ x + 2y < -12 \\ y > -6 \end{array} \right.$$

Dé como respuesta: $x + y$

Resolución:

$$3x - 4y > 10 \quad \dots(I)$$

$$x + 2y < -12 \quad \dots(II)$$

$$y > -6 \quad \dots(III)$$

$$3(II) - (I): 3x + 6y - 3x + 4y < -36 - 10$$

$$\Rightarrow 10y < -46 \Rightarrow y < -4,6$$

$$\text{Luego: } -6 < y < -4,6 \Rightarrow y = -5$$

Reemplazamos en (I) y (II):

$$3x - 4(-5) > 10 \Rightarrow x > -\frac{10}{3}$$

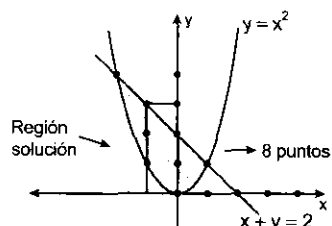
$$x + 2(-5) < -12 \Rightarrow x < -2$$

$$\text{De donde: } -\frac{10}{3} < x < -2 \Rightarrow x = -3 \quad \therefore x + y = -8$$

9. ¿Cuántos puntos de coordenadas enteras tiene el conjunto solución del sistema?

$$\left\{ \begin{array}{l} y \geq x^2 \quad \dots(I) \\ x + y \leq 2 \quad \dots(II) \end{array} \right.$$

Resolución:



Entonces el sistema tiene ocho soluciones enteras.

10. Sean los conjuntos:

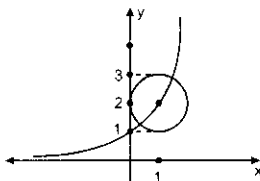
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 / (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \log_2 y \geq x\}$$

calcular el cardinal de: $A \cap B$

Resolución:

Graficando ambos conjuntos:



Si $(x; y) \in A \cap B \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}$, por lo que $A \cap B$ solo tiene 3 pares de componentes enteras.

$$A \cap B = \{(0; 2), (1; 2), (1; 3)\} \quad \therefore n(A \cap B) = 3$$

11. Minimice: $Z = 2x_1 + 3x_2$

 Sujeto a: $x_1 + 2x_2 \geq 8$

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 29$$

$$x \geq 0; x_2 \geq 0$$

Resolución:

 Minimizar: $Z = 2x_1 + 3x_2$

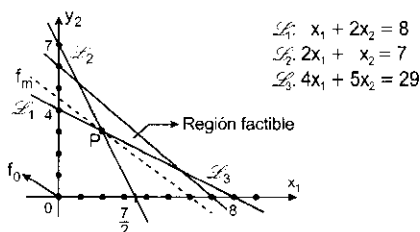
 Sujeto a: $x_1 + 2x_2 \geq 8$

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 29$$

$$x \geq 0; x_2 \geq 0$$

Gráfica



$f_m // f_0$: Z será mínimo en P .

 Calculando P : $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 = 15 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ x_1 + x_2 = 5 \end{cases}$$

 Luego: $x_1 = 2 \wedge x_2 = 3$

$$\therefore Z_{\min} = Z(2; 3) = 2(2) + 3(3) = 13$$

12. El gerente de un equipo de béisbol desea comprar bates y pelotas que cuestan \$12 y \$3 cada uno, respectivamente. Por lo menos se requiere cinco bates y diez pelotas, y el costo total no debe pasar de \$180. ¿Cuántas posibles compras existe?

Resolución:

 Sean x : n.º de bates; y : n.º de pelotas

$$\text{Entonces: } x \geq 5 \quad \dots(I)$$

$$y \geq 10 \quad \dots(II)$$

$$12x + 3y \leq 180$$

$$4x + y \leq 60 \quad \dots(III)$$

$$(III) - (II): 4x + y - y \leq 60 - 10$$

$$\Rightarrow 4x \leq 50 \Rightarrow x \leq 12,5$$

 Luego: $5 \leq x \leq 12,5$

$$x = 5: 10 \leq y \leq 40$$

$$\Rightarrow 10 \leq y \leq 40 \Rightarrow "y" \text{ toma 31 valores}$$

 $\Rightarrow$ hay 31 posibles compras.

$$x = 6: 10 \leq y \leq 36$$

$$\Rightarrow "y" \text{ toma 27 valores}$$

 $\Rightarrow$ hay 27 posibles compras.

$$x = 7: 10 \leq y \leq 32$$

$$\Rightarrow "y" \text{ toma 23 valores}$$

 $\Rightarrow$ hay 23 posibles compras.

Y así sucesivamente.

Por lo tanto, el número total de compras es:

$$31 + 27 + 23 + \dots + 3 = \left(\frac{31+3}{2}\right)12 = 34(6) = 204$$

13. Encontrar el máximo valor de: $Z = 4x + 3y$

 Si $(x; y) \in \{(x+y) \in \mathbb{R}^2 / 30x + 20y \leq 1800;$

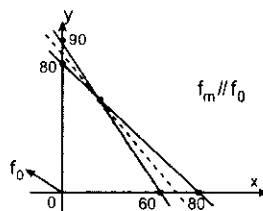
$$x + y \leq 80; x \geq 0 \wedge y \geq 0\}$$

Resolución:

 Maximizar: $Z = 4x + 3y$

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} 30x + 20y \leq 1800 \\ x + y \leq 80 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

Graficando:



La solución óptima se encuentra en el punto $P \in f_m$.

 Calculando las coordenadas de P .

$$Z_1: 30x + 20y = 1800$$

$$3x + 2y = 180$$

$$Z_2: x + y = 80$$

$$P \in \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \Rightarrow x + 2(x + y) = 180$$

$$\Rightarrow x = 20; y = 60 \Rightarrow P = (20; 60)$$

$$\text{Luego: } Z_{\max} = Z(20; 60) = 4(20) + 3(60)$$

$$\therefore Z_{\max} = 260$$

14. Determinar el máximo valor de: $2x_1 + 3x_2$

 Sujeto a: $x_1 + 2x_2 \leq 6$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0 \wedge x_2 \geq 0$$

Resolución:

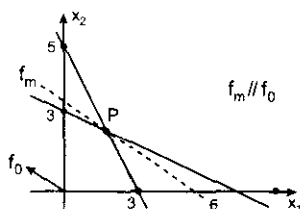
 Maximizar: $f(x_1; x_2) = 2x_1 + 3x_2$

 Sujeto a: $x_1 + 2x_2 \leq 6$

$$5x_1 + 3x_2 \leq 15$$

$$x_1 \geq 0 \wedge y \geq 0$$

Graficando:



La solución óptima se encuentra en $P \in f_m$ (cualquier otra recta paralela a f_0 que pase por la región factible que contiene puntos de esta, donde f tomará valores menores que en P). Calculando P :

$$x_1 + 2x_2 = 6 \wedge 5x_1 + 3x_2 = 15$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{12}{7}, x_2 = \frac{15}{7} \Rightarrow P = \left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right)$$

$$\text{Luego: } f_{\max} = f\left(\frac{12}{7}, \frac{15}{7}\right) = 2\left(\frac{12}{7}\right) + 3\left(\frac{15}{7}\right)$$

$$\therefore f_{\max} = \frac{24}{7} + \frac{45}{7} = \frac{69}{7}$$

15. Si $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$, determinar el número de soluciones del sistema.

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

Resolución:

$$x, y, z \in \mathbb{Z}^+ \wedge$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ z = 1 \end{cases}$$

El conjunto solución S es de la forma.

$$S = \{(x; y; 1) / x + y = 5 \wedge x; y \in \mathbb{Z}^+\}$$

$$\text{De: } x + y = 5$$

$$1 \quad 4 \Rightarrow (1; 4; 1) \in S$$

$$2 \quad 3 \Rightarrow (2; 3; 1) \in S$$

$$3 \quad 2 \Rightarrow (3; 2; 1) \in S$$

$$4 \quad 1 \Rightarrow (4; 1; 1) \in S$$

$$\therefore n(S) = 4$$

16. Determinar el máximo valor que asume: $2x + y$

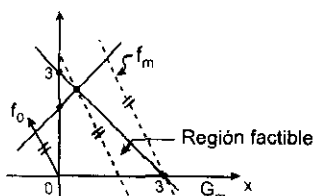
$$\text{Sujeto a: } \begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \leq -x + 3 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución:

Se pide el máximo de: $f(x; y) = 2x + y$

$$\text{Restricciones } \begin{cases} y \leq x + 2 \\ y \leq -x + 3 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

Graficando:



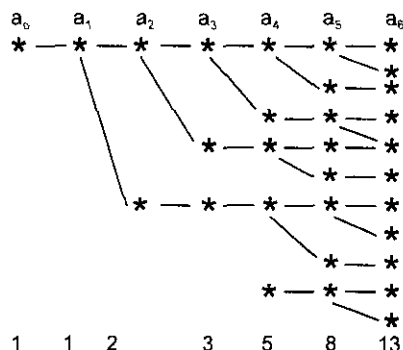
La recta $f_m (f_m // f_0)$ es aquella que contiene a la solución óptima, f será máxima en $(3; 0)$.

$$\therefore f_{\max} = f(3; 0) = 2(3) + 0 = 6$$

17. Un hombre pone una pareja de conejos en un lugar cercado por todos lados. ¿Cuántos conejos tendrá al cabo de un año si se supone que cada pareja engendra cada mes una nueva pareja que, a su vez, es fértil a partir del segundo mes de vida?

Resolución:

Haciendo un esquema, donde: (*) es una pareja de conejos; (—) es la pareja anterior y (/ \) es la descendencia, se tiene.



Se tiene la sucesión de Fibonacci.

Donde: $a_0 = a_1 = 1 \wedge a_{n+1} = a_n + a_{n-1}; \forall n \in \mathbb{N}$.

Luego de un año, la cantidad de parejas de conejos será $a_{12} = 233$.

Por lo tanto, el n.º total de conejos es: $2(233) = 466$

18. Un sastre tiene 80 m^2 de tela de algodón y 120 m^2 de tela de lana. Un traje requiere 1 m^2 de algodón y 3 m^2 de lana; y un vestido de mujer requiere 2 m^2 de cada una de las dos telas. Calcular el número de trajes y vestidos que debe confeccionar el sastre para maximizar los beneficios; si un traje y un vestido se venden al mismo precio.

Resolución:

Haciendo un cuadro con los datos:

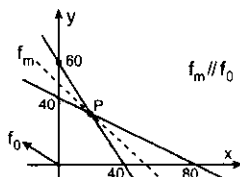
	Traje	vestido	m^2
Algodón	1	2	80
Lana	3	2	120

Sean: x : n.º de trajes
 y : n.º de vestidos

$$\text{Restricciones: } \begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

Si " k " es el precio de cada prenda, entonces la función objetivo será: $f(x; y) = k(x + y)$

Graficando:



f tomará el máximo valor en $P \in f_m$. Calculando las coordenadas de P .

$$\begin{cases} x + 2y = 80 \\ 3x + 2y = 120 \end{cases} \Rightarrow x = 20 \wedge y = 30$$

$\therefore$ Se deben confeccionar: 20 trajes $\wedge$ 30 vestidos

19. Hallar el máximo valor de $Z = 3x + 6y$, tal que:

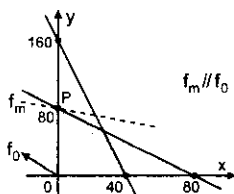
$$\begin{cases} x + y \leq 80 \\ 2x + \frac{y}{2} \leq 80 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$$

Resolución:

Maximizar: $Z = 3x + 6y$

Sujeto a: $\begin{cases} x + y \leq 80 \\ 4x + y \leq 160; x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$

Graficando:



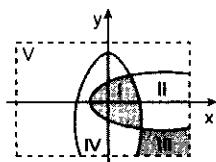
Z será máximo en $P = (0; 80)$

Luego: $Z_{\max} = Z(0; 80) = 3(0) + 6(80) \therefore Z_{\max} = 480$

20. Sea el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y < 4 \\ 2x - 3y^2 < -2 \end{cases}$$

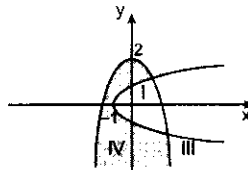
Entonces el conjunto solución está representado por la región:



Resolución:

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y < 4 \Rightarrow y < -\frac{3}{2}x^2 + 2 \\ 2x - 3y^2 < -2 \Rightarrow x < \frac{3}{2}y^2 - 1 \end{cases}$$

Graficando cada relación, se obtiene:



Luego, la solución del sistema es la región IV.

21. Una editorial planea utilizar una sección de planta para producir dos libros de texto. La utilidad unitaria es de \$2 para el libro 1, y de \$3 para el libro 2. El texto 1 requiere 4 h para su impresión y 6 h para su encuadernación. El texto 2 requiere 5 h para imprimirse y de 3 h para ser encuadernado. Se dispone de 200 h para imprimir y de 210 h para encuadernar. Determinar la máxima utilidad que puede obtener.

Resolución:

Haciendo un cuadro de los datos:

	Texto 1	Texto 2	Horas
Impresión	4	5	200
En cuadernac	6	3	210

Sean: x : n.º de unid. del libro 1.

y : n.º de unid. del libro 2.

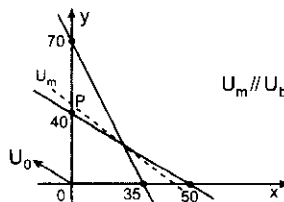
Restricciones: $4x + 5y \leq 200$

$$6x + 3y \leq 210$$

$$x \geq 0 \wedge y \geq 0$$

Función objetivo: $U(x; y) = 2x + 3y$

Graficando:



U será máxima en P , cuyas coordenadas son:

$$\begin{cases} 4x + 5y = 200 \\ 6x + 3y = 210 \end{cases} \Rightarrow x = 25 \wedge y = 20$$

Luego: $U_{\max} = U(25; 20) = 2(25) + 3(20)$

$\therefore U_{\max} = 110$ dólares

22. Minimizar la función $f(x; y) = 2x + 8y$ sometidas a las restricciones:

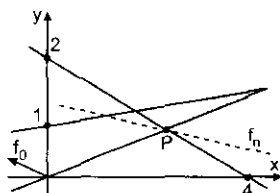
$$\begin{cases} x \geq 0; y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \end{cases}$$

Resolución:

Minimizar: $f(x; y) = 2x + 8y$

Sujeto a:
$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 4y \geq 8 \\ 2x - 5y \leq 0 \\ -x + 5y \leq 5 \end{cases}$$

Graficando:



$f_0: 2x + 8y = 0; f_m // f_0$
 f será mínimo en $P \in f_m$

Cálculo de P:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ 2x + 4y = 8 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{20}{9}; y = \frac{8}{9}$$

Luego: $f_{\min} = f\left(\frac{20}{9}, \frac{8}{9}\right) = 2\left(\frac{20}{9}\right) + 8\left(\frac{8}{9}\right)$

$$f_{\min} = \frac{40}{9} + \frac{64}{9} = \frac{104}{9}$$

23. La compañía Tigre S. A. requiere producir dos clases de recuerdos de viaje: del tipo A y del B. Cada unidad tipo A producirá una ganancia de \$1, mientras que una del tipo B generará una ganancia de \$1,20. Para fabricar un recuerdo tipo A se necesitan 2 minutos en la máquina I y 1 minuto en la máquina II. Un recuerdo tipo B requiere 1 minuto en la máquina I y 3 minutos en la máquina II. Hay 3 horas disponibles en la máquina I y 5 horas disponibles en la máquina II para procesar el pedido. ¿Cuántas piezas de cada tipo debe producir Tigre S. A para maximizar la ganancia?

Resolución:

Sean x : n.º de piezas de tipo A
 y : n.º de piezas de tipo B

Sea G_1 la ganancia obtenida tal que:

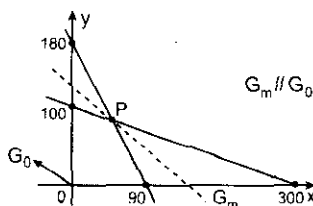
$$G_1(x; y) = x + 1,2y$$

Sujeto a: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Horas en máq. I: $2x + y \leq 180$

Horas en máq. II: $x + 3y \leq 300$

Graficando:



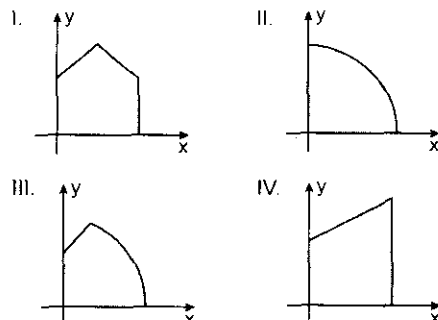
G_1 será máxima en P, cuyas coordenadas son:

$$\begin{cases} 2x + y = 180 \\ x + 3y = 300 \end{cases} \Rightarrow x = 48, y = 84$$

La ganancia será máxima cuando se produzcan: 48 piezas del tipo A y 84 piezas del tipo B

24. A continuación se muestran 4 regiones en el plano xy , indique cuál(es) de ellas representan la región factible de un problema de programación lineal bidimensional.

Resolución:



Un problema de programación lineal bidimensional (en $\mathbb{R}^2$) cuya restricciones son inecuaciones de primer grado, las cuales generan regiones delimitadas por segmentos de rectas. Por tanto, solo es posible que I y IV sean regiones factibles en esos problemas.

25. Un granjero tiene 480 ha en la que puede sembrar cebada o maíz. Él calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación crucial del verano. Dados los márgenes de utilidad y requerimientos siguientes:

Maíz: utilidad: \$40 por ha.

trabajo: 2 h por ha.

Cebada: utilidad: \$30 por ha.

trabajo: 1 h por ha.

¿Cuántas hectáreas (ha) de cada cereal debe plantar para maximizar su utilidad?

Resolución:

Sean x : n.º de hectáreas de maíz

y : n.º de hectáreas de trigo

La utilidad U (función objetivo) será:

$$U(x; y) = 40x + 30y$$

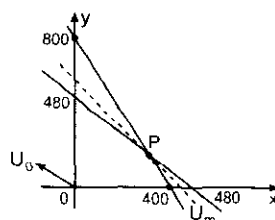
Restricciones:

Terreno: $x + y \leq 480$

Horas de trab.: $2x + y \leq 800$

Además: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Graficando:



U será máxima en P, cuyas coordenadas son:

$$\begin{cases} x + y = 480 \\ 2x + y = 800 \end{cases} \Rightarrow x = 320, y = 160$$

$$\Rightarrow U_{\max} = U(320; 160) = 40(320) + 30(160) = 17\,600$$

26. Un grupo de aficionados de un equipo de fútbol encarga a una empresa de transportes el viaje para llevar a los 1200 socios a ver la final de su equipo, la empresa dispone de autobús de 50 plazas y de microbuses de 30 plazas. El precio del viaje en cada autobús es de 252 dólares y el del viaje en microbús de 180 dólares. Sabiendo que la empresa dispone de 28 conductores. ¿Cuál es el costo máximo del viaje?

Resolución:

Sean x , n.º de autobuses

y , n.º de microbuses

El costo C del viaje será: $C_{(x,y)} = 252x + 180y$

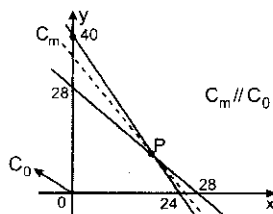
Sujeto a las restricciones:

N.º de conductores: $x + y \leq 28$

N.º de aficionados: $50x + 30y \leq 1200$

Además: $x \geq 0 \wedge y \geq 0$

Gráfica:



C toma su máximo valor en P.

Calculando las coordenadas de P:

$$\begin{cases} x + y = 28 \\ 50x + 30y = 1200 \end{cases} \Rightarrow x = 18 \wedge y = 10$$

Luego: $C_{\max} = C(18; 10)$

$$C_{\max} = 252(18) + 180(10) = 6336$$

27. Maximizar $Z = 2x + 10y$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$x + y \leq 30$; $x - 3y \leq 0$; $x \geq 0$; $y \geq 0$

Resolución:

- I. De las restricciones:

$x + y \leq 30$ hacemos L_1 : $x + y = 30$

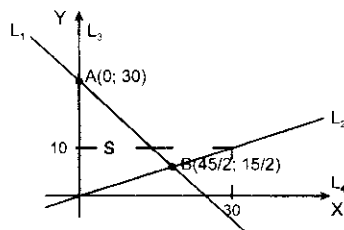
$x - 3y \leq 0$ hacemos L_2 : $x - 3y = 0$

$x \geq 0$ hacemos L_3 : $x = 0$

$y \geq 0$ hacemos L_4 : $y = 0$

- II. Resolviendo gráficamente el sistema de inecuaciones formado, para ello graficamos las rectas:

L_1 , L_2 , L_3 y L_4 .



- III. Cálculo del punto B: $B(x_0; y_0) = L_1 \cap L_2$

Resolviendo:

$$L_1: x + y = 30; \quad L_2: x - 3y = 0$$

$$x = \frac{45}{2} \wedge y = \frac{15}{2}$$

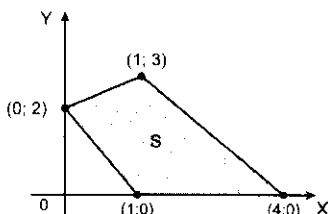
$$\Rightarrow B(x_0; y_0) = \left(\frac{45}{2}, \frac{15}{2}\right)$$

- IV. Reemplazar las siguientes coordenadas de las esquinas en la función objetivo:

esquina	$f(x; y)$	$Z = 2x + 10y$
$O(0; 0)$		$Z = 2(0) + 10(0) = 0$
$A(0; 30)$		$Z = 2(0) + 10(30) = 300$
$B\left(\frac{45}{2}, \frac{15}{2}\right)$		$Z = 2\left(\frac{45}{2}\right) + 10\left(\frac{15}{2}\right) = 120$

- V. El máximo de Z es 300; cuando $x = 0$; $y = 30$

28. Determine los valores óptimos de la función objetivo $Z = 3x + y$; sujeto al conjunto factible S.



Resolución:

Se puede observar en la gráfica que los vértices (esquinas) son puntos de intersección de cierto sistema de ecuaciones.

Vamos a evaluar la función objetivo en cada esquina.

esquina	$f(x; y)$	$Z = 3x + y$
$A(0; 2)$		$Z = 3(0) + 2 = 2$ (mínimo)
$B(1; 3)$		$Z = 3(1) + 3 = 6$
$C(4; 0)$		$Z = 3(4) + 0 = 12$ (máximo)
$D(1; 0)$		$Z = 3(1) + 0 = 3$

Así tenemos que los valores óptimos de la función objetivo $Z = 3x + y$ son:

$$Z(\text{máximo}) = 12 \quad \wedge \quad Z(\text{mínimo}) = 2$$

29. Una fábrica produce cámaras fotográficas convencionales y digitales. Se obtiene un ingreso de \$1.400 por cada cámara convencional y \$1.700 por cada digital. En un día no se pueden fabricar más de 300 cámaras convencionales ni más de 200 digitales ni tampoco se pueden producir más de 400 en total. Si logra vender toda la producción del día. ¿Cuál es el número de cámaras de cada clase que conviene fabricar para obtener un ingreso máximo?

Resolución:

Planteamiento del problema

Sean: x : número de cámaras convencionales
 y : número de cámaras digitales

- Se pide maximizar el ingreso:

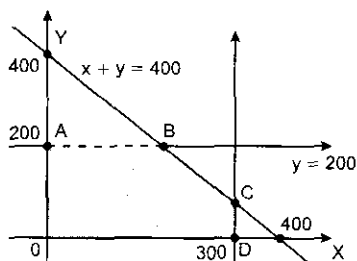
$$I = 400x + 700y$$

Las restricciones según datos son:

$$x \leq 300; \quad y \leq 200; \quad x + y \leq 400$$

Donde: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ condición de no negatividad

- Graficando la región factible S .



- Cálculo de las esquinas (vértices)

$$A(0; 200) \quad B(200; 200)$$

$$C(300; 100) \quad D(300; 0)$$

$$O(0; 0)$$

- Evaluar la función objetivo en cada esquina

esquina \ $f(x; y)$	$I = 400x + 700y$
$A(0; 200)$	$I = 400(0) + 700(200) = 140\,000$
$B(200; 200)$	$I = 400(200) + 700(200) = 220\,000$
$C(300; 100)$	$I = 400(300) + 700(100) = 190\,000$
$D(300; 0)$	$I = 400(300) + 700(0) = 120\,000$
$O(0; 0)$	$I = 400(0) + 700(0) = 0$

Se concluye que se deben producir 200 cámaras convencionales y 200 cámaras digitales para así obtener un ingreso máximo de \$1.220 000.

30. Una sastrería tarda 2 horas en cortar y 4 horas en coser un traje tejido. Para confeccionar un traje de lana peinada, tarda 4 horas en el corte y 2 horas en cosido. En un día de trabajo, la sastrería dispone de 20 horas para corte y 16 horas para cosido. Las ganancias por un traje tejido son de \$34 y por un traje de lana peinada son \$31. ¿Cuántos trajes de cada tipo deben producirse en un día para optimizar su ganancia? ¿Cuál es la ganancia máxima obtenible?

Resolución:

Una forma de plantear el problema es construyendo una tabla en forma de una matriz (casillas dispuestos en filas y columnas) donde se deben colocar los datos del problema en forma ordenada, clasificándolas según las características del problema.

Variables de elección	Artículos	Cortar	Coser	Ganancia
x	traje tejido	2	4	\$34
y	traje de lana peinada	4	2	\$31
	horas disponibles	20	16	

Paso 1:

Definir las variables de elección $\begin{cases} x: \text{número de trajes tejidos} \\ y: \text{número de trajes de lana peinada} \end{cases}$

Paso 2: Expresar la función objetivo que se desea maximizar $G(x; y) = 34x + 31y$

Paso 3: Expresar las restricciones en términos de desigualdades en " x " e " y ":

$$2x + 4y \leq 20; \quad 4x + 2y \leq 16$$

Paso 4: Condiciones de no negatividad: $x \geq 0; y \geq 0$

Entonces, el problema de programación lineal es:

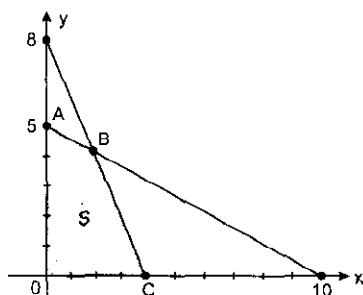
$$\text{Maximizar} \quad G = 34x + 31y$$

$$\text{Sujeto a:} \quad 2x + 4y \leq 20$$

$$4x + 2y \leq 16$$

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0$$

Paso 1: Graficar la región factible S :



Paso 2: Hallar las coordenadas de los vértices:

Para hallar el vértice B, resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + 4y = 20 \\ 4x + 2y = 16 \end{cases}$$

Reducir:

$$\begin{cases} x + 2y = 10 & (\text{por } -2) \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x - 4y = -20 \\ 2x + y = 8 \\ \hline -3y = -12 \\ y = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

A = (0; 5), B = (2; 4), C = (4, 0);

Paso 3: Evaluar la función objetivo en cada esquina

Esquinas	$G = 34x + 31y$	
A(0, 5)	$G = 34(0) + 31(5) = 155$	← Máximo
B(2, 4)	$G = 34(2) + 31(4) = 192$	
C(4, 0)	$G = 34(4) + 31(0) = 136$	
O(0, 0)	$G = 34(0) + 31(0) = 0$	

Conclusión: Deben producirse 2 trajes tejido y 4 de lana peinada, para obtener una ganancia máxima de \$192.

31. Una aerolínea se dispone a adquirir aviones B327 y B357. Los servicios diarios que debe proveer son de un mínimo de: 2000 pasajeros en primera clase, 1500 en clase turística y 2400 en clase económica. Operar un avión B327 cuesta \$12 000 y puede transportar 40 pasajeros en primera clase, 40 en clase turística y 120 en clase económica. Operar un avión B357 cuesta \$10 000 y puede transportar 80 pasajeros en primera clase, 30 en clase turística y 40 en clase económica. ¿Cuántos aviones de cada tipo debe adquirir para minimizar los costos de operación?

Resolución:

El planteamiento del problema debe empezar respondiendo la pregunta:

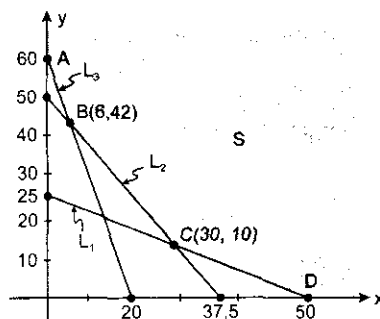
Si se tiene $\begin{cases} x: \text{n.º de aviones B327} \\ y: \text{n.º de aviones B357} \end{cases}$

Se pide minimizar el costo: $12\,000x + 10\,000y$

Sujeto a:

var.	avi.	1.ª clase	clase turis.	clase eco.	cost.
x	B327	40	40	120	12 000
y	B357	80	30	40	10 000
		≥ 2000	$\geq 15\,000$	≥ 2400	

El problema de programación lineal es:



Minimizar: $C = 12\,000x + 10\,000y$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} 40x + 80y &\geq 2000 \\ 40x + 30y &\geq 15\,000 \\ 120x + 40y &\geq 2400 \\ x &\geq 0 \wedge y &\geq 0 \end{aligned}$$

Reducir las restricciones:

$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 50 &\Rightarrow L_1: x + 2y = 50 \\ 4x + 3y &\geq 150 &\Rightarrow L_2: 4x + 3y = 150 \\ 3x + y &\geq 60 &\Rightarrow L_3: 3x + y = 60 \\ x &\geq 0 \wedge y &\geq 0 \end{aligned}$$

Paso 1: Graficar el conjunto solución S (que es la región factible):

L_1	L_2	L_3																		
<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>25</td></tr><tr><td>50</td><td>0</td></tr></table>	x	y	0	25	50	0	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>50</td></tr><tr><td>37,5</td><td>0</td></tr></table>	x	y	0	50	37,5	0	<table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>60</td></tr><tr><td>20</td><td>0</td></tr></table>	x	y	0	60	20	0
x	y																			
0	25																			
50	0																			
x	y																			
0	50																			
37,5	0																			
x	y																			
0	60																			
20	0																			

Paso 2: Hallar las coordenadas de las esquinas

- A = (0; 6)
- B = $L_3 \cap L_2$: $\begin{cases} 3x + y = 60 \\ 4x + 3y = 150 \end{cases}$ se obtiene B = (6; 42)
- C = $L_2 \cap L_1$: $\begin{cases} 4x + 3y = 150 \\ x + 2y = 50 \end{cases}$ se obtiene C = (30; 10)
- D = (50; 0)

Paso 3: Evaluar la función objetivo en cada esquina

Esquinas	$C = 12\,000x + 10\,000y$	
A(0; 60)	$C = 12\,000(0) + 10\,000(60)$ $C = 600\,000$	← Mínimo
B(6; 42)	$C = 12\,000(6) + 10\,000(42)$ $C = 492\,000$	
C(30; 10)	$C = 12\,000(30) + 10\,000(10)$ $C = 460\,000$	
D(50; 0)	$C = 12\,000(50) + 10\,000(0)$ $C = 600\,000$	

Conclusión: Se debe adquirir 30 aviones B327 y 10 aviones B357 para obtener costo mínimo de \$460 000



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

**PROBLEMA 1 (UNI 2009 - II)**

Sea S la región limitada por las siguientes inecuaciones:

$$\begin{aligned} & \bullet \quad y - x \leq 4 \quad \bullet \quad y + \frac{x}{2} \leq 6 \\ & \bullet \quad \frac{x}{2} - y \leq 0 \quad \bullet \quad -x - y \leq -2 \end{aligned}$$

al minimizar $f(x, y)$, sobre S se afirma:

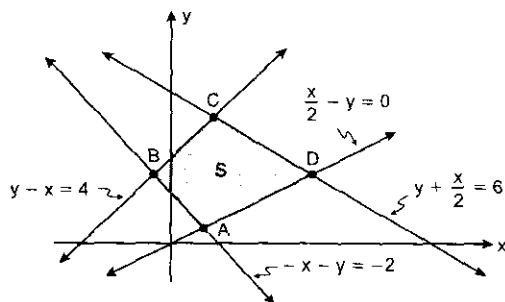
- A) Si $f(x, y) = x + y$, entonces se tiene 2 soluciones.
 B) Si $f(x, y) = y - x$, entonces $\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right)$ es solución
 C) Si $f(x, y) = \frac{x}{2} + y$, entonces $(2; 0)$ es solución
 D) Si $f(x, y) = \frac{x}{2} - y$, entonces se tiene infinitas soluciones
 E) Si $f(x, y) = y - \frac{x}{2}$ entonces $(6; 3)$ es solución

Resolución:

S es la región limitada por:

$$\begin{aligned} y - x &\leq 4 & y + \frac{x}{2} &\leq 6 \\ \frac{x}{2} - y &\leq 0 & -x - y &\leq -2 \end{aligned}$$

Graficando la región S :



Luego de intersecar las rectas, obtenemos los puntos:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right), & B &= (-1; 3), \\ C &= \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right), & D &= (6; 3) \end{aligned}$$

Para minimizar $f(x, y)$, definidas en las alternativas, evaluamos f en los puntos A, B, C y D. Veamos:

A) Si $f(x, y) = x + y$
 $f(A) = 2, \quad f(B) = 2, \quad f(C) = \frac{20}{3}, \quad f(D) = 9$

Como $f(A) = f(B) = 2$, entonces el mínimo valor de f se encuentra en todos los puntos de $\overline{AB}$; se tendrían infinitas soluciones.
 Luego, A) es falsa.

B) Si $f(x, y) = y - x$

$$f(A) = \frac{-2}{3}, \quad f(B) = 4, \quad f(C) = 4, \quad f(D) = -3$$

Entonces el mínimo valor de f se encuentra en el punto $D = (6; 3)$ y no en $\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right)$

Luego, B) es falsa.

C) Si $f(x, y) = \frac{x}{2} + y$

$$f(A) = \frac{4}{3}, \quad f(B) = \frac{5}{2}, \quad f(C) = 6, \quad f(D) = 6$$

entonces, el mínimo valor de f se encuentra en el punto $A = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y no en $(2; 0)$.

Luego, C) es falsa.

D) Si $f(x, y) = \frac{x}{2} - y$

$$f(A) = 0, \quad f(B) = -\frac{7}{2}, \quad f(C) = -6, \quad f(D) = 0$$

entonces, el mínimo valor de f se encuentra en el punto $C = \left(\frac{4}{3}, \frac{16}{3}\right)$ por lo que se tendría una solución y no infinitas.

Luego, D) es falsa.

E) Si $f(x, y) = y - \frac{x}{2}$

$$f(A) = 0, \quad f(B) = \frac{7}{2}, \quad f(C) = \frac{14}{3}, \quad f(D) = 0$$

Como $f(A) = f(D) = 0$; entonces el mínimo valor de f se encuentra en todos los puntos de $\overline{AD}$; por lo que se tendrían infinitas soluciones, pero $(6; 3)$ es solución.

$\therefore$ E es verdadera.

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2010 - I)

En relación a un programa lineal, indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

- I. Las condiciones de no negatividad significan que todas las variables de decisión deben ser positivas.
- II. El número de puntos extremos de la región admisible es finito
- III. En un programa lineal pueden variarse los coeficientes de la función objetivo y aún mantenerse la solución óptima.

- A) VFV B) FFF C) FFV
 D) FVV E) VFF

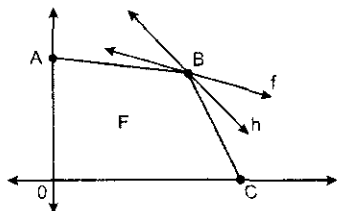
Resolución:

- I. La proposición es falsa.

Como x, y son variables de decisión, entonces se cumple que $x \geq 0, y \geq 0$, debido a la condición de no negatividad.

II. La proposición es verdadera.
Debido a que el número de vértices de toda región factible es finito

III. La proposición es verdadera.
Tenemos la región factible F y la función objetivo $f(x; y) = ax + by + c_1$. Supongamos que $(x_1; y_1) \in F$ es la solución óptima del problema, entonces puede ser también solución óptima de $h(x; y) = mx + ny + c_2$.



Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2010 - II)

Determine el valor mínimo que toma la función objetivo:
 $P(x; y) = 10x + 20y$, sujeta a las restricciones:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ y \leq x \end{cases}$$

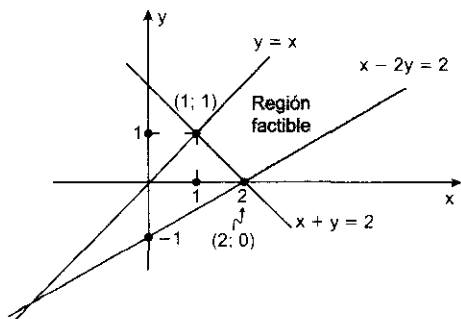
- A) -70 B) -20 C) 0
D) 20 E) 30

Resolución:

Nos piden: valor mínimo de
 $P(x; y) = 10x + 20y$

Sujeto a: $\begin{cases} x + y \geq 2 \\ x - 2y \leq 2 \\ y \leq x \end{cases}$

Graficando cada una de las desigualdades para resolver el problema de programación lineal.



Ahora, para hallar el valor mínimo, evaluamos $P(x; y)$ en los vértices de la región factible
 $P(1; 1) = 10(1) + 20(1) = 30$

$$P(2; 0) = 10(2) + 20(0) = 20$$

∴ El valor mínimo que toma la función objetivo es 20.

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2011 - I)

Un lago se llena de dos especies de peces S_1 y S_2 . La especie S_1 proporciona un peso promedio de 4 kg de carne y la especie S_2 un peso promedio de 2 kg. Dos tipos de comida F_1 y F_2 están disponibles en el lago. El requerimiento promedio de la especie S_1 es 1 unidad de F_1 y 3 unidades de F_2 , mientras que el requerimiento de S_2 son 2 unidades de F_1 y 1 unidad de F_2 cada día. Si se dispone diariamente de 500 unidades de F_1 y 900 unidades de F_2 , determine el número total de peces en el lago que maximice el peso total de carne de pescado.

- A) 360 B) 380 C) 400
D) 420 E) 460

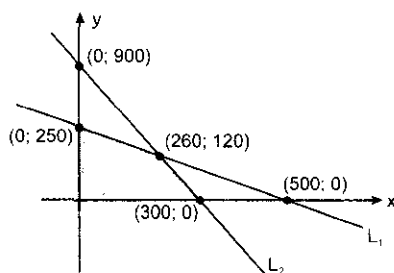
Resolución:

De los datos:

	S_1 x	S_2 y	Totales
F_1	1	2	500
F_2	3	1	900
Función objetivo	4	2	

Restricciones: $\begin{cases} x + 2y \leq 500 \dots L_1 \\ 3x + y \leq 900 \dots L_2 \\ x \geq 0 \wedge y \geq 0 \end{cases}$

Graficando:



Evaluando la función objetivo

$$f(x; y) = 4x + 2y$$

$$f(0; 250) = 500$$

$$f(260; 120) = 1280 \Rightarrow \text{solución óptima}$$

$$(x = 260; y = 120)$$

$$f(300; 0) = 1200$$

∴ El número total de peces es 380

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2011 - I)

Sea:

$$S = \{(x; y) / a_1x + b_1y \leq C_1, a_2x + b_2y \leq C_2, x \geq 0, y \geq 0\}$$

La región admisible de un problema de programación lineal.

Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F)

I. Si se modifica S , obteniéndose

$$S_1 = \{(x; y) / a_1x + b_1y \leq C_1, a_2x + b_2y \leq C_2, a_3x + b_3y \leq C_3, x \geq 0, y \geq 0\},$$

la solución no cambia, en un problema de maximización.

II. Si $f(x; y)$ es la función objetivo y $(x_0; y_0)$ es la solución en S y $(x_1; y_1)$ es la solución en S_1 entonces, en un problema de minimización se tendrá $f(x_0; y_0) \leq f(x_1; y_1)$

III. En general S_1 , la nueva región admisible puede o no variar en relación a S .

- A) FFV B) FVV C) FFF
D) VVF E) VFV

Resolución:

- I. Falso, porque depende de los coeficientes en $a_3x + b_3y \leq C_3$ que podían modificar el punto de la región factible donde se obtiene el máximo.
- II. Verdadero, al reducir la región factible por la parte inferior el mínimo valor aumenta. Al reducirse por la parte superior el mínimo no varía.
- III. Verdadero, toda proposición puede ser verdadera o falsa.

Clave: B

PROBLEMAS

PROPUESTOS

1. Una tienda vende dos marcas de televisores. La demanda de clientes indica que es necesario tener en existencia un número de aparatos de A que sea al menos el doble de aparatos de B. También es necesario contar con por lo menos 10 aparatos de la marca B y 20 de A. Hay espacio para no más de 100 aparatos en la tienda encuentre un sistema de desigualdades que describe todas las posibilidades par tener en existencia las dos marcas. Considere x la cantidad de A y la cantidad de B.

$$A) \begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 10 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

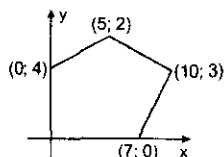
$$B) \begin{cases} x \geq 10 \\ y \geq 10 \\ x \leq 2y \\ x + y \leq 10 \end{cases}$$

$$C) \begin{cases} x \geq 20 \\ y \geq 10 \\ x \geq 2y \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

$$D) \begin{cases} x \geq 10 \\ y \geq 10 \\ x \geq 2y \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

$$E) \begin{cases} x \geq 5 \\ y \geq 10 \\ x \geq 2y \\ x + y \leq 100 \end{cases}$$

2. Si la función objetivo $Z = ax + 3y$; $a > 0$, toma un valor máximo de 39 en la región admisible mostrada, hallar el valor de "a".



- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

3. Trazar la región S definida por las restricciones dadas y marcar sus vértices. Calcular el valor máximo de $C = 3x + y$ en S.

$$(S) = \begin{cases} 3x - 4y \geq -12 \\ 3x + 2y \leq 24 \\ 3x - y \leq 15 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

- A) 9 B) 15 C) 12
D) 18 E) 21

4. Calcular el máximo valor de $Z = 5x + 4y$, tal que se cumple:

$$\begin{cases} 6x + 4y \leq 24 \\ x + 2y \leq 6 \\ -x + y \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- A) 0 B) 5 C) 10
D) 15 E) 21

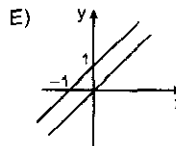
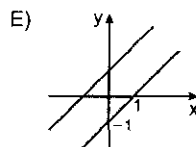
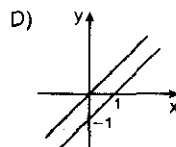
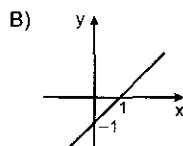
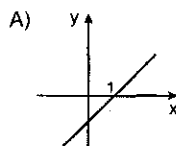
5. Un sastre tiene a su disposición 16 m^2 de algodón, 11 m^2 de seda y 15 m^2 de lana. Un traje requiere lo siguiente 2 m^2 de algodón, 1 m^2 de seda y 1 m^2 de lana; una túnica requiere lo siguiente: 1 m^2 de algodón, 2 m^2 de seda y 3 m^2 de lana. Si el traje se vende por S/.30 y una túnica por S/.50, ¿cuántas piezas de cada confección debe hacer el sastre para obtener la máxima cantidad de dinero?

- A) 8 trajes B) 4 trajes C) 7 trajes
0 tunicas 3 tunicas 2 tunicas
D) 3 trajes E) 5 tunicas
4 tunicas 0 trajes

6. Si A es un conjunto definido por:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{x-y} \leq 1\}$$

Entonces la figura que mejor representa la gráfica del conjunto A es:



7. Resolver el problema de programación lineal.

Maximizar: $Z(x; y) = 3x + 2y$

Sujeta a las restricciones:

$$x + y \leq 1; x \geq 0; y \geq 0$$

- A) -2 B) 0 C) 2
D) 3 E) 4

8. Maximizar $F(x; y) = 4x + 6y$, sujeta a:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 6 \\ 3x + y \leq 8 \\ x \geq 0; y \geq 0 \end{cases}$$

- A) 9,8 B) 10,7 C) 12
D) 16,5 E) 18

9. Maximizar la función: $F(x; y) = 4x + 3y$, sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} 30x + 20y &\leq 1800 \\ x + y &\leq 80 \\ x &\geq 0; y \geq 0 \end{aligned}$$

- A) 220 B) 240 C) 250
D) 260 E) 280

10. Minimizar $C(x; y) = 6x + 8y$, sujeta a las restricciones:

$$\begin{aligned} 40x + 10y &> 2400 \\ 10x + 15y &> 2100 \\ 5x + 15y &> 1500 \\ x > 0; y > 0 \end{aligned}$$

- A) 1100 B) 1140 C) 1200
D) 1800 E) 1920

11. Al representar gráficamente el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6y \leq -7 \\ y - x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

se obtiene una región cerrada. Hallar la mayor distancia que existe entre un punto de la región y el origen de coordenadas.

- A) $\sqrt{8}$ B) 3 C) 4
D) $\sqrt{17}$ E) $\sqrt{20}$

12. Si A es un conjunto definido por:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / y - x^2 + x + 6 > 0 \wedge y - x < -3\}$$

hallar el número de elementos del conjunto A.

- A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

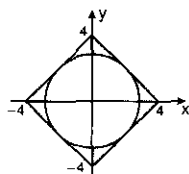
13. Si M es un conjunto definido por:

$$M = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 2y + x^2 + 4x \leq 2 / x^2 + 6x + 3 < 3y\}$$

hallar el número de elementos del conjunto M.

- A) 8 B) 9 C) 11
D) 12 E) 15

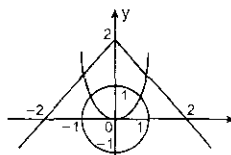
14. En la figura adjunta se muestra una región sombreada.



Hallar el sistema de inecuaciones que mejor define dicha región.

- A) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2 \\ |x| + |y| \geq 2 \end{cases}$ B) $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ |x| - |y| \geq 4 \end{cases}$
C) $\begin{cases} x^2 - y^2 \leq 2 \\ |x| + |y| \geq 4 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ |x| - |y| \leq 4 \end{cases}$
E) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 8 \\ |x| + |y| \leq 4 \end{cases}$

15. Determinar el sistema de inecuaciones que mejor representa a la región sombreada mostrada en la figura adjunta.



- A) $\begin{cases} y \leq x^2 \\ |x| - y \leq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$ B) $\begin{cases} y \leq x^2 \\ |x| + y \geq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$
C) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ |x| + y \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$ D) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 0 \\ |x| + y \geq 0 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$
E) $\begin{cases} y \geq x^2 \\ x + |y| \leq 2 \\ x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$

16. Timoteo tiene 480 hectáreas en la que puede sembrar trigo o maíz. Él calcula que tiene 800 horas de trabajo disponible durante la estación crucial de verano. Dados los márgenes de utilidad y los requerimientos laborales que se adjunta:

Maíz

Utilidad: S/.40 por hectárea.

Trabajo: 2 horas por hectárea.

Trigo

Utilidad: S/.30 por hectárea.

Trabajo: 1 hora por hectárea.

¿Cuántas hectáreas de cada uno debe plantar para maximizar su utilidad?

¿Cuál es la utilidad máxima?

- A) 12 560 B) 14 500 C) 17 600
D) 18 210 E) 20 200

17. Una compañía produce dos tipos de artículos: mecánicos y eléctricos, mensualmente. Cada uno requiere para su fabricación del uso tres máquinas (A, B y C). En la tabla adjunta se muestra la información relacionada con la fabricación de estos dos tipos de artículos.

Se sabe que la compañía vende todos los artículos que produce. Determinar la utilidad máxima mensual.

	A	B	C	Utilidad x Unidad
Mecánico	2 h	1 h	1 h	S/.4
Eléctrico	1 h	2 h	1 h	S/.6
Máx. horas disponibles	180 h	160 h	100 h	

- A) S/.360 B) S/.400 C) S/.440
D) S/.480 E) S/.520

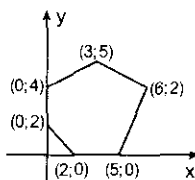
18. Un pequeño negocio se especializa en vender dos tipos de artículos (A y B). Si x representa la cantidad de artículos producidos del tipo A e y representa la cantidad de artículos producidos del tipo B, sujetos a:
- $$2x + y \leq 8$$
- $$2x + 3y \leq 12$$

Determinar la utilidad máxima P , si está dada por:
 $P(x, y) = (3x + y)1000$ soles

- A) S/. 4000 B) S/. 8000
 C) S/. 10 000 D) S/. 11 000
 E) S/. 12 000
19. Calcular el valor máximo y el valor mínimo de la función objetivo:

$$C = 3x + 2y + 5$$

en la región de la figura. Dar como respuesta la suma de tales valores.



- A) 24 B) 28 C) 32
 D) 36 E) 39
20. En una urbanización del distrito de Surco, se van a construir casas de dos tipos: económicas y super económicas, la empresa constructora dispone de S/. 1 800 000, siendo el costo de cada tipo de casa S/. 30 000 y S/. 20 000, respectivamente. La municipalidad exige que el número total de casas no debe ser superior a 80. Sabiendo que el beneficio por la venta de una casa económica es de S/. 4000 y por la super económica S/. 3000. ¿Cuántas casas super económicas deben construirse para obtener el máximo beneficio?
- A) 20 B) 40 C) 50
 D) 60 E) 70
21. Una compañía fabrica dos productos: grabadoras y amplificadores. Cada grabadora da una ganancia de \$3,00, mientras que cada amplificador da una ganancia de \$7,00. La compañía debe fabricar al menos una grabadora por día para satisfacer a uno de sus clientes, pero no más de 5, a causa de problemas de producción.
- Asimismo el número de amplificadores producidos no puede exceder los 6 diarios. Como requisito adicional el número de grabadoras no debe exceder al número de amplificadores. ¿Cuántos de cada producto debe fabricar la compañía a fin de obtener la ganancia máxima?

- A) 4; 5 B) 5; 6 C) 6; 7
 D) 6; 8 E) 7; 9

22. Las víctimas de un terremoto en una ciudad necesitan suministros médicos y bidones de agua. Cada paquete médico mide 1 metro cúbico y pesa 10 kg, cada bidón de agua también mide 1 metro cúbico, pero pesa 20 kg. El aeroplano sólo puede llevar 80 000 kg con un volumen total de 6000 metros cúbicos. Cada paquete médico ayudará a 4 personas, mientras que cada recipiente de agua servirá para 10 personas. ¿Cuántos de cada uno debe enviarse a la zona de desastre para maximizar el número de personas auxiliadas?

- A) 6000; 0 B) 4000; 2000 C) 3000; 3000
 D) 2000; 4000 E) 0; 4000

23. Minimizar: $Z = 2x_1 + 3x_2$, sujeta a las restricciones:

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$2x_1 + x_2 \geq 7$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 29$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

- A) 13 B) 14 C) 15
 D) 16 E) 17

24. En relación a la región factible limitada por las desigualdades:

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{8} \leq 1; \quad \frac{x}{5} + \frac{y}{8} \geq 1$$

$$\frac{x}{10} + \frac{y}{4} > 1; \quad x \geq 0; y \geq 0$$

determinar el mínimo valor de la función:

$$F(x, y) = 4x + 5y$$

- A) $24\frac{2}{3}$ B) $26\frac{2}{3}$ C) $28\frac{2}{3}$ D) $30\frac{2}{3}$ E) $32\frac{2}{3}$

25. Del siguiente problema de programación lineal:

$$a_1x + b_1y > c_1; \quad a_2x + b_2y > c_2$$

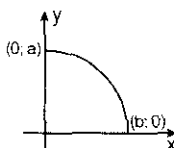
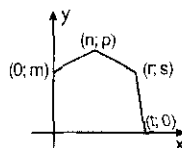
$$a_3x + b_3y > c_3; \quad x > 0; y > 0$$

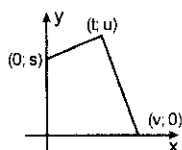
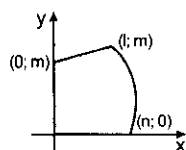
indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. La solución factible se halla siempre en la parte interior de una región acotada siempre.
 II. Todo problema como el planteado posee siempre una solución mínima.
 III. La gráfica de la función objetivo puede ser tangente a la región factible.

- A) FVV B) VFV C) VVF
 D) FVF E) FFF

26. A continuación se muestran 4 regiones en el plano xy . Indique cuál(es) de ellas representa(n) la región factible de un problema de programación lineal bi-dimensional.





- A) I y IV B) I y II
D) III y IV E) II y IV

C) II y III

27. Cuántas soluciones enteras tiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ x + y \leq 2 \end{cases}$$

- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

28. Hallar el área de la región:

$$\begin{cases} x \leq x, y \leq 0 \\ x + y \geq -2 \end{cases}$$

- A) 1 B) 2 C) 4
D) 5/2 E) 7/2

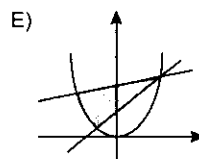
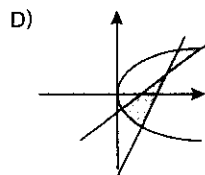
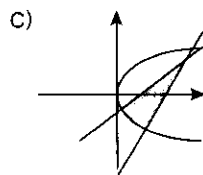
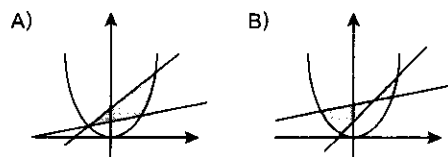
29. Cuántas soluciones enteras tiene el sistema:

$$\begin{cases} |x| \leq |y| \\ |x| + |y| \leq 3 \end{cases}$$

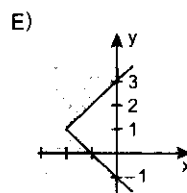
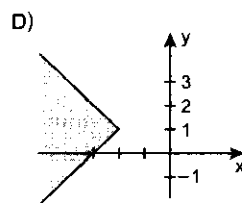
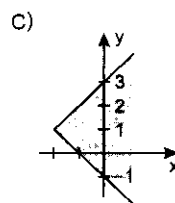
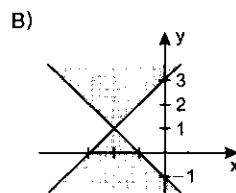
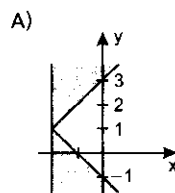
- A) 7 B) 8 C) 15
D) 16 E) 24

30. Dadas las siguientes inecuaciones:

$$x^2 - y < 0; x + 4 < 3y; y < x + 2, \text{ entonces, los pares } (x; y) \text{ que satisfacen estas inecuaciones están representados por la región sombreada}$$



31. Hallar la gráfica de la inecuación: $|y - 1| \geq 2 + x$



CLAVES

- | | | | | | | | |
|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. C | 5. C | 9. D | 13. E | 17. E | 21. B | 25. A | 29. C |
| 2. C | 6. C | 10. B | 14. E | 18. E | 22. E | 26. A | 30. A |
| 3. E | 7. D | 11. D | 15. C | 19. D | 23. A | 27. C | 31. E |
| 4. E | 8. D | 12. C | 16. C | 20. D | 24. B | 28. B | |

Sucesiones y Series

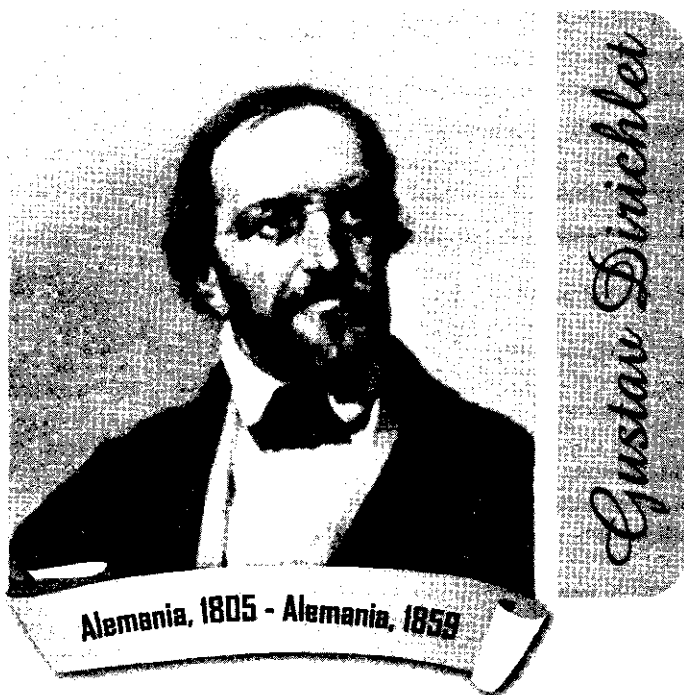
18

capítulo

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet nació en Düren, actual Alemania, el 13 de febrero de 1805 y murió en Gotinga, actual Alemania, el 5 de mayo de 1859. Fue educado en Alemania y después en Francia, donde aprendió de los más renombrados matemáticos del tiempo, relacionándose con algunos como Fourier. Sus métodos proporcionaron una perspectiva completamente nueva y sus resultados se encuentran entre los más importantes de las matemáticas. Además, se le atribuye la definición «formal» moderna de una función.

Dirichlet creó una parte nueva en las matemáticas, la aplicación de las series infinitas que Fourier había introducido en la teoría del calor en la exploración de las

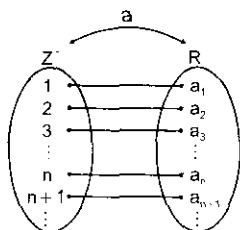
propiedades de los números primos. Su primera publicación comprendió una demostración particular del teorema de Fermat, para el caso $n = 5$, que también fue completado por Adrien-Marie Legendre, uno de sus revisores. Dirichlet gozó de una buena reputación entre sus estudiantes, debido a la claridad de sus explicaciones y disfrutó de la enseñanza. Además, consiguió introducir el cálculo integral y diferencial en el plan de estudios de la Academia Militar elevando significativamente el nivel de la educación científica.



Fuente: Wikipedia

« SUCESIONES

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos y su rango cualquier subconjunto de los números reales.



Notación

Sea a la sucesión, luego $a: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$; donde $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge a(n) \in \mathbb{R}$. $a(n)$ es un elemento de la sucesión cuya representación es $\{a_n\}$. Si la sucesión a admite infinitos términos se le representa así $\{a_n\}_{n=1}^\infty$.

Sucesión constante

$\{a_n\}$ en una sucesión constante si y solo si: $a_n = k; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Sucesiones monótonas

La sucesión $\{a_n\}$ es monótona si verifica uno de los siguientes casos:

1. Es creciente: $a_{n+1} > a_n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$
2. Es decreciente: $a_{n+1} < a_n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$
3. Es No creciente: $a_{n+1} \leq a_n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$
4. Es No decreciente: $a_{n+1} \geq a_n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Sucesiones acotadas

Acotada inferiormente: la sucesión $\{a_n\}$ es acotada inferiormente, si existe $L_1 \in \mathbb{R}$, tal que: $L_1 \leq a_n; \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Acotada superiormente: La sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente si existe $L_2 \in \mathbb{R}$; tal que: $a_n \leq L_2; \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Sucesión acotada: si la sucesión $\{a_n\}$ es acotada superiormente e inferiormente, diremos que es una sucesión acotada.

Límite de una sucesión

Una sucesión $\{a_n\}$ tiene por límite al número real L , si cuando n tiende al infinito ($n \rightarrow \infty$) simultáneamente a_n tiende a L ($a_n \rightarrow L$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Si la sucesión $\{a_n\}$ tiene límite, se dice que es convergente y converge a dicho límite.

Observación

Si: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ o también cuando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

diremos que la sucesión es divergente.

Prueba de la razón para convergencia de sucesiones

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales.

Si: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Por lo tanto, la sucesión $\{a_n\}$ es convergente.

Teoremas

1. Toda sucesión monótona y acotada es convergente.
2. Toda sucesión monótona convergente es acotada.

Propiedades

1. **De la media aritmética:** dada la sucesión convergente $\{a_n\}$.

$$\text{Si: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$\text{entonces: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \right) = L$$

2. **De la media geométrica:** dada la sucesión convergente $\{a_n\}$

$$\text{Si: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

$$\text{entonces: } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n}) = L$$

3. **Del encaje:** dada las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$, tal que: $a_n \leq b_n \leq c_n$

$$\text{entonces: } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L$$

$$\text{siempre que: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = L$$

« SERIES

Una serie es la suma de los elementos de una sucesión. Sea la sucesión:

$$\{a_n\}_{n=1}^\infty, \text{ luego: } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

es la serie infinita que consensualmente se le representa así:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$$

donde: a_n es el n -ésimo término de la serie.

Convergencia y divergencia de series

1. La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente cuando la suma de sus n primeros términos no excede a alguna cantidad finita por grande que sea n ($n \rightarrow \infty$).
2. La serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente cuando la suma de sus n primeros términos es mayor que cualquier cantidad finita considerando n suficientemente grande ($n \rightarrow \infty$).

Teoremas

Dadas las series convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ con sumas a y b , respectivamente, y $c \in \mathbb{R}$.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ es convergente y converge a: $a \pm b$.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} (ca_n)$ es convergente y converge a: ca .

Propiedad

Si la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$

es convergente, entonces: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 0$

Observación

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) \neq 0$, entonces la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

Criterios de convergencia

De comparación directa: dada la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos.

- Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos positivos es convergente, siendo $a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ de términos positivos es divergente, siendo $a_n \geq b_n, \forall n \in \mathbb{Z}^+$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente.

De la razón: dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos,

luego consideremos que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right) = k$ entonces:

- Si: $k < 1$, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.
- Si: $k > 1$, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es divergente o también cuando: $k = +\infty$ o $k = -\infty$
- Si: $k = 1$ el criterio no decide.

De la raíz: dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de términos positivos,

luego consideremos que: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = k$

Entonces:

- a) Si: $k < 1$, la serie es convergente
- b) Si: $k > 1$, la serie es divergente.
- c) Si: $k = 1$, el criterio no decide.

Series notables

Serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

es divergente.

Serie geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (ar^{n-1}) = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} + \dots$$

Si: $|r| < 1$, la serie es convergente.

$|r| \geq 1$, la serie es divergente.

Notas

- $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$
 $S = \frac{n(n+1)}{2}$
- $S = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)$
 $S = n^2$
- $S = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n$
 $S = n(n+1)$
- $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$
 $S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $S = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$
 $S = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- $S = 1(2) + 2(3) + 3(4) + \dots + n(n+1)$
 $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

Propiedades

- $\sum_{x=1}^n ax = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$
- $\sum_{x=1}^n x = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{x=1}^n x^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{x=1}^n x^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$
- $\sum_{x=1}^n c = nc$
- $\sum_{x=1}^n (a_x \pm b_x) = \sum_{x=1}^n a_x \pm b_x$

Ejemplos:

1. Indique cuál(es) de los siguientes enunciados son correctos.

- I. Si $\{a_n\} / a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$ entonces $\{a_n\}$ es decreciente y acotada.
- II. Si $\{a_n\}$ es tal que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$ entonces $\{a_n\}$ es decreciente.
- III. Si $\{a_n\}$ es una sucesión creciente y acotada, entonces $\{a_n\}$ es convergente.

Resolución:

$$\bullet a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$\Rightarrow \{a_n\} = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{37}{60}, \dots \right\}$$

Como $a_1 < a_2$; con esto, es suficiente para afirmar que $\{a_n\}$ no es decreciente $\Rightarrow$ (I) es F.

$$\bullet a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n+2}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{2n+2} + \sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+2}}$$

Racionalizando:

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{(\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+2})(\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n+1})}$$

Observar que el 2.º miembro es (+), entonces:

$$a_n - a_{n+1} > 0 \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

$\{a_n\}$ es decreciente $\Rightarrow$ (II) es V

• Por teoría, (III) es V

$\therefore$ Son correctos: (II) y (III)

2. Si: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $a_n = \frac{2^{n+1} + 3^{n-1}}{2^n + 3^{n+3}}$ entonces la sucesión converge a:

Resolución:

$$a_n = \frac{2^n(2) + 3^n(3)^{-1}}{2^n + 3^n(3)^3}$$

Extraemos 3^n del numerador y denominador; quedará así:

$$a_n = \frac{3^n \left[2 \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{3} \right]}{3^n \left[\left(\frac{2}{3} \right)^n + 27 \right]}$$

$$\text{Aquí: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{1}{3}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n + 27}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{0 + \frac{1}{3}}{0 + 27} = \frac{1}{81}$$

$\therefore \{a_n\}$ converge a $1/81$

3. A qué valor converge la siguiente sucesión:

$$\left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^3 \left(\frac{4}{3} \right)^4 \left(\frac{5}{4} \right)^5 \dots \right\}$$

Resolución:

$$a_1 = \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \left(1 + \frac{1}{2} \right)^3$$

$$a_2 = \left(\frac{4}{3} \right)^4 = \left(1 + \frac{1}{3} \right)^4$$

$$a_3 = \left(\frac{5}{4} \right)^5 = \left(1 + \frac{1}{4} \right)^5$$

$\vdots$

$$\Rightarrow a_n = \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2}$$

$$\text{Aquí: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}}{\text{conocido}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\text{Recuerde: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\text{Aplicando: } \lim_{x \rightarrow \infty} a_n = e \times 1 = e$$

$\therefore$ La sucesión converge a e

4. Se define la sucesión. S, por: $S = \left\{ \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n \right\}$; la sucesión, converge al valor de:

Resolución:

$$\text{Sea } a_n = \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^n$$

$$\Rightarrow a_n = \left[\frac{(n+1)-2}{n+1} \right]^n = \left[1 + \frac{-2}{n+1} \right]^n = \frac{\left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)}$$

$$\text{Luego: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{e^{-2}}{1} = e^{-2} \quad \therefore S \text{ converge a } e^{-2}$$

5. Determinar el valor de la suma finita: $\sum_{k=1}^{20} \frac{k^4 + 1 + k^3}{k + k^2}$

Resolución:

$$\text{Obs.: } \frac{k^4 + k^3 + 1}{k^2 + k} = \frac{k^2(k^2 + k) + 1}{k^2 + k} = k^2 + \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\text{Sea: } S = \sum_{k=1}^{20} \left(k^2 + \frac{1}{k(k+1)} \right) = \sum_{k=1}^{20} k^2 + \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)}$$

Por partes:

$$\bullet S_1 = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 20^2}{\text{Conocido}} = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 2870$$

$$\bullet S_2 = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{20 \times 21}$$

Desdoblado

$$S_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21}\right)$$

$$\Rightarrow S_2 = 1 - \frac{1}{21}$$

Luego: $S = (2870) + \left(1 - \frac{1}{21}\right)$

$$\therefore S = 2871 - \frac{1}{21}$$

6. Si la serie: $S = \frac{1}{a} + \frac{11}{a^2} + \frac{111}{a^3} + \frac{1111}{a^4} + \dots$,

converge a $\frac{13}{36}$, determinar el valor de "a".

Resolución:

Hallamos la suma:

$$S = \frac{1}{a} + \frac{11}{a^2} + \frac{111}{a^3} + \frac{1111}{a^4} + \dots (I)$$

Multiplicamos por $\left(\frac{10}{a}\right)$:

$$\frac{10S}{a} = \frac{10}{a^2} + \frac{110}{a^3} + \frac{1110}{a^4} + \dots (II)$$

$$(I) - (II): S - \frac{10S}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots$$

$$\text{Suma límite} = \frac{1/a}{1 - 1/a}$$

Observar que la razón es: $\frac{1}{a} \left| \frac{1}{a} \right| < 1$

$$\text{Luego: } S \left(\frac{a-10}{a} \right) = \frac{1}{a-1}$$

$$S = \frac{a}{(a-1)(a-10)} \Rightarrow \text{punto de convergencia}$$

$$\text{Luego: } \frac{a}{(a-1)(a-10)} = \frac{13}{36} = \frac{13}{(13-1)(13-10)}$$

Obsérvese: $a = 13$, verifica

$$\text{Además: } \left| \frac{1}{a} \right| = \left| \frac{1}{13} \right| < 1 \quad \therefore a = 13$$

7. Determinar la suma de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

Resolución:

Sabemos que: $2 \times 2^{n-1} = 2^n$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = 2^n - 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2^{n-1} = (1+2^n) - (1+2^{n-1})$$

Sea S lo pedido (reemplazamos ahí):

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2^n) - (1+2^{n-1})}{(1+2^n)(1+2^{n-1})}$$

$$\text{Desdoblado: } S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+2^{n-1}} - \frac{1}{1+2^n} \right)$$

Extendiendo:

$$S = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9}\right) + \dots \therefore S = 1/2$$

8. Determinar el valor de la suma:

$$E = \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{4 \times 6} + \frac{1}{6 \times 8} + \dots + \frac{1}{48 \times 50}$$

Resolución:

Multiplicamos por 2:

$$2E = \frac{2}{2 \times 4} + \frac{2}{4 \times 6} + \frac{2}{6 \times 8} + \dots + \frac{2}{48 \times 50}$$

Desdoblado:

$$2E = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \dots + \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{50}\right)$$

$$2E = \frac{1}{2} - \frac{1}{50} \Rightarrow 2E = \frac{24}{50} \therefore E = \frac{6}{25}$$

9. Se proponen las siguientes proposiciones:

I. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} / a_n = \frac{n}{3^n}$, entonces la sucesión es convergente.

II. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} / a_{n+1} = 3 + a_n^2$, $a_1 = 1$, $\forall n \geq 2$ es convergente.

III. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} / a_n + 1 = \frac{1}{2} a_n$, $a_1 = \frac{1}{3}$, $\forall n \geq 2$ es convergente.

¿cuáles son correctas?

Resolución:

I. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} / a_n = \frac{n}{3^n}$

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}: n < 3^n \Rightarrow \frac{n}{3^n} < 1$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: 0 < a_n < 1 \Rightarrow \{a_n\} \text{ es acotada.}$$

$$\bullet \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{n+1}{3n} < 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow \{a_n\} \text{ es decreciente}$$

$$\text{Luego } \{a_n\} \text{ es convergente.} \quad (V)$$

II. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} / a_{n+1} = 3 + a_n^2 \wedge a_1 = 1$

$$a_2 = 3 + a_1^2 = 4$$

$$a_3 = 3 + a_2^2 = 3 + 4^2 = 19$$

$$a_4 = 3 + a_3^2 = 3 + 19^2 = 364$$

$$\text{De donde } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$$

$$\Rightarrow \{a_n\} \text{ no es convergente.} \quad (F)$$

III. $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} / a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n \wedge a_1 = \frac{1}{3}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$$

$$\Rightarrow \{a_n\} \text{ es decreciente.}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \geq a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots > 0$$

$$\Rightarrow \{a_n\} \text{ es acotada.}$$

Luego: $\{a_n\}$ es convergente.

(V)

∴ Son convergentes: I y III

10. Calcular el valor de convergencia de la siguiente sucesión:

$$\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^4, \left(\frac{3}{4}\right)^5, \left(\frac{4}{5}\right)^6, \left(\frac{5}{6}\right)^7, \dots \right\}$$

Donde: $a_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+3}; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{-1}{n+2}\right]^{-(n-2) \frac{n-3}{n-2}} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n-3}{n+2}\right)} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left[-1 - \frac{1}{n+2}\right]} \\ &= e^{1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2}} = e^{-1-0} = e^{-1} = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

11. Considere la sucesión definida por: $\left\{1, \frac{9}{6}, \frac{19}{11}, \frac{33}{18}, \dots\right\}$ determinar el valor de convergencia.

Resolución:

$$\{a_n\} = \left\{1, \frac{9}{6}, \frac{19}{11}, \frac{33}{18}, \dots\right\}$$

$$\{a_n\} = \left\{\frac{3}{3}, \frac{9}{6}, \frac{19}{11}, \frac{33}{18}, \dots\right\}$$

Sea: $a_n = \frac{b_n}{c_n}$

Donde: $\{b_n\} = \left\{\underbrace{3}_6, \underbrace{9}_{10}, \underbrace{19}_{14}, \underbrace{33}_{14}, \dots\right\}$

$$b_n = 3C_0^{n-1} + 6C_1^{n-1} + 4C_2^{n-1}$$

$$b_n = 3 + 6(n-1) + 4 \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$b_n = 3 + 6n - 6 + 2n^2 - 6n + 4 = 2n^2 + 1 \wedge$$

$$\{c_n\} = \left\{\underbrace{3}_2, \underbrace{6}_2, \underbrace{11}_2, \underbrace{18}_2, \dots\right\}$$

$$c_n = 3C_0^{n-1} + 3C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1}$$

$$c_n = 3 + 3(n-1) + 2 \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

$$c_n = 3 + 3n - 3 + n^2 - 3n + 2 = n^2 + 2$$

$$\text{Luego: } a_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 2} = 2$$

∴ $\{a_n\}$ converge a 2.



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Dada la sucesión de término general $S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, hallar su convergencia.

Resolución:

$$\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}} / S_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right) = 0$$

∴ Luego: $\{S_n\}$ converge a 0.

2. Sea $\{a_n\}$ la sucesión cuyo término general es $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, hallar su convergencia.

Resolución:

$$\begin{aligned} \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} / a_n &= \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

⇒ $\{a_n\}$ converge a 0.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2+1} - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1} + n} \right) = 0$$

∴ $\{a_n\}$ converge a 0

3. Si en la sucesión: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ se cumple que $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; \forall n \geq 1$ y $a_8 = a_{11} = 10$. Hallar $a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

Resolución:

$$\{a_n\} / a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; \forall n \in \mathbb{N} \wedge a_8 = a_{11} = 10$$

Sea: $S = a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$$\Rightarrow S = a_5 + a_5 + a_6 = 2a_5 + a_6$$

$$n = 9: a_{11} = a_{10} + a_9 \Rightarrow a_{10} = 0$$

$$n = 8: a_{10} = a_9 + a_8 \Rightarrow a_8 = -10$$

$$n = 7: a_9 = a_8 + a_7 \Rightarrow a_7 = 20$$

$$n = 6: a_8 = a_7 + a_6 \Rightarrow a_6 = -30$$

$$n = 5: a_7 = a_6 + a_5 \Rightarrow a_5 = 50$$

$$\Rightarrow S = 2(50) + (-30) \quad \therefore S = 70$$

4. Sea: $r_0 = \frac{1}{2}$; para: $k = 1, 2; \dots$ se cumple:

$$r_k = \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \dots + \frac{1}{2^k + 2^k}$$

entonces en la serie: $S_k = r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_k$

Hallar la convergencia.

Resolución:

$$r_0 = \frac{1}{2} \wedge \forall k \in \mathbb{N}$$

$$r_k = \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} + \frac{1}{2^k + 3} + \dots + \frac{1}{2^k + 2^k}$$

$$S_k = r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_k$$

Tenga en cuenta la propiedad

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_n$ diverge.

$$\forall k \in \mathbb{N}: 2^k + 1 \leq 2^k + 2^k \Rightarrow \frac{1}{2^k + 1} \geq \frac{1}{2^k + 2^k}$$

Análogamente: $\frac{1}{2^k + 2} \geq \frac{1}{2^k + 2^k}$

$$\frac{1}{2^k + 3} \geq \frac{1}{2^k + 2^k}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^k + 2^k} \geq \frac{1}{2^k + 2^k}$$

$$\text{Sumando: } r_k \geq \frac{2^k}{2^k + 2^k} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r_k \geq \frac{1}{2}, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \neq 0$$

$$\Rightarrow S_k = r_0 + r_1 + r_2 + \dots + r_k$$

$$\text{Diverge, pues: } \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \sum_{k=0}^{\infty} r_k = +\infty$$

(crece ilimitadamente)

5. Dada la sucesión $\{0; 0; 6; 18; 36; \dots\}$, determinar el lugar que ocupa el número 216.

Resolución:

$$\{a_n\} = \{0; 0; 6; 18; 36; \dots\}$$

Donde: $a_n = 3b_n$, siendo:

$$\{b_n\} = \{0; 0; 2; 6; 12; \dots\}$$

$$\{b_n\} = \{0; 0; 1 \times 2; 2 \times 3; 3 \times 4; \dots\}$$

$$\Rightarrow b_n = (n-1)(n-2) \Rightarrow a_n = 3(n-1)(n-2)$$

$$\text{Luego: } a_n = 216 = 3(n-1)(n-2)$$

$$\Rightarrow (n-1)(n-2) = 72 = 9(8) \quad \therefore n = 10$$

6. Determinar el valor de convergencia de la sucesión:

$$\left\{ \left(\frac{n+3}{n} \right)^{3n} \right\}$$

Resolución:

$$a_n = \left(\frac{n+3}{n} \right)^{3n} = \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{3n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{n} \right)^{\frac{n}{3}} \right]^9$$

$$= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^{\frac{n}{3}} \right]^9 = e^9$$

7. Determinar el límite de la función f.

$$f(n) = \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n+2}, \text{ cuando } n \text{ tiende al infinito.}$$

Resolución:

$$f(n) = \left(\frac{n+1}{n+3} \right)^{n+2} \Rightarrow f(n) = \left(1 - \frac{2}{n+3} \right)^{n+2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+3} \right)^{n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2}{n+3} \right)^{\frac{n+3}{2}} \right]^{\frac{2(n+2)}{n+3}}$$

$$= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{2(n+2)}{n+3}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} -2 \left(1 - \frac{1}{n+3} \right)} = e^{-2(1)} = e^{-2}$$

8. Determinar el número al cual converge la sucesión:

$$\left\{ \left(\frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} \right) \right\}$$

Resolución:

$$b_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} \right)$$

Propiedad: de la media aritmética

Sea $\{a_n\}$ una sucesión.

$$\text{Si: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} = L$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1} \right) = 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$$

9. Dada la serie: $\frac{11}{a} + \frac{101}{a^2} + \frac{1001}{a^3} + \dots$, $a > 10$,

hallar el valor de "a", tal que la serie converge a:

$$1 + \frac{1}{19}$$

Resolución:

Siendo: $a > 10$

$$S = \frac{11}{a} + \frac{101}{a^2} + \frac{1001}{a^3} + \dots = 1 + \frac{1}{19}$$

$$S = \frac{10+1}{a} + \frac{10^2+1}{a^2} + \frac{10^3+1}{a^3} + \dots$$

$$S = \left(\frac{10}{a} + \left(\frac{10}{a} \right)^2 + \left(\frac{10}{a} \right)^3 + \dots \right) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots \right)$$

$$\text{Como: } a > 10 \Rightarrow 0 < \frac{10}{a} < 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{\frac{10}{a}}{1 - \frac{10}{a}} + \frac{\frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{a}} = \frac{10}{a-10} + \frac{1}{a-1}$$

$$\Rightarrow \frac{10}{a-10} + \frac{1}{a-1} = 1 + \frac{1}{19}$$

De donde: $a = 20$

10. Determinar la suma de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-n})^2$

Resolución:

Tenga en cuenta que: $\forall |r| < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + 3^{-n})^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (4^{-n} + 2(6)^{-n} + 9^{-n})$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 6^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n}$$

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9} \right)^n$$

$$S = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} + 2 \left(\frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{1}{6}} \right) + \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{1}{8} = \frac{103}{120}$$

11. Determinar el valor de $T = \sum_{n=1}^{100} \left[\frac{1}{n(n+2)} \right]$

Resolución:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{102} \right)$$

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{100}{101} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{50}{102} \right) = \frac{7625}{10302}$$

12. Indicar cuáles de los siguientes enunciados son correctos.

I. $\{a_n\}$ es creciente, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$, $n \geq 2$

II. $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$ es decreciente.

III. $\left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\}$ es una sucesión acotada.

Resolución:

I. De $a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$; $a_1 = \sqrt{2}$

Observamos:

$$a_2 = \sqrt{2a_1} \Rightarrow a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{2a_2} \Rightarrow a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$a_4 = \sqrt{2a_3} \Rightarrow a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

$\vdots$

Nótese que: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$

$\Rightarrow$ la sucesión es creciente $\Rightarrow$ (I) es V

II. De la sucesión $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$, se tiene: $a_n = \frac{n}{n+1}$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \Rightarrow a_n - a_{n+1} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} =$$

$$\frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n+1} < 0 \Rightarrow a_n < a_{n+1}$$

$\Rightarrow$ la sucesión es creciente $\Rightarrow$ (II) es F

III. De la sucesión $\left\{ \frac{n}{n^2+1} \right\} \Rightarrow a_n = \frac{n}{n^2+1}$

$$\text{Luego: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ es convergente, donde se sabe por propiedad que toda sucesión convergente es acotada $\Rightarrow$ (III) es V

$\therefore$ (I) y (III) son correctos.

13. Sea la sucesión: $\left\{ \frac{1}{5}, \frac{7}{25}, \frac{37}{125}, \frac{175}{625}, \dots \right\}$

indicar cuáles de los siguientes enunciados son correctos.

I. Es decreciente.

II. Es convergente.

III. Es divergente

Resolución:

De la sucesión: $\{a_n\} = \left\{ \frac{1}{5}, \frac{7}{25}, \frac{37}{125}, \frac{175}{625}, \dots \right\}$

I. Observemos: $a_1 = \frac{1}{5} \wedge a_2 = \frac{7}{25}$

$$\text{Donde: } a_1 < a_2 \left(\frac{1}{5} < \frac{7}{25} \right)$$

Con esto, ya se puede afirmar que no es decreciente $\Rightarrow$ (I) es F

$$\text{II. } a_1 = \frac{1}{5} \Rightarrow a_1 = \frac{4^1 - 3^1}{5^1}$$

$$a_2 = \frac{7}{25} \Rightarrow a_2 = \frac{4^2 - 3^2}{5^2}$$

$$a_3 = \frac{37}{125} \Rightarrow a_3 = \frac{4^3 - 3^3}{5^3}$$

$$a_4 = \frac{175}{625} \Rightarrow a_4 = \frac{4^4 - 3^4}{5^4}$$

$\vdots$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4^n - 3^n}{5^n}$$

$$\begin{aligned} \text{Ahora: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n - 3^n}{5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5} \right)^n - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^n \end{aligned}$$

Recuerde: si $0 < k < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} k^n = 0$

$$\text{Aplicando: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 - 0 = 0$$

$\Rightarrow \{a_n\}$ es convergente $\Rightarrow$ (II) es V

III. Por lo anterior $\Rightarrow$ (III) es F

$\therefore$ Solo (II) es correcto.

14. Determinar el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} 2^{-3n}$$

Resolución:

$\forall n \in \mathbb{N}$: $n(n+1)$ es par

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} (2)^{-3n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n(n+1)} \left(\frac{1}{8} \right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n^2+n} (2)^{-3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{8} \right)^n = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

15. A qué valor converge la serie: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2(k!)}$

Resolución:

Tenga en cuenta que:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = e$$

$$\text{Sea } S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2(k!)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k-1)!}$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1+1}{(k-1)!}$$

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!} \right)$$

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \right] \\
 * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} &= 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2}{2!} + \frac{3}{3!} + \frac{4}{4!} + \dots \\
 &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = e \\
 \therefore S &= \frac{1}{2}(e + e) = e
 \end{aligned}$$

16. Determinar la suma de la serie: $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^n$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots \\
 2S &= 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots \\
 S &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \\
 S &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \quad \therefore S = 2
 \end{aligned}$$

17. Dada la siguiente progresión aritmética:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ se puede determinar $\frac{a_{10}}{a_5}$, sabiendo que la suma de los 10 primeros términos es el cuádruple de la suma de los 5 primeros términos.

Resolución:

$$\begin{aligned}
 a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10} \\
 S_{10} &= 4S_5, S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n \\
 \Rightarrow \left(\frac{a_1 + a_{10}}{2} \right) (10) &= 4 \left(\frac{a_1 + a_5}{2} \right) (5) \\
 \Rightarrow \frac{a_1 + a_{10}}{2} &= a_1 + a_5 \Rightarrow a_{10} = a_1 + 2a_5 \\
 \text{Si } r &\text{ es la razón de PA} \\
 \Rightarrow a_1 + 9r &= a_1 + 2a_1 + 2(4r) \Rightarrow 2a_1 = r \Rightarrow a_1 = \frac{r}{2} \\
 \Rightarrow a_n &= a_1 + (n-1)r = \frac{r}{2} + (n-1)r \\
 \Rightarrow a_n &= \frac{r}{2}(2n-1) \quad \therefore \frac{a_{10}}{a_5} = \frac{\frac{r}{2}(19)}{\frac{r}{2}(9)} = \frac{19}{9}
 \end{aligned}$$

18. Determinar el valor de: $T = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{4n^2 - 1}$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 T &= \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{4n^2 - 1} = \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 T &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{100} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 T &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2 \times 1 - 1} - \frac{1}{2 \times 100 + 1} \right) \quad (\text{Por la propiedad telescópica}) \\
 \therefore T &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{201} \right) = \frac{100}{201}
 \end{aligned}$$

19. Determinar el valor de convergencia de la sucesión:

$$\left\{ \frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \right\}^{n+3}$$

Resolución:

De la sucesión:

$$a_n = \left[\frac{(n-1)(n-2)}{(n+1)(n+2)} \right]^{n+3} = \left[\left(\frac{n-1}{n+1} \right) \left(\frac{n-2}{n+2} \right) \right]^{n+3}$$

Desdoblado en cada paréntesis:

$$a_n = \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+3} \left(1 + \frac{-4}{n+2} \right)^{n+3}$$

$$a_n = \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^2 \left(1 + \frac{-4}{n+2} \right)^{n+2} \left(1 + \frac{-4}{n+2} \right)$$

$$\text{Aqui: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^{n+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{n+1} \right)^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{n+2} \right)^{n+2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-4}{n+2} \right)$$

$$\text{Si: } n \rightarrow \infty \begin{cases} n+1 \rightarrow \infty \\ n+2 \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\text{Recuerde: } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k$$

$$\text{Aplicando: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-2} \times 1 \times e^{-4} \times 1 = e^{-6}$$

$\therefore$ La sucesión converge a: e^{-6}

20. Calcular el valor de convergencia de la sucesión:

$$\left\{ \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{(2n+1)^2(3n-1)^2} \right\}$$

Resolución:

$$\begin{aligned}
 \text{Sea: } a_n &= \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3}{(2n+1)^2(3n-1)^2} \\
 &= \frac{\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2}{(2n+1)^2(3n-1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4(2n+1)^2(3n-1)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4(2n+1)^2(3n-1)^2} \right]$$

Recordar, si:

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}$$

donde: $m = n$ (grados: 5)

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a_0}{b_0} > \text{coeficientes principales}$$

$$\text{Aplicando: } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{(1)(1)}{4(2)^2(3)^2} = \frac{1}{144}$$

$\therefore$ La sucesión converge a $1/144$

21. Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión definida por:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{11}{30}, \frac{111}{300}, \frac{1111}{3000}, \dots \right\}; \text{ determinar el valor de convergencia de la sucesión } \{a_n\}$$

Resolución:

$$\{a_n\} = \left\{ \frac{11}{30}, \frac{111}{300}, \frac{1111}{3000}, \dots \right\}$$

De aquí:

$$a_1 = \frac{11}{30} \times \frac{9}{9} = \frac{10^2 - 1}{27(10)} = \frac{1}{27} \left(10 - \frac{1}{10} \right)$$

$$a_2 = \frac{111}{300} \times \frac{9}{9} = \frac{10^3 - 1}{27(10^2)} = \frac{1}{27} \left(10 - \frac{1}{10^2} \right)$$

$$a_3 = \frac{1111}{3000} \times \frac{9}{9} = \frac{10^4 - 1}{27(10^3)} = \frac{1}{27} \left(10 - \frac{1}{10^3} \right)$$

⋮

Término general: $a_n = \frac{1}{27} \left(10 - \frac{1}{10^n} \right)$

Luego: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{27} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(10 - \frac{1}{10^n} \right)$

$$= \frac{1}{27} (10 - 0) = \frac{10}{27}$$

∴ $\{a_n\}$ converge a $\frac{10}{27}$

22. Determinar el valor donde la sucesión es convergente.

$$\left\{ \frac{12}{4}, \frac{24}{7}, \frac{44}{12}, \frac{72}{19}, \dots \right\}$$

Resolución:

Se tiene:

$$\bullet a_1 = \frac{12}{4} = \frac{4(3)}{4} = \frac{4(1^2 + 2)}{1^2 + 3}$$

$$\bullet a_2 = \frac{24}{7} = \frac{4(6)}{7} = \frac{4(2^2 + 2)}{2^2 + 3}$$

$$\bullet a_3 = \frac{44}{12} = \frac{4(11)}{12} = \frac{4(3^2 + 2)}{3^2 + 3}$$

$$\bullet a_4 = \frac{72}{19} = \frac{4(18)}{19} = \frac{4(4^2 + 2)}{4^2 + 3}$$

⋮

Término general: $a_n = \frac{4(n^2 + 2)}{n^2 + 3} = \frac{4n^2 + 8}{n^2 + 3}$

Luego: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2 + 8}{n^2 + 3} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{1} = 4$$

∴ La sucesión converge a 4.

23. Determinar el valor de $E = \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{4n^2 - 1}$

Resolución:

Sea: $S = \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Extendiendo:

$$S = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{99 \times 101}$$

Multiplico por 2:

$$2S = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{2}{5 \times 7} + \dots + \frac{2}{99 \times 101}$$

Desdoblamos en cada sumando:

$$2S = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right)$$

Cancelando: $2S = 1 - \frac{1}{101} \Rightarrow 2S = \frac{100}{101}$

$$\therefore S = \frac{50}{101}$$

24. En la expresión siguiente encontrar el valor de la constante A.

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = A \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right]$$

Resolución:

Halleemos: $S = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}$

Extendiendo:

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{n}{3^n} \quad \dots(I)$$

Multiplicamos por:

$$\frac{1}{3}S = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \dots + \frac{n-1}{3^n} + \frac{n}{3^{n+1}} \quad \dots(II)$$

$$(I) - (II): \frac{2S}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

Adición de los términos de una P.G.
de n términos de razón = 1/3

$$\Rightarrow \frac{2S}{3} = \left(\frac{1}{3} \right) \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n - 1 \right] - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\frac{2S}{3} = \left(\frac{1}{3} \right) \frac{3(1 - 3^n)}{(-2)(3^n)} - \frac{n}{3^{n+1}}$$

$$2S = \frac{3(3^n - 1)}{2(3^n)} - \frac{n}{3^n}$$

Multiplicando por 2: $4S = \frac{3^n \times 3 - 3 - 2n}{3^n}$

Desdoblado adecuadamente:

$$4S = 3 - \frac{2n+3}{3^n} \Rightarrow S = \frac{1}{4} \left[3 - \frac{2n+3}{3^n} \right]$$

∴ Identificando con el dato: $A = \frac{1}{4}$

25. Sea $\{x_n\}$ una sucesión, tal que: $x_1 = 3$ y

$$x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}. \text{ Determinar el valor de convergencia.}$$

Resolución:

$$x_{n+1} = \frac{3+3x_n}{3+x_n}; x_1 = 3$$

Si $x_1 = 3$ podemos afirmar usando la regla, que los términos de la sucesión son positivos.

Ahora, si asumimos que el valor de la convergencia es L.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = L = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$\text{Luego: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \frac{3 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{3 + \lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

Reemplazando:

$$L = \frac{3 + 3L}{3 + L} \Rightarrow 3L + L^2 = 3 + 3L \quad \therefore L = \sqrt{3}$$

$$26. \text{ Si: } \sum_{k=1}^n 3(k+1)(k+2) = 83n, \text{ hallar } n.$$

Resolución:

Tenga en cuenta que:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{Además: } \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n b_k$$

Entonces, en la condición inicial:

$$3 \sum_{k=1}^n (k^2 + 3k + 2) = 83n$$

$$\Rightarrow 3 \sum_{k=1}^n k^2 + 9 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 6 = 83n$$

$$\Rightarrow \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{9n(n+1)}{2} + 6n = 83n$$

$$\Rightarrow (n+1)(n+5) = 77 = 7 \times 11 \quad \therefore n = 6$$

27. Si f es una función, entonces indicar verdadero (V) o falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:

$$\text{I. } \sum_{k=1}^{n+1} [f(k+2) - f(k)] = f(n+2) - f(n)$$

$$\text{II. } \sum_{k=1}^n x^{k+1} = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$\text{III. } \sum_{k=1}^n x^{n+k} = \frac{x^{n+1}(x^n - 1)}{x - 1}$$

Resolución:

I. Falsa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n+1} [f(k+2) - f(k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} [f(k+2) - f(k+1) + f(k+1) - f(k)] \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} [f(k+2) - f(k+1)] + \sum_{k=1}^{n+1} [f(k+1) - f(k)] \\ &= f(n+3) - f(2) + f(n+2) - f(1) \end{aligned}$$

II. Falsa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n x^{k+1} = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^{n+1} \\ & \sum_{k=1}^n x^{k+1} = x^2 (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) \\ & \sum_{k=1}^n x^{k+1} = x^2 \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right) = \frac{x^{n+2} - x^2}{x - 1} \end{aligned}$$

III. Verdadera

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n x^{n+k} = x^{n+1} + x^{n+2} + x^{n+3} + \dots + x^{2n} \\ & \sum_{k=1}^n x^{n+k} = x^{n+1} (1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1}) \\ & \sum_{k=1}^n x^{n+k} = x^{n+1} \left(\frac{x^n - 1}{x - 1} \right) \\ & \therefore \text{FFV} \end{aligned}$$

$$28. \text{ Si: } \sum_{k=1}^n 2k(3k-4) = 15\,540, \text{ hallar } n.$$

Resolución:

$$\sum_{k=1}^n 2k(3k-4) = 15\,540$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n (6k^2 - 8k) = 15\,540$$

$$\Rightarrow 6 \sum_{k=1}^n k^2 - 8 \sum_{k=1}^n k = 15\,540$$

$$\Rightarrow n(n+1)(2n+1) - 4n(n+1) = 15\,540$$

$$\Rightarrow n(n+1)(2n-3) = 15\,540 = 20 \times 21 \times 37$$

$$\therefore n = 20$$

29. Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:

$$\text{I. } \sum_{k=1}^m (k+1)(2k+5) = \frac{m}{6} (4m^2 + 27m + 53)$$

$$\text{II. } \sum_{k=1}^m (a_{k-2} - a_k) = a_{m-2} + a_{m+1} - 2a_1$$

$$\text{III. } \frac{\sum_{k=1}^m (2k-1)^2}{\sum_{k=1}^m k^2} = \frac{2(2m-1)}{m+1}$$

Resolución:

I. Verdadera

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m (k+1)(2k+5) = \sum_{k=1}^m (2k^2 + 7k + 5) \\ &= 2 \sum_{k=1}^m k^2 + 7 \sum_{k=1}^m k + \sum_{k=1}^m 5 \\ &= \frac{2m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{7m(m+1)}{2} + 5m \\ &= \frac{m}{6} (4m^2 + 6m + 2 + 21m + 21 + 30) \\ &= \frac{m}{6} (4m^2 + 27m + 53) \end{aligned}$$

II. Falsa

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m (a_{k-2} - a_k) = \sum_{k=1}^m (a_{k-2}) - a_{k-1} + a_{k-1} - a_k \\ &= \sum_{k=1}^m (a_{k-2} - a_{k-1}) + \sum_{k=1}^m (a_{k-1} - a_k) \\ &= a_{m-2} - a_2 + a_{m+1} - a_1 \\ &= a_{m-2} + a_{m+1} - a_2 - a_1 \end{aligned}$$

III. Verdadera

$$\begin{aligned} & \text{Como: } \sum_{k=1}^m (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^m (4k^2 - 4k + 1) \\ &= \frac{4m(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{4m(m+1)}{2} + m \\ &= \frac{m}{6} (8m^2 + 12m + 4 - 12m - 12 + 6) \\ &= \frac{m}{6} (8m^2 - 2) = \frac{m}{3} (2m+1)(2m-1) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum_{k=1}^m (2k-1)^2 = \frac{m}{3}(2m+1)(2m-1) = \frac{2(2m-1)}{m+1} \sum_{k=1}^m k^2$$

 $\therefore$ VFV

30. Se dan los cuatro primeros términos de la sucesión:

$$\{a_n\}_{n \geq 1} = \left\{ \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{12}, \frac{9}{16}, \dots \right\}$$

determine a partir de qué lugar los términos de la sucesión son menores que 0,51.

Resolución:

$$\text{Sea: } a_n = \frac{b_n}{c_n}$$

$$\text{Donde: } \{b_n\} = \{3; 5; 7; 9; \dots\} \Rightarrow b_n = 2n + 1$$

$$\text{También: } \{c_n\} = \{4; 8; 12; 16; \dots\} \Rightarrow c_n = 4n$$

$$\text{Luego: } a_n = \frac{2n+1}{4n}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow a_n < 0,51 \Rightarrow \frac{2n+1}{4n} < \frac{51}{100} \Rightarrow 50n + 25 < 51n$$

$$\Rightarrow n > 25$$

$$n = 26; 27; 28; \dots$$

 $\therefore$ A partir del término a_{26} se tiene: $a_n < 0,51$

31. Si se cumple:

$$3 + 8 + 15 + 24 + \dots + a_n = an^3 + bn^2 + cn + d$$

hallar: $a + b + c + d$ **Resolución:**

$$\text{Tenemos: } \{a_n\} = \{3; 8; 15; 24; \dots\}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ 5 \quad 7 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \quad 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n ak = 3C_1^n + 5C_2^n + 2C_3^n$$

$$= 3n + \frac{5n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6}$$

Luego, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$an^3 + bn^2 + cn + d = 3n + \frac{5n(n-1)}{2} + \frac{2n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\text{Para } n = 1: a + b + c + d = 3$$

32. Hallar el valor de convergencia de la siguiente sucesión:
- $\{a_n\} = \{\sqrt{n^2 + 1} - n\}$

Resolución:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n) \left(\frac{\sqrt{n^2 + 1} + n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \right) = 0$$

 $\therefore \{a_n\}$ converge a 0.

33. Determine el valor de:
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

Resolución:

$$\text{Tenemos } S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$\text{Luego: } S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$\text{Donde: } S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right)$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \therefore S = \frac{n}{2n+1}$$

34. Calcule el valor de convergencia de la sucesión:

$$\{a_n\} = \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^4; \left(\frac{3}{4} \right)^5; \left(\frac{4}{5} \right)^6; \left(\frac{5}{6} \right)^7; \dots \right\}$$

Resolución:El término a_n está dado como sigue:

$$a = \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+3}; \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{n+3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{-1}{n+2} \right)^{-(n+2)} \right]^{\frac{(n+3)}{(n+2)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{n+2} \right)^{-(n+2)} = e^{-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-1}$$

35. Calcule la siguiente suma:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{7}{125} + \frac{15}{625} + \frac{31}{3125} + \dots$$

Resolución:

Tenemos:

$$S = 1 + \frac{1}{5} + \frac{3}{25} + \frac{7}{125} + \frac{15}{625} + \frac{31}{3125} + \dots$$

$$S = 1 + \frac{2-1}{5} + \frac{2^2-1}{5^2} + \frac{2^3-1}{5^3} + \frac{2^4-1}{5^4} + \dots$$

$$S = 1 + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2^2}{5^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{2^3}{5^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{2^4}{5^4} - \frac{1}{5^4} + \dots$$

$$S = \left[1 + \frac{2}{5} + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + \left(\frac{2}{5} \right)^3 + \dots \right] - \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots \right]$$

Además, si:

$$|r| < 1 \wedge a \neq 0 \Rightarrow a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots = \frac{a}{1-r}$$

$$\text{Luego: } S = \frac{1}{1 - \frac{2}{5}} - \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{3} - \frac{1}{4}$$

$$\therefore S = 17/12$$

36. Dos poblaciones A y B tienen en la actualidad 9 167 360 y 143 240 habitantes, respectivamente, suponiendo una disminución anual A en 1/8 de sus habitantes y un aumento anual de B en 3/4 de sus habitantes, ¿dentro de cuántos años las dos poblaciones tendrán el mismo número de habitantes?

Resolución:Si la sucesión es: $a; aq; aq^2; aq^3; \dots; a_n$

Donde: $a \neq 0 \wedge q \neq 0$, se tiene: $S_n = a \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$

La población de A disminuye en $1/8$ cada año, quedará al final de cada año, $7/8$ del anterior, es decir:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Inicio:} & 1.^{\circ} & 2.^{\circ} & 3.^{\circ} & \dots & n.^{\circ} \\ a & \frac{7}{8}a & \left(\frac{7}{8}\right)^2 a & \left(\frac{7}{8}\right)^3 a & \dots & \left(\frac{7}{8}\right)^n a \end{array}$$

La población de B aumenta en $3/4$ cada año, al final de cada año habrá $7/4$ del año anterior, es decir:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Inicio:} & 1.^{\circ} & 2.^{\circ} & 3.^{\circ} & \dots & n.^{\circ} \\ b & \frac{7}{4}b & \left(\frac{7}{4}\right)^2 b & \left(\frac{7}{4}\right)^3 b & \dots & \left(\frac{7}{4}\right)^n b \end{array}$$

$$\text{Luego: } \left(\frac{7}{8}\right)^n a = \left(\frac{7}{4}\right)^n b \Rightarrow 2^n = \frac{a}{b}$$

$$\text{Donde: } a = 9\ 167\ 360; b = 143\ 240$$

$$\text{Reemplazando: } 2^n = \frac{9\ 167\ 360}{143\ 240} = 64$$

$$\therefore n = 6$$

37. Si S es una serie definida por:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{k+2} - 6k^2 - 6k}{2^k k^2 + 2^k k} \right)$$

hallar el valor de convergencia.

Resolución:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^{k+2} - 6k^2 - 6k}{2^k k^2 + 2^k k} \right)$$

$$\Rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{2^{k+2}}{2^k (k^2 + k)} - \frac{6(k^2 + k)}{2^k (k^2 + k)} \right]$$

$$\Rightarrow S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^2}{k^2 + k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{2^k}$$

$$\Rightarrow S = 2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} - 6 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$\Rightarrow S = 2^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - 6 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k$$

$$\Rightarrow S = 2^2(1 - 0) - \frac{6(1/2)}{1 - 1/2} = 2^2 - 6$$

$$\therefore S = -2$$

38. Si S es una serie definida por $S = \frac{1}{6} + \frac{7}{72} + \frac{37}{864} + \dots$,

hallar el valor de la convergencia.

Resolución:

$$S = \frac{1}{6} + \frac{7}{72} + \frac{37}{864} + \dots$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2^0(6)} + \frac{7}{2(6^2)} + \frac{37}{2^2(6^3)} + \dots$$

Multiplicando todo por $1/2$:

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{12} + \frac{7}{12^2} + \frac{37}{12^3} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{4-3}{12} + \frac{4^2-3^2}{12^2} + \frac{4^3-3^3}{12^3} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{4}{12} - \frac{3}{12} + \frac{4^2}{12^2} - \frac{3^2}{12^2} + \frac{4^3}{12^3} - \frac{3^3}{12^3} + \dots$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}S = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore S = 1/3$$

39. Si S es una serie definida por:

$$S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{18} + \frac{8}{162} + \frac{16}{1944} + \dots$$

hallar el valor de convergencia.

Resolución:

Recordemos que:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = e^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Luego: } S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{18} + \frac{8}{162} + \frac{16}{1944} + \dots$$

$$\Rightarrow S = 1 + \frac{2}{3(1)} + \frac{2^2}{3^2(2)} + \frac{2^3}{3^3(6)} + \frac{2^4}{3^4(24)} + \dots$$

Y esto se puede escribir así:

$$S = 1 + \frac{2}{3!} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^4}{4!} + \dots$$

$$\Rightarrow S = e^{2/3} \quad \therefore S = \sqrt[3]{e^2}$$

40. Si S es una serie definida por $S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k(k!)}$, hallar el valor de convergencia de S.

Resolución:

$$\text{De la serie S: } S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{2^k(k!)}$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{2^k(k!)} - \frac{1}{2^k(k!)} \right)$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} - \frac{1}{2^k(k!)} \right]$$

Aplicamos la propiedad telescópica:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} [F(1) - F(n+1)]$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2^0(0!)} - \frac{1}{2^n(n!)} \right]$$

$$\Rightarrow S = 1 - 0 \quad \therefore S = 1$$

41. Si T es una serie definida por:

$$T = \pi + \frac{\pi}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}^2} + \frac{\pi}{\sqrt{2}^3} + \dots + \frac{\pi}{\sqrt{2}^{n-1}} + \dots$$

hallar el valor de convergencia

Resolución:

Factorizando en T:

$$T = \pi \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}^2} + \frac{1}{\sqrt{2}^3} + \dots \right)$$

$$T = \pi \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \right) = \pi \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right) \quad \therefore T = \frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{2} - 1}$$

42. Si S es una serie definida por:

$$S = 2 + 3 + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{2}{9} + \frac{3}{16} + \frac{2}{27} + \frac{3}{64} + \frac{2}{81} + \dots$$

hallar el valor de convergencia.

Resolución:

Agrupando términos en S:

$$S = \left(2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \dots \right) + \left(3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{64} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow S = 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) + 3 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right)$$

$$\Rightarrow S = 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) + 3 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} \right)$$

$$\Rightarrow S = 2 \left(\frac{3}{2} \right) + 3 \left(\frac{4}{3} \right) \quad \therefore S = 7$$

43. Si M y N representan dos cantidades definidas por:

M es el valor de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^k} \right)$ N es el valor de convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k}$

Establecer la correcta relación de orden entre los valores de M y N.

Resolución:Recordando, si: $|a| < 1$, entonces: $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^k} \right) = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^{k-1} = \frac{4}{3} \sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^q, \quad q = k-1$$

$$\Rightarrow M = \frac{4}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{3}{2} \right) = 2 \quad \Rightarrow M = 2$$

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{4^{k-1}}$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{4} \sum_{q=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} \right)^q = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \right) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore M = 10N$$

44. La masa de un péndulo recorre 36 cm durante la primera oscilación. En cada una de las oscilaciones siguientes la masa recorre
- $\frac{2}{3}$
- de la distancia recorrida en la oscilación anterior. Determine, en cm, la distancia total recorrida por la masa hasta que se detiene por efecto de la resistencia del aire.

Resolución:

$$\begin{array}{ccccccc} 1.^{\circ} & 2.^{\circ} & 3.^{\circ} & 4.^{\circ} & \dots \\ 36 & \frac{2}{3}(36) & \left(\frac{2}{3} \right)^2(36) & \left(\frac{2}{3} \right)^3(36) & \dots \end{array}$$

Sea D la distancia total recorrida por la masa hasta detenerse, luego:

$$D = 36 + \frac{2}{3}(36) + \left(\frac{2}{3} \right)^2(36) + \left(\frac{2}{3} \right)^3(36) + \dots$$

$$\Rightarrow D = 36 \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow D = 36 \left[\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right] \quad \therefore D = 108 \text{ cm}$$

45. Hallar el valor de la siguiente suma:

$$S = 1 + 2 \times 3 + 3 \times 3^2 + 4 \times 3^3 + 5 \times 3^4 + \dots + 50 \times 3^5$$

Resolución:

Multiplicando por 3 a S:

$$3S = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + 4 \times 3^4 + \dots + 49 \times 3^{49} + 50 \times 3^{50}$$

Restando:

$$-2S = 1 + 1 \times 3 + 1 \times 3^2 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3^4 + \dots + 1 \times 3^{49} - 50 \times 3^{50}$$

$$\Rightarrow -2S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{49} - 50 \times 3^{50}$$

$$\Rightarrow -2S = \frac{3^{50} - 1}{3 - 1} - 50(3)^{50} = \frac{-99(3^{50}) - 1}{2}$$

$$\therefore S = \frac{99(3^{50}) + 1}{4}$$

46. Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:

I. Si $0 < a < b < 1$, entonces la serie: $S = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-bk}$ es convergente.II. La serie: $T = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{k(k+1)} \right]$ es convergenteIII. La serie: $S = \frac{1}{7} + \frac{5}{49} + \frac{19}{343} + \dots$ es divergente**Resolución:**

I. Falsa

Para $0 < x < 1$ (en general, para $|x| < 1$) se sabe que $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ es convergente a: $\frac{1}{1-x}$ Si: $0 < a < b < 1 \Rightarrow 0 < a < 1 \wedge b > 0$ $\Rightarrow 0^b < a^b < 1^b \Rightarrow 0 < a^b < 1$ $\Rightarrow a^{-b} > 1$, luego: $S = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-b})^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a^{-b})^k$ $\Rightarrow S$ no es convergente.

II. Verdadera

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow T = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\Rightarrow T = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

$\Rightarrow T$ es convergente.

III. Falsa

$$S = \frac{1}{7} + \frac{5}{49} + \frac{19}{343} + \dots$$

$$\Rightarrow S = \frac{3-2}{7} + \frac{3^2-2^2}{7^2} + \frac{3^3-2^3}{7^3} + \dots$$

$$\Rightarrow S = \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7} \right)^2 + \left(\frac{3}{7} \right)^3 + \dots \right] - \left[\frac{2}{7} + \left(\frac{2}{7} \right)^2 + \left(\frac{2}{7} \right)^3 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{\frac{3}{7}}{1 - \frac{3}{7}} - \frac{\frac{2}{7}}{1 - \frac{2}{7}} = \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{7}{20}$$

$\Rightarrow S$ es convergente.

$\therefore$ FVF

47. Si las series: $P = \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n}$ y $Q = \sum_{n=1}^{\infty} b^{3n}$ son convergentes y además $3P = 2Q$, hallar la relación entre a y b .

Resolución:

Son convergentes P y Q luego:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n} = a^2 + a^4 + a^6 + a^8 + \dots$$

$$\Rightarrow P = \frac{a^2}{1-a^2} \Rightarrow \frac{1}{P} = \frac{1}{a^2} - 1$$

$$Q = \sum_{n=1}^{\infty} b^{3n} = b^3 + b^6 + b^9 + b^{12} + \dots$$

$$\Rightarrow Q = \frac{b^3}{1-b^3} \Rightarrow \frac{1}{Q} = \frac{1}{b^3} - 1$$

$$\text{De: } 3P = 2Q \Rightarrow 3\left(\frac{1}{Q}\right) = 2\left(\frac{1}{P}\right)$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{b^3} - 1\right) = 2\left(\frac{1}{a^2} - 1\right) \quad \therefore \frac{3}{b^3} - \frac{2}{a^2} = 1$$

48. Si S es una serie definida por:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(5n+2)(5n-3)} \quad \text{hallar el valor de convergencia.}$$

Resolución:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{7}{(5k+2)(5k-3)}$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{5} \sum_{k=1}^n \frac{5}{(5k+2)(5k-3)}$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{5} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{F(k)} - \frac{1}{F(k+1)} \right)$$

Por la propiedad telescópica:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{5} \left(\frac{1}{5(1)-3} - \frac{1}{5n+2} \right)$$

$$\Rightarrow S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5n+2} \right) = \frac{7}{5} \left(\frac{1}{2} - 0 \right) \quad \therefore S = 7/10$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



PROBLEMA 1 (UNI 2012 - II)

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

- El límite de $\left\{ \frac{2n^2+2n-1}{(n-3)(n+1)} \right\}$ es 2.
- Los valores de la sucesión $S_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$ pertenecen al intervalo $(-1, 1)$.
- La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)}$ converge y su suma es 3.

A) VFF

B) FVF

C) VFF

D) FVV

E) FFF

Resolución:

- La proposición es verdadera, pues dada la sucesión: $a_n = \left\{ \frac{2n^2+2n-1}{(n-3)(n+1)} \right\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+2n-1}{n^2-2n-3} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}} = 2$$

- Dada la sucesión: $S_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$

$$S_n = -2; \frac{3}{2}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{4}; \dots$$

La proposición es falsa, pues existen términos de la sucesión que no pertenecen al intervalo $(-1, 1)$ siendo $S_1 = 2$ un valor que no pertenece.

- La proposición es verdadera, pues dada la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots \right) = 3$$

$\therefore$ VFF

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - II)

Sea la sucesión $\{a_n\}$ donde:

$$a_n = \left[\frac{3}{1+\frac{1}{n}} \right] \left[\frac{2}{1-\frac{1}{n+1}} \right] \left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \right], \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \text{ Diga a}$$

qué valor converge la sucesión $\{a_n\}$.

- A) -1 B) 0 C) 1
D) 2 E) 3

Resolución:

$$\text{Piden: } \lim a_n = \lim \left[\frac{3}{1 + \frac{1}{n}} \right] \left[\frac{2}{1 - \frac{1}{n+1}} \right] \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right]$$

Sabemos: $n \geq 1$

$$0 < 1/n \leq 1 \Rightarrow 1 < 1 + 1/n \leq 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} < 1$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right] = 0 \quad \therefore \lim a_n = \lim 0 = 0$$

Clave: B**PROBLEMA 3 (UNI 2013 - I)**

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones. Diga cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas.

- I. Si para algún $k \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^k |a_i b_i| = 0$, entonces:

$$a_i = 0, \forall i \in \{1; \dots; k\} \text{ o } b_i = 0, \forall i \in \{1; \dots; k\}$$

- II. Si para algún $k \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=1}^k |a_i| = 0$

$$\text{entonces: } \sum_{i=1}^k |a_i b_i| = 0$$

- III. Si $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| \leq M$ y $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i| \leq M$,

$$\text{entonces: } \sum_{i=1}^k |a_i b_i| \leq M^2, \forall k \in \mathbb{N}$$

- A) Solo II B) Solo III C) I y II
D) II y III E) I, II y III

Resolución:

Sea: $|x_1| + |x_2| + |x_3| + \dots + |x_n| = 0$

En $\mathbb{R}$ se verifica solo si $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_k = 0$

- I. $|a_1 b_1| + |a_2 b_2| + \dots + |a_k b_k| = 0$

$$a_1 b_1 = a_2 b_2 = \dots a_k b_k = 0 \begin{cases} a_i = 0 \\ \vee \\ b_i = 0 \end{cases}$$

- II. $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^k |a_i b_i| = 0$

- III. $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| \leq M$

$$|b_1| + |b_2| + \dots + |b_k| \leq M$$

Multiplicando y aplicando la propiedad transitiva:

$$\sum_{i=1}^k |a_i b_i| \leq M^2$$

Clave: E**PROBLEMA 4 (UNI 2013 - II)**

Sea la sucesión $\{a_k\}$, donde: $a_k = k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$

entonces podemos afirmar que:

- A) $\{a_k\}$ converge a 1
B) $\{a_k\}$ converge a $\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$
C) $\{a_k\}$ converge a $\ln 2$
D) $\{a_k\}$ converge a 0
E) $\{a_k\}$ no converge

Resolución:

$$a_k = k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right] \\ &= \ln \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \right] \\ &= \ln[e] \end{aligned}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 1 \Rightarrow \{a_k\} \text{ converge a } 1.$$

Clave: A**PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)**

Dada la sucesión $\{a_n\}$ definida por:

$$a_n = \sin \left(\frac{n\pi + (-1)^n 8}{4n} \right), n \in \mathbb{N}$$

entonces podemos afirmar que:

- A) $\{a_n\}$ converge a $\sqrt{2}/2$
B) $\{a_n\}$ converge a 1
C) $\{a_n\}$ converge a 0
D) $\{a_n\}$ converge a $\pi/4$
E) $\{a_n\}$ no converge

Resolución:

Redefiniendo la sucesión a_n en dos subsucesiones se tendrá:

$$a_n = \begin{cases} \sin \left(\frac{n\pi + 8}{4n} \right); & \text{si } n \text{ es par} \\ \sin \left(\frac{n\pi - 8}{4n} \right); & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Averiguamos la convergencia tomando límites en cada caso:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{n\pi + 8}{4n} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{n\pi - 8}{4n} \right) = \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Por tanto, como los límites de las subsucesiones son iguales, entonces la sucesión $\{a_n\}$ converge a $\sqrt{2}/2$.

Clave: A

PROBLEMAS

PROPUESTOS

- Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4}{5} \times \frac{7}{14} \times \frac{12}{29} \times \dots \times \frac{n^2+3}{3n^2+2}}$
 A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
 D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{2}$
- Dada la sucesión $\{a_n\}$ tal que: $a_n = 5a_{n-1} + 3, \forall n \geq 2$ además $a_1 = 2$, calcular: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{5^n}$
 A) $\frac{1}{20}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{11}{20}$
 D) $\frac{13}{10}$ E) $\frac{4}{5}$
- Indicar el valor de verdad en cada una de las siguientes proposiciones:
 I. Si: $\left\{ \frac{2n^2+n+1}{3n^2+n+1} \right\}$ converge a $\frac{2}{3}$
 II. Si: $\left\{ \frac{n+1}{n^2+1} \right\}$ converge a 0
 III. Si: $\left\{ \frac{n^3+n+1}{2n+7} \right\}$ converge a $\frac{1}{2}$
 A) VVV B) VVF C) FVF
 D) FFV E) FFF
- A qué valor converge la sucesión: $\left\{ \left(\frac{n^2+3n}{n^2+4n} \right)^{\frac{n^2+1}{n}} \right\}$
 A) e B) e^{-1} C) e^{-2}
 D) $\sqrt{e}$ E) $\sqrt[3]{e}$
- Si la sucesión $\left\{ \frac{3n+5}{5^n} \right\}$ converge a: $2b+4$, indicar el valor de b.
 A) 1 B) 0 C) -2
 D) -1 E) Absurdo
- Indicar el valor de verdad en cada una de las siguientes proposiciones:
 I. Si: $\left\{ \frac{2^n}{4^n+1} \right\}$ converge
 II. Si: $\left\{ \frac{e^n}{n} \right\}$ diverge
 III. Si: $\left\{ \frac{\sin(n+1)}{n^2+4} \right\}$ converge
 A) VVF B) VVV C) FVF
 D) FFF E) VFF
- Dada la sucesión $\{a_n\}$ tal que $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$; $n \geq 2$ además $a_1 < 0$, ¿a qué valor converge?

- A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}$
 D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{1}{2}$
- Sabiendo que: $a_n = \frac{n^n}{n!}$, calcular: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
 A) e B) e^{-1} C) 2
 D) 0 E) e^2
- A qué valor converge $\{a_n\}$, si: $a_n = \frac{(2n+1)^2(3n-1)^3}{(4n+1)(n+1)^4}$
 A) 27 B) 14 C) 12
 D) 18 E) 54
- Dada la sucesión $\{a_n\}$ tal que: $a_n = \frac{(-5n)^n + (7)^n}{(-5)^{n+1} + (7)^{n+1}}$, ¿a qué valor converge?
 A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{7}{5}$
 D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{1}{7}$
- ¿A partir de qué términos de la sucesión $\left\{ \frac{n+1}{2n+3} \right\}$, la diferencia de dos términos consecutivos es menor que $\frac{1}{100}$?
 A) 3.° B) 4.° C) 5.° D) 6.° E) 7.°
- Dada la sucesión $\left\{ \frac{4^n - 3^{n-1}}{3^n + 4^{n-2}} \right\}$, ¿a qué valor converge?
 A) $\frac{1}{4}$ B) 4 C) 16
 D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{4}{3}$
- Hallar el límite de la sucesión $\left\{ 3; \frac{8}{4}; \frac{15}{11}; \frac{24}{22}; \frac{35}{37}; \dots \right\}$
 A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
 D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{2}{5}$
- Calcular el valor al cual converge la sucesión: $\{\sqrt[n]{n}\}$
 A) 1 B) 0 C) 2
 D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{e}$
- Dada la sucesión: $\left\{ \frac{6}{2}; \frac{11}{5}; \frac{16}{8}; \frac{21}{11}; \dots \right\}$, ¿a qué valor converge?
 A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{3}$
 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{4}{3}$

16. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si: $\left\{\frac{n^3-1}{n}\right\}$ es creciente

II. Si: $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ es decreciente

III. Si: $\{\sin(\pi n)\}$ es monótona

- A) VVF B) VVV C) FFF
D) FVF E) FFV

17. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{6n} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^4} + \dots + \frac{2^{n-1}}{2^n} \right)$

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{2}$
D) 2 E) 3

18. Si: $\left\{\frac{\ln(n)}{n}\right\}$, ¿a qué valor converge?

- A) 1 B) e C) $\frac{1}{e}$
D) 0 E) $\sqrt{e}$

19. Indicar cuál o cuáles sucesiones cumple:

$a_n \leq a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}; n \geq 1$, si:

I. $\{3n+5\}$ II. $\left\{\frac{n}{3^n}\right\}$

III. $\left\{\frac{2n+1}{3n+1}\right\}$

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) I y III

20. Sea $\{a_n\}$ la sucesión tal que: $a_1 = 2$; $a_{n-1} = \frac{2a_n+1}{2}$; $n \geq 1$; calcular: a_{2000}

- A) 2001 B) $\frac{2002}{3}$ C) $\frac{2004}{5}$
D) $\frac{2005}{2}$ E) $\frac{2003}{2}$

21. Dada la sucesión $\{a_n\}$ de $a_n = 3n - 1$, hallar la suma de sus p primeros términos.

- A) $\frac{p(3p+1)}{2}$ B) $3p+1$ C) $\frac{(3p+2)p}{2}$
D) $p(3p+1)$ E) p^2+p

22. Se define la sucesión $\{a_n\}$, tal que: $a_{n-1} = a_n + \frac{1}{a_n}$

$\forall n \geq 1, a_1 > 0$; hallar: $\frac{3 \sum_{k=1}^{2002} \frac{1}{a_k}}{a_{2003} - a_1}$

- A) 2^{-1} B) 3 C) 3^{-1}
D) $\frac{2}{3}$ E) 8

23. Si $\{a_n\}$ es una sucesión definida por:

$a_1 = 2$; $a_{n+2} = 2a_{n-1} - a_n, \forall n \geq 1$, además $a_{23} = 156$ hallar: $a_{10} + a_{20}$

- A) 200 B) 300 C) 175
D) 95 E) 245

24. Cuáles de las siguientes sucesiones son convergentes:

I. $\left\{1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \dots\right\}$ II. $\left\{\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}\right\}$

III. $\left\{\frac{2^{n+2^n} + 3^{n+2}}{2^n + 3^n}\right\}$

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) Todas

25. Hallar: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\sqrt{2}$

26. Dada la sucesión $\{a_n\} = \left\{\frac{3^n-1}{\sqrt{2}(3)^n}\right\}$, indicar la afirmación correcta:

- A) La sucesión no converge.
B) La sucesión es monótona creciente.
C) La sucesión no es acotada.
D) La sucesión es monótona decreciente.
E) La sucesión es acotada pero no converge.

27. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La sucesión $\{n^2 - n\}$ es monótona.
II. (2^{-n}) es decreciente

III. Si $a_n = \begin{cases} n; & \text{es múltiplo de 2} \\ 0; & \text{en los demás casos} \end{cases}$ entonces $\{a_n\}$ es convergente.

- A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FFF

28. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{n+1}{n+2} \right)$

- A) 2 B) 3 C) 1
D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

29. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+1^2} + \sqrt{1+2^2} + \dots + \sqrt{1+n^2}}{3n^2 + 5n - 2}$

- A) $\frac{1}{3}$ B) 2 C) $\frac{1}{2}$
D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{8}$

30. Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido como Fibonacci, fue uno de los matemáticos más importantes de la Edad Media, es muy recordado por la llamada sucesión de Fibonacci, definida por: $a_1 = 1$; $a_2 = 1$ y $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 1$. Si:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

fórmula de Binet (1845); hallar: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

- A) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ C) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{2\sqrt{5}}$

31. Sea la sucesión $\{a_n\}$ tal que: $a_n = \frac{3 - \sqrt{n^2 + 3n + 5}}{2 - 2n}$

calcular la cota mínima superior de la sucesión.

- A) 1 B) 1/2 C) 0
 D) -1 E) -1/2

32. En una sucesión de 5 números enteros consecutivos y positivos, la suma de los cuadrados de los 3 primeros es igual a la suma de los cuadrados de los últimos 2. Entonces, el segundo término de la sucesión es:

- A) 8 B) 9 C) 10
 D) 11 E) 12

33. La sucesión $\{\sqrt[n]{n}\}$, $n \geq 2$, es:

- A) monótona creciente
 B) monótona decreciente.
 C) monótona no creciente
 D) monótona no decreciente
 E) no monótona

34. La sucesión $\{a_n\}$, con: $a_n = \frac{n^2 + 2n + 3}{(n+1)^2}$, es:

- A) acotada B) no acotada
 C) no monótona D) divergente
 E) monótona y no acotada

35. La sucesión: $\left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}_{n>1}$ es:

- A) convergente B) divergente
 C) acotada D) monótona
 E) hay dos correctas

36. Dada la formación triangular:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & 3 & & 5 & & & & \\ & 7 & & 9 & & 11 & & & \\ 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & \end{array}$$

Se define la sucesión $\{a_n\}$ como:

a_n = suma de los elementos de la n -ésima fila.
 Hallar a_n .

- A) $2^n + 1$ B) $2^n - 1$ C) $n^2 + 1$
 D) n^3 E) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

37. Sabiendo que: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

calcular: $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2$

A) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}$ B) $\frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$

C) $\frac{n(4n^2-1)}{6}$ D) $\frac{n(4n^2-1)}{3}$

E) $\frac{n(4n^2+1)}{6}$

38. La sucesión: 2; 5/2; 12/5; 29/12; 70/27; ...; converge a:

- A) $\sqrt{2} + 1$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\sqrt{3} + 1$
 D) $\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$ E) $2\sqrt{2} - \frac{1}{2}$

39. Sea: $\{a_n\}_{n \geq 1}$ / $a_1 > 0$ / $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 60}$, entonces la sucesión converge a:

- A) $3\sqrt{2}$ B) 4 C) 5
 D) $\frac{9}{2}$ E) $3\sqrt{3}$

40. Dada la sucesión: $\sqrt{a}; \sqrt{a}\sqrt{a}; \sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{a}; \dots$; $a \in \mathbb{R}^+$, entonces:

- A) es divergente B) converge a a
 C) converge a cero D) converge a $\sqrt[4]{a}$
 E) converge a uno

41. Dada la sucesión: 2; $\frac{11}{8}$; $\frac{7}{6}$; $\frac{17}{16}$; ...

¿A partir de qué lugar los términos de la sucesión son menores que 4/5?

- A) 14.° B) 20.° C) 21.°
 D) 26.° E) 25.°

42. De la sucesión: $\{a_n\} = \left\{ \frac{k^n}{n!} \right\}$; $k, n \in \mathbb{Z}^+$ podemos afirmar:

- A) es divergente B) convergente a cero
 C) es creciente D) es decreciente
 E) hay dos correctas

43. Cuál es el cuarto término de la sucesión definida por: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = a_n^2 + 1$; $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

- A) 5 B) 26 C) 677
 D) 3650 E) 40 087 461

44. La sucesión: $\{a_n\}_{n \geq 1}$ / $a_n = \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$ converge a:

- A) 0 B) 1 C) 1/2
 D) 1/3 E) 2/3

45. Si la sucesión: $\{a_n\}_{n \geq 1}$ / $a_n = \frac{an^3 + 2n^2 + 3n + 5 - 4n^3}{bn^2 + 4n + 5}$

converge a 2; hallar: $a + b$

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

46. Sean las sucesiones cuyos términos enésimos

sean: $a_n = \frac{2n-1}{n}$ / $b_n = \frac{2n+1}{n}$, tal que:

$a_n \leq c_n \leq b_n$. Hallar el punto de convergencia de $\{c_n\}$

- A) 5/2 B) 3 C) 2
D) 3/2 E) 1
47. La sucesión $\left\{ \frac{2n}{n+1} \right\}; n \in \mathbb{Z}^+$, es:
A) creciente
B) decreciente
C) estrictamente creciente
D) estrictamente decreciente
E) hay 2 correctas
48. El matemático Karl Weierstrass, estableció que:
"Si una sucesión es monótona a partir de cierto número y acotada, ella tiene límite finito".
Analizar la sucesión: $\left\{ \frac{n^3}{3^n} \right\}, n \in \mathbb{Z}^+$
A) Es convergente B) Es divergente
C) Es acotada D) Es monótona
E) Hay 2 correctas
49. A qué valor converge la sucesión $\{a_n\}$, si:
$$a_n = \frac{1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$$

A) 6 B) 4 C) 3
D) 2 E) 1
50. Determinar el término de lugar 20 de la sucesión.
 $\{b_n\} = \{3/2; 6/3; 9/4; 12/5; \dots\}$
A) 20/7 B) 32/5 C) 45/2
D) 83/3 E) 97/3
51. Sea la sucesión:
 $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{2/2; 8/6; 18/12; 32/20; \dots\}$
Si los valores de esta sucesión se encuentran en el intervalo $[a; b]$, siendo "a" el mayor posible y "b" el menor valor posible, calcular: $b - a$
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5
52. Sea: $a_n = \frac{3 + 7 + 11 + \dots + (4n-1)}{7 + 11 + 15 + \dots + (4n+3)}$
indicar verdadero (V) o falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:
I. $a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$
II. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
III. $a_n \leq 2/3, \forall n \in \mathbb{N}$
A) VVV B) VVF C) VVF
D) VFF E) FFF
53. Si la sucesión: $\{x_n\} = \{\sqrt{2n^2 + 1} - an\}$ converge a cero, determinar el valor de "a".
A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $\sqrt{5}$ E) 8
54. Sea la sucesión:
 $\{a_n\}_{n \geq 1} = \{(2/3)^4; (3/4)^5; (4/5)^6; (5/6)^7; \dots\}$

determinar el valor de convergencia.
("e" es el número de Neper)

- A) $\frac{1}{4/e}$ B) $\frac{1}{3/e}$ C) $\frac{1}{e}$
D) $\frac{1}{e}$ E) $\frac{1}{e^2}$

55. Sean las sucesiones:

$$\{a_n\} / a_n = \frac{3n-1}{n} \text{ y } \{b_n\} / b_n = \frac{3n+1}{n}$$

Si $\{c_n\}$ es una sucesión, tal que: $a_n \leq c_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$,
calcular: $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$

- A) 3/2 B) 5/2 C) 3
D) 7/2 E) 4

56. Determinar el valor de:

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\sum_{k=1}^n b_{2k} \right)^2 - \left(\sum_{k=1}^n b_{2k-1} \right)^2 \right)$$

si se sabe que: $\sum_{k=1}^n b_k = 3n^2, \forall n \in \mathbb{Z}^+$

- A) $\sqrt{6}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{5}$

57. Sea la sucesión $\{T_n\}$, donde: $T_{n+1} = \sqrt{\lambda + T_n} (\lambda > 0)$
Asumiendo que la sucesión es convergente, determinar el punto de convergencia.

- A) $\frac{1 + \sqrt{4 + 4\lambda}}{2}$ B) $\frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$
C) $\frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}$ D) $\frac{2 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$
E) $\frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2}$

58. Determinar el valor de A en:

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} = A \left(3 - \frac{2n+3}{3^n} \right)$$

- A) -1/4 B) 1/2 C) -1/2
D) 1/4 E) 3/2

59. Hallar $M + N + D$, si estos representan los puntos de convergencia de las series:

$$M: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n}$$

$$N: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 3n - 2}$$

$$D: \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \right)^{k^2+1} \left(1 - \left(\frac{1}{\pi} \right)^{2k+1} \right) \right]$$

- A) $\frac{6\pi+7}{\pi}$ B) $\frac{7\pi+6}{6\pi}$ C) $\frac{\pi+1}{\pi}$
D) $\frac{2\pi+3}{\pi}$ E) $\frac{2\pi+3}{6\pi}$

60. Si: $\sum_{k=1}^{2n+1} \left(k + \sum_{r=1}^n (2r-1) \right) = (n+1)^3 + \lambda$, determinar el valor de λ .

A) 0 B) 1 C) n D) n^2 E) n^3

61. Hallar: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n (\sin \theta)^n$

A) $\sin \theta$ B) $\frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta}$ C) $\frac{\sin \theta}{2 - 2 \sin \theta}$
D) $\frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}$ E) $\frac{\sin \theta}{2 + \sin \theta}$

62. Determinar los valores de x ($x \in \mathbb{R}$), si las series:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{3} \right)^n (x-2)^{n-1} \text{ y } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\log_2 \left(\frac{x}{2} \right) \right)^n \text{ convergen.}$$

A) $-1 < x < 3$ B) $-1 < x < 4$ C) $1 < x < 3$
D) $3 < x < 4$ E) $1 < x < 4$

63. Indicar el valor de verdad de las afirmaciones:

I. La sucesión $\{a_n\}$: $a_n = \frac{1}{3\sqrt{n^2}}$ es decreciente.

II. La sucesión $\{b_n\}$: $b_n = \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ es creciente.

III. Si m es el mayor valor y M el menor valor tal que:

$$m < \frac{n^2 + 2n + 3}{(n+1)^2} \leq \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + M = 4$$

A) VVV B) VFF C) VFV
D) FVV E) VVF

64. Sean las sucesiones:

I. $a_0 = 1$; $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; ...

$$a_{2k-1} = \frac{1}{k}; a_{2k} = 0; \forall k \geq 2$$

II. $b_0 = 1$; $b_1 = 7$; $b_2 = 0$; $b_3 = 1/2$; ...

$$b_{2k-1} = \frac{1}{k}; b_{2k} = 1; \forall k \geq 2$$

de estas sucesiones se afirma:

I. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

II. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y la sucesión $\{b_n\}$ es divergente.

III. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = 0$

es (son) correcta(s):

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) II y III E) I y II

65. Determinar la siguiente suma: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

66. Indicar el valor de convergencia de la serie:

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3k + 3}{k^4 + 6k^3 + 11k^2 + 6k}$$

A) 1 B) 1/3 C) 2/3
D) 4/3 E) 2

67. Determinar el valor de x en: ($a \neq 0$)

$$\frac{(ax+n)!}{(ax+n+1)!} = \frac{(ax)!}{(ax+2)!} + \frac{(ax+1)!}{(ax+3)!} + \dots + \frac{(ax(n-1))!}{(ax+(n+1))!}$$

A) $\frac{n-1}{a}$ B) $\frac{n+3}{a}$ C) $\frac{n+5}{a}$
D) $\frac{n-2}{a}$ E) $\frac{n-3}{a}$

68. Se sabe que: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

con el dato anterior, hallar el valor de:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

A) $\frac{\pi^2}{2}$ B) $\frac{\pi^2}{8}$ C) $\frac{\pi}{8}$
D) $2\pi^2$ E) $\frac{7\pi^2}{2}$

69. Si S_n representa la suma de los n primeros términos de una serie, hallar el término general de dicha serie si: $S_n = \frac{n-2}{2n+1}$

A) $\frac{3}{2n^2-1}$ B) $\frac{2n+1}{n^2-1}$ C) $\frac{5}{4n^2-1}$
D) $\frac{n+3}{2n-4}$ E) $\frac{n^2-1}{4n^2-1}$

70. Calcular: $S = a + \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}^2} + \frac{a}{\sqrt{2}^3} + \dots$

A) $\frac{\sqrt{2}a}{3}$ B) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}-1}$ C) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}-1}$
D) $\frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}+1}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

71. Calcular: $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 7^n}{9^n}$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

72. Calcular: $S = \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{k(k+1)}$

A) 1 B) 2 C) 5/6
D) 50/51 E) 3/4

73. Hallar: $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3(1!)} + \frac{1}{4(2!)} + \frac{1}{5(3!)} + \dots$

A) e B) 1/2 C) 1
D) 1/3! E) e^2

74. Calcular: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

- A) 1 B) 1/2 C) 2/3 A) $\ln 3$ B) $1/\ln 2$ C) $1/\ln 4$
 D) 1/4 E) 1/8 D) $1/2\ln 2$ E) $2\ln 2$
75. Calcular: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4^n}$
- A) 1/4 B) 2/15 C) 1/5
 D) 1/7 E) 2/5
76. Calcular: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$
- A) 3/4 B) 1/4 C) 2/3
 D) 7/12 E) 1/12
77. Calcular: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2^n}{3^n}$
- A) 1/2 B) -1/2 C) -3/2
 D) 3/2 E) 2/3
78. Calcular: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln(n) \times \ln(n+1)}$
79. Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:
- I. La serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$ es divergente
 II. La serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n}$ es divergente
 III. La serie: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n(n)}$ es convergente
- A) VVV B) FFF C) VFV
 D) FFV E) VFF
80. Calcular: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$
- A) 23/90 B) 1/9 C) 30/93
 D) 5/9 E) 14/96

CLAVES

1. B	11. C	21. D	31. B	41. D	51. A	61. E	71. C
2. C	12. C	22. C	32. D	42. B	52. A	62. A	72. D
3. B	13. C	23. C	33. E	43. C	53. A	63. C	73. C
4. B	14. B	24. B	34. A	44. A	54. A	64. D	74. B
5. C	15. A	25. A	35. E	45. C	55. C	65. C	75. C
6. C	16. A	26. B	36. D	46. C	56. A	66. C	76. A
7. A	17. B	27. B	37. D	47. E	57. D	67. E	77. B
8. C	18. A	28. B	38. A	48. E	58. C	68. E	78. B
9. B	19. C	29. C	39. B	49. B	59. A	69. C	79. A
10. C	20. C	30. A	40. B	50. E	60. D	70. C	80. A

Progresiones

19

capítulo

Leonardo de Pisa, Leonardo Pisano o Leonardo Bigollo (1170-1250), también llamado Fibonacci, fue un matemático italiano famoso por haber difundido en Europa el sistema de numeración indoarábigo actualmente utilizado, el que emplea notación posicional (de base 10 o decimal) y un dígito de valor nulo (el cero), y por idear la sucesión de Fibonacci. De niño, Leonardo viajó al norte de África (Argelia), donde aprendió el sistema de numeración árabe. Al darse cuenta de la superioridad de los numerales árabes, Fibonacci viajó a través de los países del Mediterráneo para estudiar con los matemáticos árabes más destacados de ese tiempo.



Fibonacci

Italia, 1170 - Italia, 1250

En matemáticas, la sucesión de Fibonacci (serie de Fibonacci) es la siguiente sucesión infinita de números naturales:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597

La sucesión comienza con los números 1 y 1, 2 y a partir de estos «cada término es la suma de los dos anteriores», es la relación de recurrencia que la define. A los elementos de esta sucesión se les llama números de Fibonacci y tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos.

Fuente: Wikipedia

◀ PROGRESIÓN

Es un conjunto de números que se encuentran ligados por una ley de formación, según este ordenamiento las progresiones pueden formar:

Progresión aritmética: 2; 5; 8; 11; 14; ...

Progresión geométrica: 3; 6; 12; 24; 48; ...

Progresión armónica: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}, \dots$

Progresión hipergeométrica: $\frac{1}{1 \times 2}, \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{2 \times 4}, \dots$

◀ PROGRESIONES ARITMÉTICAS (PA)

Son aquellas sucesiones en las que se cumple que cualquier término es igual al anterior aumentada en una cantidad constante llamada razón o diferencia.

Ejemplo:

$$5; 8; 11; 14; \dots; r = 3$$

Notación: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$

Donde: a_1 : primer término

a_n : último o enésimo término

n : número de términos

r : razón

S : suma de términos

Clasificación

Las progresiones aritméticas pueden ser:

Progresiones aritméticas crecientes ($r > 0$)

$$1; 3; 5; 7; \dots; r = 2$$

Progresiones aritméticas decrecientes ($r < 0$)

$$8; 5; 2; \dots; r = -3$$

Propiedades

- La diferencia entre dos términos consecutivos es constante e igual a la razón.

Ejemplo:

$$: \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \quad \curvearrowright \quad \curvearrowright \\ 8; \quad 11; \quad 14; \quad 17 \end{array} \quad r = 3$$

- Cálculo del enésimo o último término.

Sea la PA: $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$

Se sabe que: $a_1 = a_1 + 0r$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_{91} = a_1 + 90r$$

En general

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

- Si la progresión tiene un número impar de términos se cumplirá que el término central es igual a la semisuma de los términos extremos.

Sea: $a_1; \dots; a_c; \dots; a_n$
k término. k término.

$$a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

Demostración:

$$\bullet a_c = a_1 + kr \quad \dots(I)$$

$$\bullet a_n = a_c + kr \quad \dots(II)$$

$$(I) - (II): a_c - a_n = a_1 - a_c - a_c = \frac{a_1 + a_n}{2}$$

- La suma de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los términos extremos.

Sea: $a_1; \dots; a_x; \dots; a_y; \dots; a_n$
k términos k términos

$$a_x + a_y = a_1 + a_n$$

Demostración:

$$\bullet a_x = a_1 + kr \quad \dots(I)$$

$$\bullet a_n = a_y + kr \quad \dots(II)$$

$$(I) - (II): a_x - a_n = a_1 - a_y \Rightarrow a_x + a_y = a_n + a_1$$

- La suma de los términos de una PA limitada es la semisuma de los términos extremos multiplicado por el número de términos.

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n$$

Demostración:

Sea:

$$\begin{array}{l} : a_1; a_2; \dots; a_{n-1}; a_n \\ S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \end{array} \quad (+)$$

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \quad \dots(I)$$

Como: $a_n = a_1 + (n-1)r$

$$S_n = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \right] n \quad \dots(II)$$

$$\text{También: } S_n = \frac{n}{2} [2a_n - (n-1)r] \quad \dots(III)$$

En (I), solo si n es impar: $S_n = na_c$

Medios aritméticos

Se llama así a los términos de una progresión aritmética comprendidos entre los extremos.

Ejemplo:

: 3; 5; 9; 12; 15; 18; 21

Medios aritméticos o diferenciales

Interpolación de medios aritméticos. Interpolación "m" medios aritméticos entre "a" y "b" es formar una PA en donde el primer término es "a" y el último término es "b", siendo "m + 2" el número de términos de la progresión.

En general:

Interpolación "m" medios aritméticos entre "a" y "b":

(m + 2) términos

: a;; b

m medios aritméticos

Razón de interpolación:

$$r = \frac{b - a}{m + 1}$$

Ejemplos:

1. Hallar tres números en PA que aumentados 2; 3 y 8 unidades sean proporcionales a 10; 25 y 50.

Resolución:

Sean los términos: a; a + r; a + 2r

$$\text{Por condición: } \frac{a+2}{10} = \frac{a+r+3}{25} = \frac{a+2r+8}{50}$$

(I) (II) (III)

$$(II) = (III): a + r + 3 = \frac{a + 2r + 8}{2} \Rightarrow a = 2$$

$$(I) = (II): \frac{a+2}{2} = \frac{a+r+3}{5} \Rightarrow 10 = 5 + r \Rightarrow r = 5$$

Los términos serán: 2; 7 y 12

2. En una PA el primer término es 12, el número de términos es 9 y su suma es 252. En otra PA el primer término es 2 y su razón es 6. Dos términos del mismo lugar de ambas progresiones son iguales. Calcular su valor.

Resolución:

Sean los términos a_k y b_k ; por condición $a_k = b_k$

En la primera progresión:

$$S_n = \left(\frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \right) n = 252 = \left(\frac{24 + 8r}{2} \right) 9 \Rightarrow r = 4$$

$$\Rightarrow a_k = 12 + (k-1)4$$

En la segunda progresión: $b_k = 2 + (k-1)6$

$$\text{Luego: } 12 + (k-1)4 = 2 + (k-1)6 \Rightarrow k = 6$$

$$\therefore a_k = 32$$

3. La suma de los "n" primeros términos de una PA es $4n^2 + 2n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Calcular el quinto término.

Resolución:

Por dato: $S = 4n^2 + 2n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

Para $n = 1$ se tendrá: $S_1 = a_1 = 6$

Para $n = 2$ se tendrá la suma de los dos términos:

$$S_2 = a_1 + a_2 = 20 \Rightarrow a_2 = 14 \wedge r = 8$$

En consecuencia: $a_5 = a_1 + 4r = 6 + 4(8)$

$$\therefore a_5 = 38$$

4. En la siguiente progresión ...; 5; ...; 47; ...; 159 el número de términos que existe entre 47 y 159 es el triple del número de términos comprendidos entre 5 y 47. Calcular la razón de la progresión.

Resolución

: ...; 5; ...; 47; ...; 159

x 3x

Por interpolación de medios aritméticos se tendrá:

$$\frac{47-5}{x+1} = \frac{159-47}{3x+1}$$

$$\Rightarrow 42(3x+1) = 112(x+1) \Rightarrow x = 5$$

$$\text{Luego: } \frac{47-5}{5+1} = r \quad \therefore r = 7$$

5. Dada la progresión 5; 10; 15; ... ¿Cuántos términos de esta progresión hay que tomar a partir del décimo cuarto para que sumen tantos como los 9 primeros.

Resolución:

$$: 5; 10; 15; \dots \Rightarrow r = 5$$

$$a_{14} = a_1 + 13r = 5 + (13)5 = 70 \Rightarrow a_{14} = 70$$

Número de términos: n

Luego:

$$S_n = \frac{n}{2}[2(70) + (n-1)5] = \frac{n}{2}[140 + (n-1)5]$$

$$S_9 = \frac{9}{2}[2(5) + 8(5)] = \frac{9}{2}(50)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}[140 + (n-1)5] = \frac{9}{2}(50)$$

$$\text{Donde: } n^2 + 27n - 90 = 0 \Rightarrow (n+30)(n-3) = 0$$

$$\therefore n = 3$$

6. Un hombre tiene que pagar una deuda de 360 000 en 40 pagos que forman una PA. Cuando ya había cancelado 30 pagos, fallece, dejando una tercera parte sin pagar, hallar el importe del primer pago.

Resolución:

Por dato:

$$S_{40} = 360\,000 \wedge S_{30} = \frac{2}{3}(360\,000) = 240\,000$$

Por fórmula:

$$* S_{40} = \frac{40}{2}(2a_1 + 39r) = 360\,000$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 39r = 18\,000 \quad \dots(I)$$

$$* S_{30} = \frac{30}{2}(2a_1 + 29r) = 240\,000$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 29r = 16\,000 \quad \dots(II)$$

$$(I) - (II): 10r = 2000 \Rightarrow r = 200$$

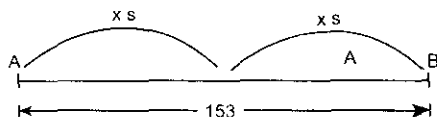
$$\therefore a_1 = 5100$$

7. Dos cuerpos que se encuentran a la distancia de 153 m uno del otro, se mueven al encuentro mutuo, el primero recorre 10 m/s, el segundo recorrió 3 m

en el primer segundo, en cada segundo siguiente recorre 5 m más que el segundo anterior ¿Después de cuantos segundos los cuerpos se encuentran?

Resolución:

Llevando los datos a un gráfico:



Para el primero: $e_1 = 10x$

Para el segundo: $e_2 = 3 + 8 + 13 \dots$
x términos

Luego: $10x + \frac{x}{2}[2(3) + (x-1)5] = 153$

$\therefore x = 6$

8. En el instante de comenzar un año no bisiesto un reloj señala las 11 h 40 min y 25 s, se supone que va adelantando, este reloj se retrasa el primer día del año un segundo; el segundo día, 3 segundos; el tercer día, 5 segundos y así sucesivamente. Al comenzar un día del año el reloj marca la hora en punto, ¿cuál será el día?

Resolución:

11 h 40 min 25 s = 42 025 s de adelanto

$1 + 3 + 5 + \dots = 42\ 025$
x días

$x^2 = 42\ 025 \Rightarrow x = 205$

Enero	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio
31	28	31	30	31	30	(24)

Hasta ese día se retrasará

$\therefore$ Marcará la hora exacta: 25 de julio

9. Un ciclista sale de un cierto lugar A y recorre un 1 km el primer día, 4 km el segundo, 7 km el tercero, y así sucesivamente. Después de 3 días de su partida, un motociclista sale a darle alcance y recorre 17 km el primer día, 18 km el segundo, 19 km el tercero y así sucesivamente, encontrándose por primera vez en un pueblo B y por segunda vez en C. Hallar la distancia entre estas 2 ciudades.

Resolución:

El primer ciclista emplea t días para el primer encuentro, los espacios recorridos son:

$1; 4; 7; \dots$ PA de razón 3.
t días

Recorre en total:

$S_t = \frac{t}{2}[(2)(1) + (t-1)(3)] \Rightarrow S_t = \frac{t}{2}(3t-1) \dots (I)$

El segundo ciclista empleará $(t-3)$ días para el primer encuentro y sus espacios recorridos son:

$17; 18; 19; \dots$ PA de razón 1.
 $(t-3)$ días

Recorre en total:

$S'_t = \left(\frac{t-3}{2}\right)[2(17) + (t-4)(1)]$

$\Rightarrow S'_t = \left(\frac{t-3}{2}\right)[2(17) + (t-4)]$

$S'_t = \left(\frac{t-3}{2}\right)(t+30) \dots (II)$

Pero los espacios recorridos totales son iguales, es decir: $(I) = (II)$

$\frac{t}{2}(3t-1) = \left(\frac{t-3}{2}\right)(t+30) \Rightarrow 3t^2 - t = t^2 + 27t - 90$

$2t^2 - 28t + 90 = 0 \Rightarrow t^2 - 14t + 45 = 0$

$\Rightarrow (t-9)(t-5) = 0 \Rightarrow t_1 = 5 \quad \vee \quad t_2 = 9$

O sea, eso ocurre a los cinco y nueve días para el primero.

En (I):

En 5 días el primero recorre: $\frac{5}{2}[3(5) - 1] = 35$

En 9 días el primero recorre: $\frac{9}{2}[3(9) - 1] = 117$

Luego, la distancia que hay entre A y B es:

$117 - 35 = 82$

10. Calcular "x" en la siguiente progresión aritmética.
 $4x - 4; 5; 3x$

Resolución:

Por propiedad: $5 = \frac{4x-4+3x}{2}$

$\Rightarrow 10 = 7x - 4 \Rightarrow x = 2$

11. Calcular el término 29 en: $2; 5; 8; \dots$

Resolución:

$a_{29} = a_1 + 28r \Rightarrow a_{29} = 2 + 28(3) = 86$

12. El tercer término de una progresión aritmética es 18 y el séptimo, 30. Calcular la razón.

Resolución:

$a_3 = 18; a_7 = 30$

$\Rightarrow a_7 = a_3 + 4r \Rightarrow 30 = 18 + 4r \Rightarrow r = 3$

13. La suma de 3 números de una progresión aritmética es 7 y su producto es 504. Hallar los números.

Resolución:

Sean los números: $a - r; a; a + r$.

$a - r + a + a + r = 27 \Rightarrow a = 9$

Además: $9(9-r)(9+r) = 504$

$81 - r^2 = 56 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Los números pueden ser:

$r = 5: 4; 9; 14$

$r = -5: 14; 9; 4$

14. Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética cuya razón es 10. ¿Cuál es el mayor ángulo?

Resolución:

Sean los ángulos: a ; $a + 10^\circ$; $a + 20^\circ$

Luego: $a + a + 10^\circ + a + 20^\circ = 180^\circ$

$$3a = 150^\circ \Rightarrow a = 50^\circ$$

$$\therefore \text{Se pide: } a + 20^\circ = 70^\circ$$

15. Si la suma de 3 números en progresión aritmética es 150, calcular el término central.

Resolución:

Sean los números: $a - r$; a ; $a + r$

$$\text{Por dato: } a - r + a + a + r = 150 \Rightarrow 3a = 150$$

$$\therefore a = 50$$

16. Calcular el sexto término en la progresión aritmética: $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$

Resolución:

$$a_6 = a_1 + 5r \Rightarrow a_6 = \frac{1}{3} + 5\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\therefore a_6 = 7/6$$

17. Un hombre avanza en el primer segundo de su carrera 6 m y en cada segundo posterior avanza 25 cm más que el anterior. ¿Cuánto avanza en el octavo segundo y que distancia habrá recorrido hasta ese momento?

Resolución:

Del enunciado: $a_1 = 6$ m; $r = 25 = 0,25$ m

$$\Rightarrow a_8 = a_1 + 7r = 6 + 7(0,25) = 7,75 \text{ m}$$

$$\text{Distancia: } S_8 = \left[\frac{2(6) + 7(0,25)}{2} \right] 8 = 55 \text{ m}$$

18. Calcular la razón de una progresión aritmética, sabiendo que el término 42 es 5 y el primer término es 1.

Resolución:

Por dato: $a_{42} = 5$; $a_1 = 1$

$$a_{42} = a_1 + 41r \Rightarrow 5 = 1 + 41r \Rightarrow 4 = 41r$$

$$\therefore r = 4/41$$

19. En la siguiente progresión aritmética, calcular el término que ocupa el lugar 32.
3; 6; 9; ...

Resolución:

$$a_{32} = a_1 + 31r \Rightarrow a_{32} = 3 + 31(3) = 96$$

$$\therefore a_{32} = 96$$

20. El término central de una progresión aritmética es 4. Si la progresión es de 21 términos, calcular la suma de dichos términos.

Resolución:

$$\text{Sabemos que: } a_c = \frac{a_1 + a_n}{2} = 4$$

$$\Rightarrow S = a_c n = 4 \times 21 = 84$$

21. Hallar la suma de los 50 primeros términos de:
-5; -13; -21; ...

Resolución:

$$S_{50} = \left[\frac{2(-5) + (49)(-8)}{2} \right] 50 \therefore S_{50} = -10\,050$$

22. Hallar la suma de los 20 primeros números impares.

Resolución:

$$\text{Se pide: } \underbrace{1 + 3 + 5 + \dots}_{20 \text{ sumandos}}$$

$$\therefore S = \left[\frac{2(1) + 19(2)}{2} \right] 20 = 400$$

23. Calcular la suma: $S = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 104$

Resolución:

$$S = 2(1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 52)$$

$$\therefore S = 2 \left[\frac{52(53)}{2} \right] = 2756$$

24. Luego de interpolar 3 medios aritméticos entre 6 y 30, se forma una progresión de 5 términos cuyo término central es:

Resolución:

$$\underbrace{6 \quad \quad \quad 30}_{3 \text{ medios aritméticos}}$$

$$r = \frac{30 - 6}{4} = 6$$

El lugar central de toda la PA será el tercero:

$$\therefore a_3 = 6 + 2(6) = 18$$

25. En la progresión aritmética 2; ...; 15, luego de interpolar 8 medios aritméticos, se pide calcular el noveno términos de la progresión.

Resolución:

$$\text{Hallando la razón: } r = \frac{15 - 2}{8 + 1} = \frac{13}{9}$$

$$\therefore a_9 = 2 + 8\left(\frac{13}{9}\right) = \frac{122}{9}$$

26. Calcular el número de medios aritméticos de la siguiente progresión aritmética: -5; -2; ...; 19

Resolución

$$r = \frac{19 - (-5)}{m + 1} \Rightarrow 3 = \frac{24}{m + 1} \Rightarrow m + 1 = 8$$

$$\therefore m = 7$$

◀ PROGRESIONES GEOMÉTRICAS (PG)

Es una sucesión de números en donde un término cualquiera (después del primero) es igual al inmediato anterior multiplicado por una razón constante, llamada razón de progresión.

Notación:

$$\therefore t_1; t_2; t_3; \dots; t_n$$

$$\left. \begin{array}{l} t_1: \text{primer término} \\ t_n: \text{último término} \\ n: \text{número de términos} \\ q: \text{razón} \end{array} \right\} \begin{array}{l} S_n: \text{suma de los } n \text{ términos} \\ \text{de una PG limitada} \\ S_\infty: \text{suma límite o suma de} \\ \text{términos de una PG de-} \\ \text{creciente e ilimitada.} \\ P_n: \text{producto de términos de} \\ \text{una PG limitada.} \end{array}$$

Clasificación

Las progresiones pueden ser:

Progresión geométrica creciente: cuando su razón es mayor que 1 ($q > 1$).

$$\therefore 3; 6; 12; 24; \Rightarrow q = 2$$

Progresión geométrica decreciente: cuando su razón es mayor que cero pero menor que 1 ($0 < q < 1$).

$$\therefore 16; 8; 4; 2; 1 \Rightarrow q = 1/2$$

Progresión geométrica oscilante: cuando su razón es menor que cero ($q < 0$).

$$\therefore 2; -6; 18; -54 \Rightarrow q = -3$$

Progresión geométrica triviales: cuando su razón es igual a uno ($q = 1$).

$$\therefore 3; 3; 3; 3; 3; 3 \Rightarrow q = 1$$

Propiedades

- En una progresión geométrica se cumple que el cociente entre 2 términos consecutivos es constante e igual a la razón.

Ejemplo:

$$\text{Sea } \therefore a; b; c; d \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = q$$

- Cálculo del enésimo o último término:

$$\text{Sea: } \therefore t_1; t_2; t_3; \dots; t_n$$

$$\begin{aligned} \text{De donde: } t_1 &= t_1 q^0 \\ t_2 &= t_1 q \\ t_3 &= t_1 q^2 \\ &\vdots \\ t_{16} &= t_1 q^{15} \end{aligned}$$

$$\text{En general: } t_n = t_1 q^{n-1}$$

Ejemplos:

$$\bullet t_{45} = t_1 q^{44} \quad \bullet t_{37} = t_1 q^{36}$$

- El término central de una PG con un número impar de términos es igual a la raíz cuadrada de los términos extremos.

$$\underbrace{t_1; \dots; t_k}_{k \text{ términos}} \quad \underbrace{t_c; \dots; t_n}_{k \text{ términos}}$$

$$t_c = \sqrt{t_1 t_n}$$

Demostración:

$$\bullet t_c = t_1 q^k \quad \dots (I)$$

$$\bullet t_n = t_1 q^k \quad \dots (II)$$

$$(I)/(II): \frac{t_c}{t_n} = \frac{t_1}{t_1} \quad \therefore t_c = \sqrt{t_1 t_n}$$

- El producto de los términos equidistantes de los extremos es constante e igual al producto de los términos extremos.

$$\text{Así: } \underbrace{t_1; \dots; t_k}_k \quad \dots \quad \underbrace{t_i; \dots; t_n}_k$$

$$t_k t_i = t_1 t_n$$

Demostración:

$$\bullet t_k = t_1 q^k \quad \dots (I)$$

$$\bullet t_n = t_1 q^k \quad \dots (II)$$

$$(I)/(II): \frac{t_k}{t_n} = \frac{t_1}{t_1} \Rightarrow t_k t_i = t_1 t_n$$

- Si el producto de todos los términos de una PG limitada se obtiene al extraer raíz cuadrada al producto de los términos extremos elevados al número de términos.

$$\text{Así: } P_n = \sqrt{(t_1 t_n)^n}$$

- La suma de los términos de una PG limitada es igual al primer término multiplicado por la razón elevada al número de términos menos uno, sobre la razón menos uno.

$$\text{Es decir: } S_n = \frac{t_1 (q^n - 1)}{q - 1} = \frac{t_n q - t_1}{q - 1}$$

- La suma límite de los términos de una PG decreciente e ilimitada es igual al primer término dividido entre uno menos la razón.

$$S_\infty = \frac{t_1}{1 - q} \quad \begin{array}{l} 0 < q < 1 \\ n \rightarrow \infty \end{array}$$

Medios geométricos

Son los términos correspondientes entre los términos extremos de una PG.

Interpolación de medios geométricos. Interpolación m medios geométricos entre los números "a" y "b" es formar una PG en donde el primer término es "a", el último "b" y el número de términos es "m + 2".

$$\text{Así: } (m + 2) \text{ términos}$$

$$\therefore \underbrace{a; \dots; b}_m$$

m medios geométricos

$$\text{Donde: } b = a q^{m+1} \Rightarrow q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

Ejemplos:

1. Calcular el número de términos de la siguiente progresión: $\therefore 2; 8; \dots; 8192$

Resolución:

De la progresión: $t_1 = 2; t_n = 8192; q = \frac{8}{2} = 4$

Por fórmula: $t_n = t_1 q^{n-1} \Rightarrow 8192 = 2 \times 4^{n-1}$

Expresándolo en base 4: $4^6 = 4^{n-1} \Rightarrow n - 1 = 6$

$\therefore n = 7$

2. Entre 3 y 768 y entre 7 y 112 se han interpolado el mismo número de medios proporcionales. Hallar la razón de la segunda progresión, si es el doble de la segunda.

Resolución:

Para: $\therefore 3; \dots; 768 \Rightarrow q_1 = x+1 \sqrt[3]{\frac{768}{3}}$

Para: $\therefore 7; \dots; 112 \Rightarrow q_2 = x+1 \sqrt[3]{\frac{112}{7}}$

Pero por dato: $q_1 = 2q_2$

Reemplazando: $x+1 \sqrt[3]{256} = 2(x+1 \sqrt[3]{16})$

$256 = 2^{x+1} \times 16 \Rightarrow 2^8 = 2^{x+1} \times 2^4$

Luego: $2^4 = 2^{x+1} \Rightarrow x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

$\therefore$ Se pide: $q_2 = \sqrt[4]{256} = 4$

3. La diferencia entre la suma de los " $n + 1$ " primeros términos de una PG con la suma de los " n " primeros términos es " x ", y la diferencia entre la suma de los " $n + 2$ " primeros términos de dicha progresión con la suma de los " n " primeros términos es " y ". Hallar la razón de dicha progresión.

Resolución:

Por dato:

$$\bullet S_{n+1} - S_n = x \Rightarrow t_{n+1} = x \quad \dots(I)$$

$$\bullet S_{n+2} - S_n = y \Rightarrow t_{n+1} + t_{n+2} = y \quad \dots(II)$$

$$(II) - (I): t_{n+2} = y - x$$

$$\Rightarrow q = \frac{t_{n+2}}{t_{n+1}} \Rightarrow q = \frac{y-x}{x}$$

4. Calcular el producto de los 10 términos de una PG cuyo sexto y último término son, en orden, 4 y 0,25.

Resolución:

De los datos: $t_6 = 4; t_{10} = 0,25$

Escribiendo t_{10} , en función de t_6 :

$$t_{10} = t_6 q^4 \Rightarrow 0,25 = 4q^4 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\text{De: } t_6 = t_1 q^5 \Rightarrow 2^2 = t_1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow t_1 = 2^7$$

$$\therefore \text{Se pide: } P_{10} = \sqrt{(t_1 t_{10})^{10}} = \left(2^7 \times \frac{1}{2^5}\right)^5 = 2^{25}$$

5. El límite de la suma de los términos de una PG decreciente hasta el infinito es 64, y el segundo término es 16. Hallar el primer término de dicha progresión.

Resolución:

Se sabe que: $S_L = \frac{t_1}{1-q}$

Multiplicando y dividiendo entre " q " tendremos:

$$\frac{t_1 q}{(1-q)q} = 64$$

Reemplazando: $t_2 = t_1 q = 16$

$$16 = 64(q - q^2) \Rightarrow 4q^2 - 4q + 1 = 0$$

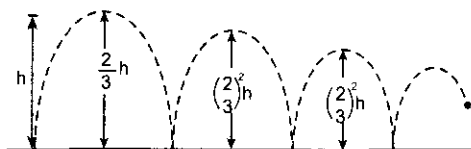
$$(2q - 1)^2 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$\text{Pero: } t_1 = \frac{t_2}{q} = \frac{16}{1/2} \therefore t_1 = 32$$

6. Una bola se deja caer desde una altura de 100 m cada vez que toca el piso rebota los $\frac{2}{3}$ de la altura a la cual se elevó la vez anterior. Hallar la suma de las alturas que alcanza la bola.

Resolución:

Llevando los datos a un gráfico:



La suma de los espacios recorridos estará dada por:

$$h + \frac{2}{3}h + \left(\frac{2}{3}\right)^2 h + \dots$$

Como se observa es la suma de los términos de una PG decreciente e ilimitada.

Factorizando h :

$$h \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \dots \right] = h \left[\frac{1}{1 - 2/3} \right] = 3h$$

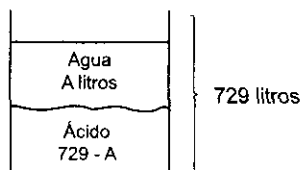
Luego, el espacio total recorrido será:

$$3h = 3(100) = 300 \text{ m}$$

7. De un depósito que contiene 729 litros de ácido puro se ha extraído A litros y se ha rellenado con agua, después del mezclado total (hasta que se obtenga una solución homogénea) del depósito se ha extraído de nuevo A litros y se ha rellenado con agua revolviendo la mezcla escrupulosamente. Después de repetir 6 veces tales operaciones el líquido del depósito contenía 64 litros de ácido puro. Determinar el valor de A.

Resolución:

En el depósito:



	Hay	Se saca	Queda
1.º	729	A	729 - A
2.º	729 - A	$\left(\frac{729 - A}{729}\right)A$	$\frac{(729 - A)^2}{729}$
3.º	$\frac{(729 - A)^2}{729}$	$\frac{(729 - A)^2 A}{(729)^2}$	$\frac{(729 - A)^3}{(729)^2}$
∴	$\frac{(729 - A)^6}{(3^6)^5} = 2^6 \Rightarrow A = 243$		

8. Calcular la suma límite de:

$$S = \frac{1}{5} + \frac{7}{25} + \frac{37}{125} + \frac{175}{625} + \dots$$

Resolución:

Haciendo transformaciones en los numeradores:

$$S = \frac{4^1 - 3^1}{5} + \frac{4^2 - 3^2}{5^2} + \frac{4^3 - 3^3}{5^3} + \dots + \frac{4^n - 3^n}{5^n} + \dots$$

$$S = \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{4}{5}\right)^n + \dots$$

$$- \left[\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{5}\right)^n + \dots \right]$$

Se tienen 2 sumas límites, entonces:

si: $n \rightarrow \infty$

$$S = \frac{\frac{4}{5}}{1 - \frac{4}{5}} - \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

9. Calcular "x" en la progresión geométrica:

$$\frac{1}{2x}; 1; 3x - 3$$

Resolución:

Por propiedad: $1^2 = \left(\frac{1}{2x}\right)(3x - 3)$

$$\Rightarrow 2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3$$

10. Calcular el término 9.º, en la siguiente progresión geométrica: 4; 8; 16; 32; ...

Resolución:

$$t_9 = t_1 q^8 \Rightarrow t_9 = 4(2)^8 = 1024$$

11. Se sabe que el quinto término de una progresión geométrica es 2 y el décimo primero es 128. Calcular el valor de la razón.

Resolución:

$$t_5 = 2; t_{11} = 128$$

$$t_{11} = t_5 q^6 \Rightarrow 128 = 2q^6 \Rightarrow q^6 = 64 \Rightarrow q = 2$$

12. Hallar tres números en progresión geométrica, cuya suma sea 19 y cuyo producto sea 216. Dar uno de ellos.

Resolución:Sea la PG: $t_1; t_1 q; t_1 q^2$

Por dato: $t_1 + t_1 q + t_1 q^2 = 19$

$$\Rightarrow t_1(1 + q + q^2) = 19 \quad \dots(I)$$

También: $t_1^3 q^3 = 216 \Rightarrow t_1 q = 6 \quad \dots(II)$

Luego, (II) en (I): $q = \frac{2}{3} \vee q = \frac{3}{2}$

Si: $q = \frac{2}{3}$, uno de los términos sería:

$$t_1 q^2 = (t_1 q) q = 6 \left(\frac{2}{3}\right) = 4$$

13. Calcular la suma de los 4 primeros términos de la progresión geométrica siguiente:
- $\frac{2}{3}; 1; \dots$

Resolución:

$$S = \frac{t_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$S = \frac{2\left[\frac{81 - 16}{16}\right]}{\frac{1}{2}} = \frac{65}{12}$$

14. Calcular:
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Resolución:

Por suma límite: $S_L = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

15. Luego de interpolar 3 medios geométricos entre 5 y 3125, hallar la razón.

Resolución:

Por dato: $q = \sqrt[n-1]{\frac{b}{a}} = \sqrt[3+1]{\frac{3125}{5}} = 5$

PROBLEMAS

RESUELTOS

1. En una progresión aritmética el primer término es 12, el número de términos es 9 y la suma es 252. En otra progresión aritmética el primer término es 2 y la razón 6. Dos términos del mismo lugar de estas progresiones son iguales. ¿Cuál es el valor de este término?

Resolución:

$$PA_1: a_1 = 12; n = 9; S_9 = 252$$

$$S_9 = \left(\frac{2a_1 + 8r_1}{2} \right) 9 = 252$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a(12) + 8r_1}{2} \right) 9 = 252 \Rightarrow r_1 = 4$$

$$PA_2: b_1 = 2 \wedge r_2 = 6$$

Sea "k" el lugar: $a_k = b_k$

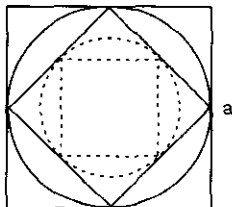
$$\Rightarrow a_1 + (k-1)r_1 = b_1 + (k-1)r_2$$

$$\Rightarrow k = 1 + \frac{b_1 - a_1}{r_1 - r_2} = 1 + \frac{2 - 12}{4 - 6} \Rightarrow k = 1 + 5 = 6$$

$$\text{Luego: } a_6 = a_1 + 5r_1 = 12 + 5(4) \therefore a_6 = 32$$

2. En un cuadrado de lado a se inscribe una circunferencia, en este se inscribe un cuadrado y en el segundo cuadrado se inscribe una circunferencia, así sucesivamente. Calcule la suma de las áreas de todas las figuras así formadas.

Resolución:



Para los cuadrados:

	1.º	2.º	3.º	...
Lado	a	$a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$	...
Área	a^2	$a^2\left(\frac{1}{2}\right)$	$a^2\left(\frac{1}{2}\right)^2$	...

$$S_{\square} = a^2 \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right)$$

$$S_{\square} = a^2 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) \Rightarrow S_{\square} = 2a^2$$

Para los círculos:

	1.º	2.º	3.º	...
Radio:	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$	$\frac{a}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$	...
Área:	$\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2$	$\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \times \frac{1}{2}$	$\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \right)^2$	...

$$S_{\circ} = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \right\}$$

$$S_{\circ} = \pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right\} = 2\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

$$\therefore S_{\square} + S_{\circ} = 2a^2 + 2\pi \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{a^2}{2} (4 + \pi)$$

3. Halle la razón de la progresión geométrica:

$$2^{\sqrt{n-1}}, 2^{\sqrt{2n-1}}, 2^{\sqrt{3n-1}}, \dots$$

Resolución:

$$\therefore 2^{\sqrt{n-1}}; 2^{\sqrt{2n-1}}; 2^{\sqrt{3n-1}}, \dots$$

$$\text{Por propiedad: } \therefore t_1; t_2; t_3 \Rightarrow t_2^2 = t_1 t_3$$

$$\Rightarrow (2^{\sqrt{2n-1}})^2 = (2^{\sqrt{n-1}})(2^{\sqrt{3n-1}})$$

$$\Rightarrow 2^{\sqrt{2n-1}} = 2^{\sqrt{n-1} + \sqrt{3n-1}} \Rightarrow n = 1$$

$$\text{Luego, la razón será: } q = \frac{2^{\sqrt{2n-1}}}{2^{\sqrt{n-1}}} = \frac{2^1}{2^0} = 2$$

4. Durante el mismo número de días se ha sacado de dos tanques A y B cantidades diferentes de agua. De A se sacó 1 litro el primer día, 4 litros el segundo día, 16 litros el tercer día, etc. De B se sacó 2 litros el primer día, 4 litros el segundo día, 8 litros el tercer día, etc. Si en total de A se sacaron 1239 litros más que del tanque B, ¿cuántos litros se sacó el último día de A?

Resolución:

	1.º	2.º	3.º	...	n.º
Tanque A	1	4	16	...	4^{n-1}
Tanque B	2	4	8	...	2^n

$$\text{Total}_{(A)} = 1 + 4 + 16 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$$

$$\text{Total}_{(B)} = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$$

$$\text{Por dato: } \text{Total}_{(A)} = 1239 + \text{Total}_{(B)}$$

$$\frac{4^n - 1}{3} = 1239 + 2^{n+1} - 2$$

$$\text{Haciendo: } 2^n = a \Rightarrow a^2 - 1 = 3 \times 1237 + 6a$$

$$a^2 - 6a + 9 = 3 \times 1237 + 10$$

$$(a - 3)^2 = 61^2 \Rightarrow a = 64 \Rightarrow 2^n = 64 \Rightarrow n = 6$$

$$\therefore \text{Se pide: } 4^{n-1} = 4^5 = 1024 \text{ litros}$$

5. Determine la razón de una PG de 7 términos, sabiendo que la suma de los 3 primeros es 26 y la suma de los 3 últimos 2106.

Resolución:

$$\therefore t; tq; tq^2; tq^3; tq^4; tq^5; tq^6$$

$$t(1 + q + q^2) = 26; tq^4(1 + q + q^2) = 2106$$

$$\Rightarrow q^4(26) = 2106 \Rightarrow q = 3$$

6. Si los números positivos x_1 ; x_2 ; x_3 están en PA y los números positivos y_1 ; y_2 ; y_3 están en PG, además se sabe que: $x_1 = y_1 = 3$; $x_2 - y_2 = 6 \wedge x_3 = y_3$.

Determine el valor de: $\sum_{k=1}^3 (x_k + y_k)$

Resolución:

Los términos positivos:

- 3; x_2 ; x_3 están en PA

$$\Rightarrow x_2 = \frac{3 + x_3}{2} \quad \dots(I)$$

- 3; y_2 ; y_3 están en PG

$$\Rightarrow y_2 = \sqrt{3y_3} \quad \dots(II)$$

$$\text{Datos: } x_2 = y_2 = 6 \quad (x_2 > y_2) \wedge x_3 = y_3$$

$$\text{De (I) y (II): } x_2 - y_2 = \frac{3 + x_3}{2} - \sqrt{3y_3}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{3 + x_3}{2} - \sqrt{3x_3} \Rightarrow 2\sqrt{3x_3} = x_3 - 9$$

$$\text{Al cuadrado: } 12x_3 = x_3^2 - 18x_3 + 81$$

$$x_3^2 - 30x_3 + 81 = 0 \Rightarrow (x_3 - 27)(x_3 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow x_3 = 27 \vee x_3 = 3$$

- Si: $x_3 = 27 \Rightarrow y_3 = 27$

$$\text{Con esto: } x_2 = 15 \wedge y_2 = 9$$

Luego:

$$\sum_{k=1}^3 (x_k + y_k) = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) +$$

$$(x_3 - y_3) = \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{45} + \underbrace{(y_1 + y_2 + y_3)}_{39}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^3 (x_k + y_k) = 84$$

Nota

Para x_3 , se obtiene $x_2 = y_2 = 3$, pero por condición: $x_2 - y_2 = 6$

7. En una progresión geométrica se conoce que el primer término es 7, el último es 567 y la suma de todos los términos es 847. Determine la suma del número de términos y la razón de dicha progresión geométrica.

Resolución:

Sea la PG de "n" términos y de razón "q".

$$\text{Datos: } t_1 = 7; t_n = 567; S_n = 847$$

$$\text{Sabemos que: } t_n = t_1 q^{n-1}$$

$$\Rightarrow 567 = 7q^{n-1} \Rightarrow 81 = \frac{q^n}{q} \Rightarrow 81q = q^n \quad \dots(\alpha)$$

$$\text{Además: } S_n = t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = \frac{847}{121} = 7 \left(\frac{81q - 1}{q - 1} \right)$$

De aquí, se obtiene: $q = 3$

$$\text{En } (\alpha): 3^n = 81 \times 3 \Rightarrow 3^n = 3^5 \Rightarrow n = 5$$

$$\therefore n + q = 8$$

8. Determine el valor de cuatro números a; b; c; d, si los tres primeros términos están en progresión aritmética y los tres últimos en progresión geométrica, siendo la suma de los extremos 14 y la suma de los medios igual a 12. Indique el mayor de ellos.

Resolución:

$$\begin{array}{c} \text{Es PG} \\ \bullet \quad \overbrace{a; b; c; d} \\ \text{Es PA} \end{array}$$

De aquí:

$$\bullet \quad b = \frac{a+c}{2} \Rightarrow 2b = a + c \quad \dots(I)$$

$$\bullet \quad c^2 = bd \quad \dots(II)$$

$$\text{Datos: } \underbrace{a + d = 14} \wedge \underbrace{b + c = 12}$$

$$d = 14 - a \wedge c = 12 - b$$

- Reemplazando en (II):

$$(12 - b)^2 = b(14 - a) \quad \dots(III)$$

$$\text{Pero: } 2b = a + c \wedge c = 12 - b$$

- Sumando: $2b + c = a + c + 12 - b$

$$\Rightarrow a = 3b - 12 \quad \dots(IV)$$

- (IV) en (III): $(12 - b)^2 = b(26 - 3b)$

$$\Rightarrow 2b^2 - 25b + 72 = 0 \Rightarrow (b - 8)(2b - 9) = 0$$

$$\text{De aquí: } b = 8 \vee b = 9/2$$

- Si $b = 8$; en (IV): $a = 12 \Rightarrow d = 2 \wedge c = 4$

$\therefore$ Mayor de ellos: 12

9. Si el término de lugar "2n" es "n" veces el término de lugar "n" en una progresión geométrica cuyo primer término es "n". Determine el término de lugar "n + 1" en dicha progresión.

Resolución:

$$\text{Datos: } \bullet \quad t_{2n} = nt_n \quad \dots(1)$$

$$\bullet \quad t_1 = n \quad \dots(2)$$

$$\text{De (1): } t_n q^n = nt_n \Rightarrow q^n = n$$

$$\text{Nos piden: } t_{n+1} = t_1 q^n$$

$$\therefore t_{n+1} = t_1 q^n = n(n) = n^2$$

10. Se han interpolado 20 medios aritméticos entre 4 y 67. Calcular el tercer medio aritmético.

Resolución:

$$\div 4 \quad \overbrace{\hspace{10em}}^{67}$$

$$\quad \quad \quad 20 \text{ MA}$$

$$a_1 = 4; a_{22} = 67; \text{ sea "r" la razón}$$

$$a_{22} = a_1 + 21r \Rightarrow 67 = 4 + 21r \Rightarrow r = 3$$

$$\text{El tercer MA será: } a_4 = a_1 + 3r = 4 + 3(3) = 13$$

11. El mayor de tres números que forman una progresión aritmética, es el doble del menor. ¿Cuál es

el mayor de estos tres números si su producto es 8232?

Resolución:

$$\div a - r; a; a + r / r > 0$$

$$\text{Por dato: } a + r = 2(a - 4) \Rightarrow a = 3r$$

$$(a - r)(a)(a + r) = 8232$$

$$\Rightarrow (2r)(3r)(4r) = 8232 \Rightarrow 24r^3 = 24(7)^3 \Rightarrow r = 7$$

$$\therefore \text{El mayor es: } a + r = 4r = 4(7) = 28$$

12. Si la PA $\div \overline{bb}; \overline{bb} + b; \overline{bb} + 2b; \dots; 456$; tiene $\overline{bb}$ términos, entonces determine el término de lugar 11 contado a partir del último término.

Nota

b es un dígito: $0 < b \leq 9$

Resolución:

$$\div \overline{bb}; \overline{bb} + b; \overline{bb} + 2b; \dots; 456$$

$$a_1 = \overline{bb} = 11b; r = b; n = \overline{bb} = 11b$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r = 456 = 11b + (11b - 1)b$$

$$11b^2 + 10b - 456 = 0$$

$$\begin{array}{r} 11b \quad \times \quad 76 \\ \quad \quad \quad -6 \Rightarrow b = 6 \end{array}$$

El término de lugar 11, contado a partir del final es:

$$a_{11} = a_1 - 10r = 456 - 10(6) \therefore a_{11} = 396$$

13. En una progresión aritmética de "n" términos los 2 primeros están en la relación de 3 a 7. ¿En qué relación están los dos últimos?

Resolución:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{7} \Rightarrow \frac{a_1}{a_1 + r} = \frac{3}{7} \Rightarrow a_1 = \frac{3}{4}r$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_1 + (n-1)r}{a_1 + (n-2)r} = \frac{\frac{3}{4}r + (n-1)r}{\frac{3}{4}r + (n-2)r}$$

$$\Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{4n-1}{4n-5} \vee \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{4n-5}{4n-1}$$

14. Si los términos de lugares p; q; r de una progresión aritmética son a; b; c, respectivamente. Determine: $(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c$

Resolución:

$$t_p = a; t_q = b; t_r = c$$

Recuerde que si r_0 es la razón

$$\Rightarrow t_m = t_n + (m - n)r_0$$

$$\text{Entonces: } t_p = t_q + (p - q)r_0 \wedge a = b + (p - q)r_0$$

$$a - b = (p - q)r_0 \Rightarrow (p - q)c = \frac{(a - b)c}{r_0}$$

Análogamente:

$$(q - r)a = \frac{(b - c)a}{r_0}; (r - p)b = \frac{(c - a)b}{r_0}$$

Luego:

$$S = (q - r)a + (r - p)b + (p - q)c$$

$$S = \frac{(b - c)a}{r_0} + \frac{(c - a)b}{r_0} + \frac{(a - b)c}{r_0}$$

$$S = \frac{1}{r_0}(ab - ac + bc - ab + ac - bc) \therefore S = 0$$

15. El primer término de una progresión aritmética es -3 y la suma de los 5 primeros términos es 105. ¿Qué lugar ocupa el término de valor 33?

Resolución:

$$a_1 = -3 \wedge S_5 = 105$$

$$\text{Usando: } S_n = \left(\frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \right)n$$

Sea r la razón de la PA:

$$S_5 = \left(\frac{2a_1 + 4r}{2} \right)(5) \Rightarrow 105 = \left(\frac{-6 + 4r}{2} \right)(5)$$

$$\Rightarrow 21 = -3 + 2r \Rightarrow r = 12$$

Luego, si k es el lugar del término de valor 33, entonces: $a_k = a_1 + (k - 1)r$

$$\Rightarrow 33 = -3 + (k - 1)(12) \therefore k = 4$$

16. En una progresión aritmética creciente de 25 términos se sabe que la suma de los diez últimos es cuatro veces la suma de los diez primeros. De las siguientes proposiciones:

I. Si $t_{13} = 25$, primer término es impar.

II. El primer término es el doble de la razón.

III. $t_{14} = 3t_5$.

Son correctas.

Resolución:

La RA tiene 25 términos.

La suma de los 10 primeros:

$$A = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{10}$$

$$A = t_1 + (t_1 + r) + (t_1 + 2r) + \dots + (t_1 + 9r)$$

$$A = 10t_1 + \left(\frac{9 \cdot 10}{2} \right)r = 5(2t_1 + 9r)$$

La suma de los 10 últimos

$$B = t_{16} + t_{17} + t_{18} + \dots + t_{25}$$

$$B = (t_1 + 15r) + (t_1 + 16r) + \dots + (t_1 + 24r)$$

$$B = 10t_1 + \left(\frac{15 + 24}{2} \right)(10r) = 5(2t_1 + 39r)$$

Dato: $B = 4A$

$$5(2t_1 + 39r) = 4[5(2t_1 + 9r)] \Rightarrow r = 2t_1$$

I. $t_{13} = 25 \Rightarrow t_1 + 12r = 25$

$$t_1 + 24t_1 = 25 \Rightarrow t_1 = 1 \Rightarrow t_1 \text{ es impar} \quad (V)$$

II. La razón es el doble de t_1 (F)

III. $t_{14} = t_1 + 13r = 27t_1 = 3(9t_1)$

$$= 3(t_1 + 8t_1) = 3(t_1 + 4r) \Rightarrow t_{14} = 3t_5 \quad (V)$$

$\therefore$ Son correctas: I y III

17. Determine la siguiente suma:

$$S = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$$

Resolución:

$$S = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$\frac{a_1}{a_2} \quad \frac{a_2}{a_3} \quad \frac{a_3}{a_4}$$

Se nota que:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2-\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = q$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2-\sqrt{2}}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}} = q$$

$$\text{Además: } q = \frac{1}{2+\sqrt{2}} \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots$$

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{1-\frac{1}{2+\sqrt{2}}} = (\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})$$

$$\therefore S = 4 + 3\sqrt{2}$$

18. Indique el menor de 4 números en progresión geométrica creciente sabiendo que la suma de sus extremos es 140 y la suma de los términos centrales es 60.

Resolución:

$$\Rightarrow t; tq; tq^2; tq^3 \wedge q > 1 \wedge t > 0 \text{ (PG creciente)}$$

$$t + tq^3 = 140 \Rightarrow t(1+q^3) = 140$$

$$tq + tq^2 = 60 \Rightarrow tq(1+q) = 60$$

$$\text{Dividiendo: } \frac{1-q+q^2}{q} = \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow q = 3 \text{ (} q > 1 \text{)}$$

$$\text{Luego: } t(1+3^3) = 140$$

$$\therefore t = 5$$

19. En una progresión geométrica de 6 términos, la suma de los términos de lugar par es 1365 y la de los de lugar impar es 455. Hallar el primer término de la progresión.

Resolución:

$$\Rightarrow t; tq; tq^2; tq^3; tq^4; tq^5$$

Suma de términos de lugar par:

$$tq + tq^3 + tq^5 = 1365$$

$$\Rightarrow tq(1+q^2+q^4) = 1365 \quad \dots(\alpha)$$

Suma de términos de lugar impar:

$$t + tq^2 + tq^4 = 455$$

$$\Rightarrow t(1+q^2+q^4) = 455$$

$$\text{En } (\alpha): (q)(455) = 1365 \Rightarrow q = 3$$

$$\text{Luego: } t(1+3^2+3^4) = 455$$

$$\therefore t = 5$$

20. Dadas las progresiones aritméticas:

$$P_1: \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \dots - \frac{94}{3} \wedge P_2: \frac{4}{3} - \frac{31}{6} \dots - \frac{41}{2}$$

determine la suma de los elementos de P_1 que también pertenecen a P_2 .**Resolución:**

$$\bullet \text{ De } P_1: \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \dots - \frac{94}{3} \Rightarrow r = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = -\frac{5}{6}$$

Número de términos = 39

Cálculo de su término general:

$$a_x = a_1 + (x-1)r$$

$$\Rightarrow a_x = \frac{1}{3} + (x-1)\left(-\frac{5}{6}\right) \quad \dots(\alpha)$$

Donde: $x = 1; 2; 3; \dots; 39$

$$\bullet \text{ De } P_2: -\frac{4}{3} - \frac{31}{6} \dots - \frac{41}{2} \Rightarrow r = -\frac{23}{6}$$

Número de términos = 6

Cálculo de su término general

$$a_y = a_1 + (y-1)r$$

$$\Rightarrow a_y = -\frac{4}{3} + (y-1)\left(-\frac{23}{6}\right) \quad \dots(\beta)$$

Donde: $y = 1; 2; 3; \dots; 6$ Ahora, si: $a_x \wedge a_y$ pertenecen a ambas progresiones, entonces: $a_x = a_y$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} + (x-1)\left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{4}{3} + (y-1)\left(-\frac{23}{6}\right)$$

Efectuando se obtiene:

$$23y - 5x = 8$$

$$\text{Valores que verifican } \begin{cases} 1 & 3 \\ 6 & 26 \end{cases}$$

Con esto:

$$\bullet \left. \begin{aligned} a_3 \text{ de } P_1 &= a_1 \text{ de } P_2 = -\frac{4}{3} \\ a_{26} \text{ de } P_1 &= a_6 \text{ de } P_2 = -\frac{41}{2} \end{aligned} \right\} (+)$$

$$\therefore \text{ Suma de ellos: } -\frac{131}{6}$$

21. Tres números enteros en PA cumple la siguiente relación: la suma de los tres al cuadrado es igual a su producto. Determine la suma de estos números.

Resolución:

Sean los números enteros en PA:

$$a-r; a; a+r$$

$$\text{Dato: } (a-r+a+a+r)^2 = (a-r)(a)(a+r)$$

$$\Rightarrow 9a^2 = (a^2-r^2)a$$

$$\text{De aquí: } a^2 - 9a = r^2 \quad \dots(I)$$

$$\Rightarrow a(a-9) = r^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a(a-9) \geq 0 \Rightarrow a \leq 0 \vee a \geq 9$$

Si los términos son enteros:

$$\Rightarrow a \wedge r \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si: } a = 12; \text{ en (I): } r = 6 \vee -6$$

- Para $a = 12$ y $r = 6$; la PA es: 6; 12; 18
 - Para $a = 12$ y $r = -6$; la PA es: 18; 12; 6
- ∴ En los dos casos: Σ de términos = 36

22. Se prepara una cantidad de reserva de comida para 31 conejos, sabiendo que estos consumen 61/2 kg semanales cada uno. Dicha reserva se hizo en el supuesto de que el número de animales permaneciera fijo, pero cada semana disminuye un conejo; la comida reservada duró el doble del tiempo previsto. ¿Qué cantidad de comida se preparó?

Resolución:

Supongamos que se prepara comida para t semanas.

Como son 31 conejos que consumen 61/2 kg. semanales cada uno, entonces se tiene:

Cantidad de comida que se preparó:

$$(31)\left(\frac{13}{2}\right)(t) \quad \dots(I)$$

Luego, se disminuye un conejo semanal hasta el último conejo, la comida durará $(2t)$ semanas (dato)

1 s	2 s	3 s	...	(2t) s
31 c	30 c	29 c	...	0 c

$$1 + 31 = 2 + 30 = \dots = 2t + 0 = 32$$

Donde: $t = 16$

En (I): comida prep. = 3234 kg.

23. Determine el valor de r , si se define la siguiente progresión geométrica: 2; $2 + r$; $2 + 2r$; ...

Resolución:

De la PG: 2; $(2 + r)$; $(2 + 2r)$

Se cumple: $(2 + r)^2 = 2(2 + 2r)$

$$\Rightarrow 4 + 4r + r^2 = 4 + 4r \Rightarrow r^2 = 0 \quad \therefore r = 0$$

24. Se ha interpolado entre 3 y 384 un cierto número de medias geométricas, cuya suma es 378. Determine la razón de interpolación.

Resolución:

Sea la PG de razón q :

$$\therefore 3; \dots; 384$$

número de MG = m

La razón de interpolación no es otra cosa que la razón de la PG.

$$\Rightarrow q = m \cdot \sqrt[m]{\frac{384}{3}} \Rightarrow q = m \cdot \sqrt[m]{128}$$

O también: $q^{m+1} = 128$

Ahora, según fórmula, la suma de todos los términos (S_{m+2}) es: $S_{m+2} = t_1 \left(\frac{q^{m+2} - 1}{q - 1} \right)$

$$\Rightarrow \frac{378 + 3 + 387}{765} = 3 \left(\frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} \right)$$

$$\text{Aquí: } 255(q - 1) = 128q - 1$$

∴ Resolviendo: $q = 2$

25. Una progresión geométrica finita tiene n términos. Si S es la suma de sus términos, S' la suma de sus recíprocos y P el producto de sus términos, entonces en la expresión $P^2 = \left(\frac{S}{S'} \right)^x$ el valor de x es:

Resolución:

Dada la PG de n términos y razón q :

∴ $t_1; \dots; t_n \Rightarrow$ se conoce que:

- Suma de todos los términos:

$$t_1 \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = S \quad \dots(I)$$

- Producto de todos los términos: $\sqrt[n]{(t_1 t_n)^n} = P$

$$\text{De aquí: } P^2 = (t_1 t_n)^n \quad \dots(II)$$

Además:

- Suma de los recíprocos de todos sus términos:

$$\frac{1}{t_n} \left(\frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = S' \quad \dots(III)$$

$$(I) \text{ y } (III): t_1 t_n = \frac{S}{S'}$$

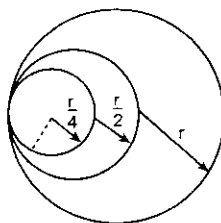
$$\text{Elevamos a la } n: (t_1 t_n)^n = \left(\frac{S}{S'} \right)^n$$

$$\text{Multiplicamos por } (II): P^2 = \left(\frac{S}{S'} \right)^n$$

∴ Con el dato, vemos que: $x = n$

26. Dado un círculo de radio r , se construye un segundo círculo cuyo diámetro sea el radio del anterior, un tercero cuyo diámetro sea el radio del segundo y así sucesivamente, ¿cuál será la suma de las áreas de todos los círculos así formados?

Resolución:



$$A_T = AC_1 + AC_2 + AC_3 + AC_4 + \dots$$

$$A_T = \pi r^2 + \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 + \pi \left(\frac{r}{4} \right)^2 + \pi \left(\frac{r}{8} \right)^2 \dots$$

$$A_T = \pi r^2 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots \right)$$

$$\text{Pero: } S_L = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \quad \therefore A_T = \frac{4\pi r^2}{3}$$

27. Sabiendo que: $\frac{y}{4}, \frac{x}{4}, \frac{z}{4}$ forman una PA, en ese orden, ¿qué tipo de progresión forman: $\frac{2}{x+y}, \frac{2}{y+z}, \frac{2}{z+x}$, en ese orden?

Resolución:

$$\text{Si: } \div \left(\frac{y}{4}\right) \left(\frac{x}{4}\right) \left(\frac{z}{4}\right) \Rightarrow 2\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{y+z}{4} \Rightarrow x = \frac{y+z}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = y + z$$

Supongamos que la progresión que nos dan sea una PG.

Por propiedad de término central:

$$\Rightarrow \frac{-4}{(y+z)^2} = \frac{-4}{(x-z)(x-y)}$$

$$\frac{1}{(y+z)^2} = \frac{1}{x^2 + (y+z)x + yz}$$

Reemplazando:

$$\Rightarrow \frac{1}{4x^2} = \frac{1}{3x^2 + yz} < \frac{1}{4x^2}$$

Como se obtiene una igualdad numérica correcta significa que lo supuesto es correcto.

28. A las nueve de la noche terminó una de las sesiones de un sindicato en huelga y en el tiempo que duró la sesión dio el reloj 48 campanadas. ¿A qué hora empezó la reunión? El reloj da las horas y medias horas.

Resolución:

Lo general de un reloj que da campanadas es que a la hora da el mismo número de campanadas que la marcada y a la media hora solo una. En función a ello:

Asumamos las x horas (inicio de la reunión).

Luego: x horas dará x campanas

Horas marcadas	N.º de campanadas
x	x
• 1/2 hora después	1
$(x+1)$	$(x+1)$
• 1/2 hora	1
$(x+2)$	$(x+2)$
• 1/2 hora	1
$\vdots$	$\vdots$
$(x+n)$ horas	$(x+n)$
• 1/2 horas después	1

Donde: $x + n = 9$ (dato) ... (I)

Además:

Σ número campanadas = 48 (dato)

$$\Rightarrow x + (x+1) + (x+2) + \dots + (x+n) + \underbrace{(1+1+\dots+1)}_{\text{"n" veces}} = 48$$

Operando:

$$(x + x + \dots + x) + (1 + 2 + 3 + \dots + n) + n(1) = 48$$

"n + 1" veces

$$(n+1)(x) \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} + n = 48$$

$$2(n+1)x + n^2 + 3n = 96 \quad \dots (II)$$

$$(I) \text{ en } (II): 2(n+1)(9-n) + n^2 + 3n = 96$$

$$\text{De aquí: } n^2 - 19n + 78 = 0$$

$$\begin{array}{ccc} n & \times & -13 \\ & & -6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} n' = 13 \\ n'' = 6 \end{array}$$

Reemplazando en (I):

$$\text{Si: } n = 13 \Rightarrow x = -4 \text{ h (no)}$$

$$n = 6 \Rightarrow x = 3 \text{ h}$$

29. La suma de los 4 primeros términos de lugar impar de una PG es a la suma de los restantes como 1 es a 2. Además la suma de todos los 8 términos es 510. Señale uno de los términos centrales.

Resolución:

$$\text{Sea: } \div t_1; t_2; t_3; t_4; t_5; t_6; t_7; t_8; t_9; t_{10}$$

$$\text{Datos: } \frac{S_4}{S_p} = \frac{1}{2} \Rightarrow S_p = 2S_4 \quad \dots (I)$$

$$S_p + S_4 = S_8 = 510 \quad \dots (II)$$

$$\text{De (I) y (II): } S_4 = 170 \wedge S_p = 340$$

$$\text{Pero: } S_4 = r_1(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 170 \quad \dots (III)$$

$$S_p = r_1 q(1 + q^2 + q^4 + q^6) = 340 \quad \dots (IV)$$

$$\text{De (IV) y (III): } q = 2$$

$$\text{En (III): } t_1 = 2$$

$$\therefore \div 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256$$

30. Sea la PA $\div a^2; b^2; c^2; d^2$, cuya suma de sus términos es n , siendo la razón $2n$, encontrar el valor de: $M = a^4 - d^4$

Resolución:

$$\text{Datos: } r = 2n$$

$$S_n = n = 4 \left(\frac{a^2 + d^2}{2} \right)$$

$$n = 2(a^2 + d^2) \Rightarrow \frac{n}{2} = a^2 + d^2$$

$$\text{De la PA se plantea: } d^2 = a^2 + 3r$$

$$d^2 - a^2 = 3r = 6n \Rightarrow a^2 - d^2 = -6n$$

$$\text{Nos piden: } M = a^4 - d^4$$

$$M = (a^2 + d^2)(a^2 - d^2) = \frac{n}{2}(-6n)$$

$$\therefore M = -3n^2$$

31. El número de términos de una progresión aritmética comprendidos entre 23 y 59 es el doble del número de términos comprendidos entre 3 y 23, hallar la razón.

Resolución:

$$\div 3; \dots; 23; \dots; 59$$

$$\begin{array}{cc} x \text{ términos} & 2x \text{ términos} \end{array}$$

Sea r la razón de la PA ($r > 0$), luego:

$$\begin{aligned}
 a_n &= a_1 + (n-1)r \\
 \Rightarrow 23 &= a_{x-2} = a_1 + (x-1)r = 3 + (x-1)r \\
 \Rightarrow 20 &= (x-1)r \quad \dots(I) \\
 59 &= a_{3x+3} = a_1 + (3x+2)r = 3 + (3x+2)r \\
 \Rightarrow 56 &= (3x+2)r \\
 \text{Dividiendo (I) entre (II): } \frac{20}{56} &= \frac{x-1}{3x+2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow 15x + 10 &= 14x + 14 \Rightarrow x = 4 \\
 \therefore r &= 4
 \end{aligned}$$

32. Si en una progresión geométrica:

$$t_2 = \frac{1}{20} \text{ y } t_5 = \frac{1}{1280}, \text{ hallar } t_1.$$

Resolución:

$$\text{En una PG: } t_2 = \frac{1}{20}; t_5 = \frac{1}{1280}$$

Siendo: $t_1 \neq 0 \wedge q \neq 0$ (razón)

Se sabe que: $t_n = t_1 q^{n-1}$

También: $t_m = t_n q^{m-n}$

$$\Rightarrow t_5 = t_2 q^{5-2} \Rightarrow \frac{1}{1280} = \frac{1}{20} (q^3)$$

$$\Rightarrow q^3 = \frac{1}{64} \Rightarrow q = \frac{1}{4}$$

$$\text{Luego: } t_2 = t_1 q^{2-1} \Rightarrow \frac{1}{20} = t_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$\therefore t_1 = \frac{1}{5}$$

33. Entre 4 y 18 se han interpolado m medios aritméticos, entre 10 y 24 se han interpolado $m+2$ medios aritméticos de manera que: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{9}{7}$. Si r_1 y r_2 son las razones de la primera y segunda progresión aritmética, hallar la suma del número total de términos que hay en las dos progresiones.

Resolución:

$$+ 4; \dots; 18 \text{ (razón } r_1) \quad \dots(I)$$

m medios aritméticos

$$\div 10; \dots; 24 \text{ (razón } r_2) \quad \dots(II)$$

$(m+2)$ medios aritméticos

$$\text{De (I): } 18 = a_{m+2} = a_1 + (m+1)r_1$$

$$18 = 4 + (m+1)r_1 \Rightarrow (m+1)r_1 = 14$$

$$\text{De (II): } 24 = a_{m+4} = a_1 + (m+3)r_2$$

$$24 = 10 + (m+3)r_2 \Rightarrow (m+3)r_2 = 14$$

$$\text{De (I) y (II): } (m+1)r_1 = (m+3)r_2$$

$$\Rightarrow \frac{r_1}{r_2} = \frac{m+3}{m+1}; \text{ pero: } \frac{r_1}{r_2} = \frac{9}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{m+3}{m+1} = \frac{9}{7} \Rightarrow m = 6$$

La primera tiene: $m+2 = 8$ términos

La segunda tiene: $m+4 = 10$ términos

$\therefore n^\circ$ de términos = 18

34. Sean: $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

$$S_m = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m$$

Si: $m = 101$, calcular S_m .

Resolución:

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_m = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_m$$

$$S_m = \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\Rightarrow S_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m (k^2 + k) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^m k^2 + \sum_{k=1}^m k \right)$$

$$\text{Pero: } \sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$$

Reemplazando:

$$S_m = \frac{1}{2} \left[\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2} \right]$$

$$\Rightarrow S_m = \frac{m(m+1)(m+2)}{6} \Rightarrow m = 101$$

$$\therefore S_{101} = 176\,851$$

35. Diana no pudiendo cancelar una deuda de S/. 12 950, le propone a su acreedor pagarle del siguiente modo: S/. 600 al final del primer mes y cada mes siguiente S/. 50 más que el anterior. ¿Cuál será el importe del último pago?

Resolución:

$$\text{Datos: } S = 12\,950; a_1 = 600; r = 50$$

$$\text{Como: } S_n = [2a_1 + (n-1)r] \frac{n}{2}$$

$$\text{Luego: } 12\,950 = [2(600) + (n-1)50] \frac{n}{2} \Rightarrow n = 14$$

$$\text{Como: } a_n = a_1 + (n-1)r$$

$$\Rightarrow a_n = 600 + (14-1)50 \Rightarrow a_n = 1250$$

$\therefore$ El importe del último pago es: S/. 1250

36. La suma de los tres primeros términos de una PA es 65, la suma de los tres últimos es 307 y la suma de todos los términos es 3100. ¿Cuántos términos tiene la PA?

Resolución:

De los datos:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 65$$

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 307$$

$$(a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) = 372$$

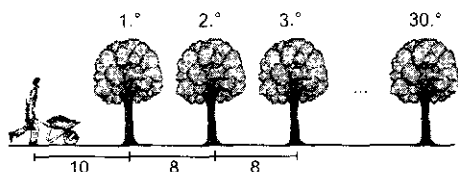
$$3(a_1 + a_n) = 372$$

$$a_1 + a_n = 124$$

$$\text{Dato: } S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) n = 3100 \Rightarrow \left(\frac{124}{2} \right) n = 3100$$

$$\therefore n = 50$$

37. Un peón debe llevar una carretilla de arena al pie de cada uno de los 30 árboles que están al lado de una calzada; los árboles están a 8 m de distancia y el montón de arena está a 10 m antes del primer árbol. ¿Cuánto habrá recorrido después de haber terminado su trabajo y vuelto la carretilla al montón de arena?

Resolución:

Como para cada uno lleva la arena y regresa al montón (hace doble recorrido), se tiene

$$\Rightarrow S = 20 + 36 + 52 + \dots$$

$$\begin{aligned} r &= 16 \\ n &= 30 \\ a_1 &= 20 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} S_n &= [2a_1 + (n-1)r] \frac{n}{2} \\ S &= [2(20) + (30-1)16] \frac{30}{2} \\ S &= (40 + 464)15 \Rightarrow S = 7560 \end{aligned} \right.$$

$\therefore$ La distancia total recorrida es: 7560 m

38. Hallar el término 18 de la PG, sabiendo que el quinto término es 32 y el octavo es 4.

Resolución:

Como: $t_n = t_1 q^{n-1}$

Luego: $t_5 q^4 = 32 \quad \dots (I)$

$t_8 q^7 = 4 \quad \dots (II)$

Dividiendo (II) entre (I): $q^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

Reemplazando q en (I): $t_5 = 512$

$\Rightarrow t_{18} = t_5 q^{13} \Rightarrow t_{18} = 512 \left(\frac{1}{2}\right)^{13} = \frac{2^9}{2^{17}}$

$\therefore t_{18} = \frac{1}{256}$

39. Calcular: $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{3}{9} + \frac{7}{27} + \frac{15}{81} + \dots$

Resolución:

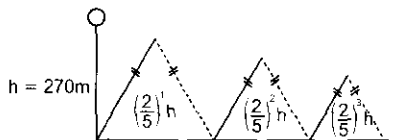
$$S = 1 + \left(\frac{2-1}{3}\right) + \left(\frac{2^2-1}{3^2}\right) + \left(\frac{2^3-1}{3^3}\right) + \left(\frac{2^4-1}{3^4}\right) + \dots$$

$$S = 1 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{8}{27} - \frac{1}{27}\right) + \left(\frac{16}{81} - \frac{1}{81}\right) + \dots$$

$$S = \underbrace{\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots\right)}_{\text{suma límite}} - \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots\right)}_{\text{suma límite}}$$

$$\therefore S = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{5}{2}$$

40. Se deja caer una pelota desde una altura $h = 270$ m, en cada rebote la pelota se eleva $\frac{2}{5}$ de la altura anterior. ¿Qué distancia total recorre la pelota hasta quedar en reposo?

Resolución:

$$S = h + 2 \left[\left(\frac{2}{5}\right)^1 h \right] + 2 \left[\left(\frac{2}{5}\right)^2 h \right] + 2 \left[\left(\frac{2}{5}\right)^3 h \right] + \dots$$

PG

$$\Rightarrow S = h + 2h \left[\left(\frac{2}{5}\right)^1 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots \right]$$

$$\Rightarrow S = h + 2h \left[\frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} \right] = h + 2h \left[\frac{2}{3} \right] = \frac{7h}{3}$$

$$\therefore S = \frac{7(270)}{3} = 630 \text{ m}$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

**PROBLEMA 1 (UNI 2001 - I)**

Sean $n > 2$ un número natural y $a_1, a_2, \dots, a_n$ los términos de una PG de razón $1/n$. ¿Cuál es el mínimo valor de a_1 para que: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ sea un número natural?

- A) 1 B) n C) $(n-1)$
D) $(n-1)^{n-1}$ E) n^{n-1}

Resolución:

Sea: $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

Como es una PG: $S = a_1 \left[\frac{(1/n)^n - 1}{1/n - 1} \right]$

Operando: $S = \frac{a_1 [(1/n)^n - 1]}{n^{n-1} (n-1)}$

$$\Rightarrow S = \frac{a_1}{n^{n-1}} \underbrace{(n^{n-1} + n^{n-2} + \dots + n + 1)}_{\in \mathbb{N}}$$

Para que $S \in \mathbb{N}$, $\frac{a_1}{n^{n-1}} \in \mathbb{N}$, entonces: $a_1 = n^{n-1}$

Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2002 - I)

Sean $(a_1; a_2; a_3)$ y $(b_1; b_2; b_3)$ los tres primeros términos de una sucesión aritmética y geométrica, respectivamente, tales que: $a_2 - b_2 = |a_3 - b_3| = 0,4$

Si la razón aritmética es 2 y la razón geométrica es $1/2$, entonces el valor de b_1 asociado al menor valor posible de a_1 es:

- A) -4,8 B) -8 C) -11,2
D) -14,4 E) -17,6

Resolución:

Del problema: a_1 ; $a_1 + 2$; $a_1 + 4$;

$$b \frac{1}{2}(b_1); \frac{1}{4}(b_1);$$

Además:

$$a_1 + 2 - (1/2)b_1 = 4/10$$

$$a_1 - (1/2)b_1 = -16/10 \quad \dots(\alpha)$$

$$a_1 + 4 - (1/4)b_1 = 4/10$$

$$a_1 - (1/4)b_1 = -36/10 \quad \dots(\beta)$$

$$a_1 + 4 - (1/4)b_1 = -4/10$$

$$a_1 - (1/4)b_1 = -44/10 \quad \dots(\gamma)$$

De (α) y (β) , (α) y (γ) : $a_1 = -5,6$; $a_1 = -7,2$

Trabajando con el menor: $a_1 = 7,2 \Rightarrow b_1 = -11,2$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2003 - I)

Sea la sucesión: s_0 ; s_1 ; s_2 ; ...; s_k ; ...

Donde: $s_0 = 49$; $s_1 = 7$; $s_2 = \sqrt{7}$; ...; $s_k = 7^{\frac{k(k-1)}{2}}$, para $k \geq 2$.

Entonces la suma de las cifras del producto de todos los términos de la sucesión será igual a:

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución:

De la fórmula de recurrencia tenemos:

$$s_k = 7^{1/(k-1)}$$

$$s_k = 7^{1/(k-1) - 1/k}, \quad k > 1 \quad (k \geq 2)$$

$$\text{Luego: } s_2 = 7^{1 - 1/2}$$

$$s_3 = 7^{1/2 - 1/3}$$

$$s_4 = 7^{1/3 - 1/4}$$

...

∞

Después:

$$\prod_{i=2}^{\infty} 7^{1/(i-1) - 1/i} = 7^{1 - 1/2 + 1/2 - 1/3 - 1/3 + 1/4 + \dots + 1/(k-1) - 1/k}$$

$$\prod_{i=2}^{\infty} 7^{1-1/k}$$

$$\text{Aplicando límite: } \lim_{k \rightarrow \infty} 7^{1-1/k} = 7 \Rightarrow \prod_{i=2}^{\infty} s_i = 7$$

$$\text{Entonces: } s_0 s_1 \prod_{i=2}^{\infty} s_i = 7^2 \times 7 \times 7 \Rightarrow \prod_{i=0}^{\infty} s_i = 7^4 = 2401$$

$\therefore \Sigma$ de (cifras) = 7

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2003 - II)

Se tiene cuatro números, tales que, los tres primeros están en progresión geométrica y los tres últimos en progresión aritmética de razón seis, siendo el primer número igual al cuarto. La suma de los cuatro números es:

- A) 22 B) 18 C) 14 D) 16 E) 20

Resolución:

Sean: a_1 ; a_2 ; a_3 ; a_4

Por dato: $a_1 = a_4$

$$\text{Del enunciado: } \begin{matrix} \div & a_1 & a_2 & a_3 & \dots(I) \\ & \div & a_2 & a_3 & a_4 & \dots(II) \end{matrix}$$

Como la razón es 6, se cumple:

$$a_2 = x - 6; a_3 = x; a_4 = a_1 = x + 6$$

De (I) por ser PG se cumple: $a_2^2 = a_1 a_3$

$$\text{Reemplazando: } (x - 6)^2 = x(x + 6)$$

$$x^2 - 12x + 36 = x^2 + 6x$$

$$36 = 18x \Rightarrow x = 2$$

$$\text{Luego: } a_1 = 8; a_2 = -4; a_3 = 2; a_4 = 8$$

$$\therefore \text{Sumando: } a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 14$$

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2005 - II)

El primer término de la sucesión: $?$; 3_8 ; 12_5 ; 16 ; 1022_3 en la base 2 es:

- A) 0 B) 1 C) 1,01 D) 1,10 E) 1,11

Resolución:

Dada la sucesión: $?$; 3_8 ; 12_5 ; 16 ; 1022_3

Descomponiendo polinómicamente los términos:

$$3_8 = 3 \times 8^0 = 3$$

$$12_5 = 1 \times 5 + 2 \times 5^0 = 7$$

$$1022_3 = 1 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 2 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = 35$$

Entonces, la sucesión es:

$$\begin{matrix} ? & \xrightarrow{3} & 3 & \xrightarrow{7} & 7 & \xrightarrow{16} & 16 & \xrightarrow{35} & 35 \\ & 8 \times 2 + 0 & 3 \times 2 + 1 & 7 \times 2 + 2 & 16 \times 2 + 3 \end{matrix}$$

$\Rightarrow$ el primer término de la sucesión es:

$$? \times 2 + 0 = 3 \Rightarrow ? = \frac{3}{2} = 1,5 = 1 + 0,5 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1}$$

$\therefore$ Primer término de la sucesión en base 2: $? = 1,1_2$

Clave: D



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. La suma de los 6 términos centrales de una progresión aritmética creciente de 16 términos es 141 y el producto de los extremos 46. ¿Qué lugar ocupa en la progresión 7?

A) 2.º B) 3.º C) 5.º
D) 9.º E) 7.º

2. Las poblaciones A y B, tienen en la actualidad 585 640 y 262 440 habitantes, respectivamente. Suponiendo una disminución anual en A y un aumento en B en PG, siendo las razones 10/11 y 10/9, respectivamente. ¿Dentro de cuánto tiempo tendrán las poblaciones el mismo número de habitantes?

A) 4 B) 3 C) 5 D) 6 E) 10

3. Calcular el producto de los 10 términos de una PG cuyo sexto y último término son en ese orden: 4 y 0,25.

A) 2^{10} B) 2^{20} C) 2^{25}
D) 2^{30} E) 2^{15}

4. Las edades de 4 hermanos están en PG. Si cuando nació el menor, el mayor tenía 32 años y la diferencia de edades de los otros es 8. Hallar dichas edades, señalando la edad del segundo.

A) 4 B) 8 C) 16 D) 32 E) 40

5. Hallar cuatro números en PA, sabiendo que suman 16, además, la suma de los cuadrados es 144. Indicar el último de los cuatro números.

A) -2 B) 2 C) 6
D) 10 E) 14

6. Dadas las relaciones:

$$\div \log_a x; \log_b y; \log_c z \wedge x \cdot y = z$$

Calcular el valor que debe tomar el logaritmo de z en base x.

A) $\log_a c$ B) $\frac{\log(a/b)}{\log(b/c)}$ C) $\frac{\log_a(a/b)}{\log_c(c/b)}$
D) $\frac{\log_a b}{1 - \log_a}$ E) $\frac{1 - \log_a b}{\log_c b - 1}$

7. En un círculo de radio R, se inscribe un triángulo equilátero. En éste, se inscribe un círculo y en este segundo círculo, se inscribe un triángulo equilátero y así sucesivamente. Calcular la suma límite de las áreas de todas las figuras así formadas.

A) $\frac{R^2}{2}(2\pi + 3\sqrt{3})$ B) $\frac{R^2}{2}(\pi + \sqrt{3})$
C) $\frac{R^2}{3}(4\pi + 3\sqrt{3})$ D) $\frac{R^2}{3}(\pi + \sqrt{3})$
E) $\frac{R^2}{2}(4\pi + \sqrt{3})$

8. Hallar la razón de una progresión aritmética de 4 términos, tales que si se les aumenta 0; 1; 4 y 11, respectivamente, los resultados están en progresión geométrica.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

9. Encontrar una progresión aritmética y una progresión geométrica, si se sabe que los primeros términos son iguales a 2, tienen el mismo tercer término, y el onceavo término de la progresión aritmética es igual al quinto término de la progresión geométrica. Dar la suma de las razones de ambas progresiones.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 8 E) 6

10. Si la expresión: $a(b - c)x^2 + b(c - a)xy + c(a - b)y^2$ es un cuadrado perfecto, entonces, a; b; c se encuentran formando:

A) Progresión aritmética.
B) Progresión geométrica.
C) Progresión armónica.
D) Progresión hipergeométrica.
E) Progresión aritmética de orden superior.

11. Determinar el término central de una progresión aritmética de 7 términos, sabiendo que la suma de los términos de lugar impar es 77 y los de lugar par 56.

A) 21 B) 15 C) 25
D) 19 E) 18

12. En una progresión aritmética, los elementos de los lugares j, k y (j + k), son tales, que la suma de los primeros es igual al último menos 1. Si la suma de los primeros es x, hallar la razón de la progresión.

A) $\frac{x}{(j + k - 1)}$ B) $\frac{(x + 2)}{(j + k)}$
C) $\frac{(x + 1)}{(j + k - 1)}$ D) $\frac{(x - 2)}{(j + k - 1)}$
E) $\frac{(x + 2)}{(j + k - 1)}$

13. Dadas las progresiones aritméticas:

$$S_1 = \left\{ \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{94}{3} \right\} \wedge S_2 = \left\{ -\frac{4}{3}, -\frac{31}{6}, \dots, -\frac{41}{2} \right\}$$

¿cuál es la suma de los elementos S_1 que también pertenece a S_2 ?

A) -4/3 B) -41/2 C) -131/2
D) -75/2 E) -31/6

14. Sean: (a_1, a_2, a_3) y (b_1, b_2, b_3) los tres primeros términos de una sucesión aritmética y geométrica, respectivamente, tales que:

$$a_2 - b_2 = |a_3 - b_3| = 0,4$$

Si la razón aritmética es 2 y la razón geométrica es $1/2$, hallar el valor de a_1 asociado al menor valor posible de a_1 .

- A) -4,8 B) -8 C) -11,2
D) -14,4 E) -17,6

15. Si: $S_1, S_2, S_3, \dots, S_p$ son las sumas de unas series geométricas infinitas cuyos primeros términos son:

$1; 2; \dots; p$; y cuyas razones son: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{p+1}$,

respectivamente; hallar: $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_p$

- A) $\frac{p}{2}(p+2)$ B) $\frac{p}{3}(p+3)$
C) $\frac{p(p+1)}{2}$ D) $\frac{p(p+3)}{2}$
E) $\frac{p(p+1)(p+2)}{6}$

16. La suma de los 4 términos de una progresión geométrica es 160 y la suma de sus inversos 10/27. Hallar el valor del producto de sus términos.

- A) 46 656 B) 93 312 C) 186 624
D) 233 280 E) 139 968

17. Se tienen 2 progresiones, una aritmética y otra geométrica, cuyos primeros términos son iguales e igual a la razón común, sabiendo que la suma de los 8 primeros términos de la progresión aritmética es igual a la suma de los infinitos términos de la progresión geométrica. Hallar el noveno término de la progresión aritmética.

- A) 35/41 B) 35/26 C) 36/35
D) 35/4 E) 35/36

18. Si: a^2, b^2, c^2 ; están en progresión armónica, entonces, las cantidades mostradas (en ese orden):

$$\frac{2a^2 - b^2}{2}, \frac{b^2}{2}, \frac{2c^2 - b^2}{2}$$

- A) están en PA.
B) están en PG.
C) están en progresión armónica.
D) son iguales.
E) no se puede afirmar nada.

19. De los tres primeros términos de una progresión aritmética, el término intermedio es 15 y el producto de los mismos es 2415. Hallar el término del décimo primer lugar.

- A) 76 B) 77 C) 87
D) 97 E) 98

20. En una progresión geométrica de 3 términos, la suma de ellos es 117 y su producto 19 683. Hallar el segundo término, si la razón es mayor que 1.

- A) 24 B) 25 C) 27
D) 26 E) 28

21. A los largo de un camino había un número impar de piedras a 10 m una de otra. Se quiso juntar éstas en un lugar donde se encontraba la piedra central. El hombre encargado podría llevar una sola piedra. Empezó por uno de los extremos y los trasladaba sucesivamente. Al recoger todas las piedras, el hombre caminó 3 km. ¿Cuántas piedras había en el camino?

- A) 17 B) 41 C) 29
D) 13 E) 25

22. La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente de infinitos términos es m veces la suma de sus n primeros términos. Hallar la razón de la progresión geométrica.

- A) $\left[\frac{m-1}{m}\right]^{1/n}$ B) $\left[\frac{m-1}{m+1}\right]^{1/n}$ C) $\left[\frac{m-1}{m}\right]^{1/m}$
D) $\left[\frac{1}{mn}\right]^{1/n}$ E) $\left[\frac{m+1}{n-1}\right]^{1/n}$

23. Una progresión aritmética está formada del 4 al 55. La suma de los 6 primeros números es 69, de los 6 siguientes es 177 y la suma de los 6 últimos es 285. Hallar el segundo y el décimo término de la progresión.

- A) 7 y 31 B) 10 y 34 C) 10 y 28
D) 13 y 37 E) 8 y 32

24. La suma de los medios geométricos de una serie de 4 términos es 42 y su diferencia es 14. Si la razón es mayor que uno, calcular el primer y cuarto término.

- A) $a_1 = 6; a_4 = 48$ B) $a_1 = 8; a_4 = 64$
C) $a_1 = 7; a_4 = 56$ D) $a_1 = 10; a_4 = 270$
E) $a_1 = 8; a_4 = 216$

25. Hallar el quinto término de una progresión geométrica de 7 términos, si la suma de los tres primeros es 26 y la suma de los tres últimos es 2106.

- A) 42 B) 216 C) 152
D) 162 E) 144

26. Se interpolan cuatro medios geométricos entre 160 y 5. Hallar la suma de los dos últimos términos de la progresión geométrica formada.

- A) 240 B) 200 C) 60
D) 35 E) 15

27. Calcular el límite de la suma.

$$S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \frac{31}{256} + \dots$$

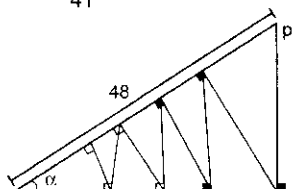
- A) 9/4 B) 8/3 C) 7/2
D) 6 E) 4
28. Calcular la suma límite:
- $$S = \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{3}{3^6} + \dots$$
- A) 9/2 B) 2/9 C) 80/81
D) 9/8 E) 7/4
29. En una PG no oscilante, el término de lugar 6a es $3k^2$ y el término de lugar 4b es 12, hallar el término de lugar: $3a + 2b$
- A) $2abk$ B) $3ab$ C) ab
D) $3k$ E) $6k$
30. Entre 2 y 162, entre 3 y 19 683 se han interpolado el mismo número de medios geométricos. Calcular la diferencia de las razones, sabiendo que la razón de la primera es $1/3$ de la razón de la segunda.
- A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10
31. Hallar el número de términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de sus "n" términos no varía al aumentar en 1 la razón y simultáneamente al disminuir en 30 su primer término.
- A) 30 B) 31 C) 60
D) 61 E) 59
32. Una persona nació en la segunda mitad del siglo pasado; en un año goza de la propiedad en la cual las cuatro cifras son tales que las tres diferencias formadas restando la primera cifra de la segunda, la segunda de la tercera y la tercera de la cuarta estén en PG. ¿Cuántos años cumplirá el 2006?
- A) 49 B) 54 C) 56
D) 57 E) 51
33. Si: $T_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$, hallar el valor de:
 $R = (T_{10} - T_9) + (T_8 - T_7) + (T_6 - T_5) + (T_4 - T_3) + (T_2 - T_1)$
- A) 57 B) 53 C) 51
D) 55 E) 59
34. En una serie geométrica de números naturales de razón $r > 1$, $r \in \mathbb{N}$, la suma de los n_0 primeros términos es 31, ($n_0 > 3$). Si a_0 es el primer término de la serie, calcular: $a_0 + n_0$
- A) 4 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9
35. Si los términos de lugar p; q y r de una PG son a; b; c, respectivamente, calcular: $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q}$
- A) 1/2 B) 1 C) 2
D) 3 E) abc
36. Dados los números x; y; z; w; se observa que los tres primeros están en PA y los tres últimos en PG, siendo la suma de los extremos 14 y la suma de los medios 12. Hallar "x".
- A) 3/4 B) 4/3 C) 1/2
D) 12 E) 18
37. Una progresión aritmética tiene la propiedad de que el producto de los 4 primeros términos es -15. Si el cociente del segundo entre el tercero es 3, ¿cuántos términos es preciso considerar para que su suma sea cero?
- A) 20 B) 18 C) 12
D) 9 E) 6
38. Al dividir el noveno término de una progresión aritmética por su segundo término, el cociente es 5, mientras que al dividir el término décimo tercero por su sexto término, el cociente es 2 y el resto 5. Hallar la suma de los 20 primeros términos de la progresión.
- A) 920 B) 820 C) 760
D) 680 E) F. D.
39. Dados los términos: $a_{m+n} = A$ y $a_{m-n} = B$ de una progresión geométrica (a_n). Hallar: a_m
- A) $\sqrt{A}$ B) $\sqrt{AB}$ C) $\sqrt{B^m}$
D) $\sqrt{A^m}$ E) AB
40. Sea la progresión aritmética: a; b; c; d. Si la suma de sus términos es n y la razón es 2n, calcular:
 $E = a^2 - d^2$
- A) $-3n^2$ B) $12n$ C) $6n^2$
D) $4n$ E) $-n^2$
41. En una sucesión de 5 números enteros consecutivos y positivos, la suma de los cuadrados de los 3 primeros es igual a la suma de los cuadrados de los 2 últimos, hallar el segundo término de la sucesión.
- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12
42. El primer término de una sucesión geométrica es igual a $x - 2$, el tercer término es igual a $x + 6$, y la media aritmética de los términos primero y tercero es el segundo término de la sucesión como 5 es a 3. Hallar el sexto término de la sucesión y dar como respuesta la suma de sus cifras.
- A) 6 B) 9 C) 18
D) 24 E) 23
43. Sea la progresión: 9; 18; 36; ...; hallar la suma de 2 términos consecutivos de esta progresión, cuyo producto es 41 472.
- A) 256 B) 432 C) 496
D) 512 E) 32

44. El primer y tercer término de una progresión aritmética son iguales al primer y tercer término de una progresión geométrica, respectivamente. El segundo y tercer término de la primera progresión están en la relación 5/9, además, la diferencia de los segundos términos de ambas progresiones es 6. Hallar la suma de ambas razones.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 9 E) 6

45. Del gráfico, hallar la suma de todas las longitudes de las perpendiculares que se proyectan ilimitadamente a partir del punto P.

Dato: $\sin \alpha = \frac{40}{41}$



A) 10 B) 20 C) 30
D) 50 E) 60

46. Asumiendo que S_{kn} es la suma de las kn primeros términos de una PA, calcular el valor de:

$$\frac{S_{9n}}{S_{5n} - S_{4n}}$$

A) 3 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

47. Dada la progresión aritmética creciente:

$$a_1; a_2; a_3; \dots; a_n$$

sabiendo que la suma de sus términos es S y que la suma de sus cuadrados es S_1^2 , su razón será:

A) $\sqrt{\frac{nS_1^2 - S^2}{n^2(n^2 - 1)}}$ B) $\sqrt{\frac{12(nS_1^2 - S^2)}{n^2(n^2 - 1)}}$
C) $\sqrt{\frac{2(nS_1^2 - S^2)}{n^2(n^2 - 1)}}$ D) $\sqrt{\frac{24(nS_1^2 - S^2)}{n^2(n^2 - 1)}}$
E) $\sqrt{\frac{6(nS_1^2 - S^2)}{n^2(n^2 - 1)}}$

48. Se tienen dos progresiones, una aritmética y otra geométrica, si se sabe que los primeros términos son iguales a 2 y además, el undécimo término de la progresión aritmética es igual al quinto término de la progresión geométrica. Indicar la suma de razones de ambas progresiones.

A) 2 B) 3 C) 5
D) 8 E) 6

49. Se tienen 8 números enteros no negativos en una progresión aritmética. Hallar el producto entre el pri-

mer término y la razón, sabiendo que la diferencia entre los extremos es múltiplo de 3 y el último es 25.

A) 6 B) 12 C) 15
D) 21 E) 18

50. Indicar la razón entre "x" e "y", de tal manera que el medio de lugar "r" entre "x" y "2y" sea el mismo que el medio de lugar "r" entre "2x" e "y". Habiendo "n" medios aritméticos interpolados en cada caso.

A) $\frac{1}{n-r}$ B) $\frac{n}{n+r-1}$ C) $\frac{1}{n+r-1}$
D) $\frac{r}{n+r-1}$ E) $\frac{r}{n+1-r}$

51. Indicar las raíces de la ecuación: $x^3 + px + q = 0$, si están en progresión aritmética ($p \neq 0$)

A) $-q; 0; q$ B) $-\sqrt{q}; 0; \sqrt{q}$
C) $-\sqrt{-p}; 0; \sqrt{-p}$ D) $\sqrt{p} - \sqrt{q}; \sqrt{p}; \sqrt{p} + \sqrt{q}$
E) $-\sqrt{p}; 0; \sqrt{p}$

52. En una PA de n términos, la suma de los $(n-1)$ primeros términos es n y la suma de los $(n-1)$ últimos términos es n^2 . Hallar la razón de dicha progresión.

A) n B) $n/2$ C) $n^2 - 3$
D) $n+3$ E) $2n-3$

53. El producto de los términos de lugar impar de una PG de número de términos impar es 65 536 y el producto de los de lugar par es 4096. Calcular el término central de la PG, más el número de términos de dicha PG.

Nota: Todos los términos de la PG son positivos.

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

54. La suma de n términos de una PA aumenta en 2490, si se consideran 15 términos más. Si el término de lugar $(n+10)$ es 180, hallar el término de lugar $(n-10)$.

A) 30 B) 20 C) 35
D) 40 E) 10

55. Entre 2 y 18 se interpolan, en forma separada

$\frac{a+b}{c}, \frac{a+c}{b} \wedge \frac{b+c}{a}$ términos, formando tres progresiones geométricas diferentes. Hallar el producto de las tres razones geométricas obtenidas.

Si: $a + b + c = n$

A) 9^n B) 3^n C) $\sqrt[3]{3}$
D) 9 E) 3

56. Si $(b - a)^{-1}$; $(2b)^{-1}$; $(b - c)^{-1}$ están en progresión aritmética, ¿en qué relación están a ; b y c ?
- A) En progresión geométrica
B) En progresión aritmética
C) En progresión armónica
D) Ninguna relación
E) Falta información
57. Los términos de lugares $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ y $(n-9)$ equidistan de los extremos y suman $(n+1)$, determine la suma de los n términos de que consta la progresión aritmética.
- A) 231 B) 250 C) 170
D) 190 E) 230
58. Sabiendo que tres números están en progresión geométrica, determine el producto de la suma de los tres, multiplicado por el primero menos el segundo aumentado con el tercero.
- A) 8
B) La suma de los productos binarios.
C) La suma de sus cuadrados.
D) El cuadrado de la suma.
E) El triple del cuadrado del primero.
59. Calcular el valor de $k/2$, en la progresión aritmética: $(k-1)$; $(k+3)$; $(3k-1)$
- A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 1
60. En una PG los términos de lugar 5 y 8 son $(2x)$ y $(6x)$, respectivamente. Hallar la razón.
- A) $\sqrt[3]{4}$ B) $\sqrt{8}$ C) $\sqrt[4]{12}$
D) $\sqrt[3]{3}$ E) 2
61. En una progresión geométrica existe un término que es igual a la razón. Hallar el lugar que ocupa este término en dicha progresión, si: $\log r = -1$ y $\log a = 7$; siendo r y a , la razón y el primer término, respectivamente.
- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5
62. La razón de una PG es 2, el número de términos es 11 y la suma de ellos es 2047. Hallar la suma de los extremos.
- A) 1035 B) 1025 C) 1015
D) 1010 E) 1045
63. Entre dos números cuya suma es $2\frac{1}{7}$ se interpola un número par de medios aritméticos; la suma de esos medios excede a su número de términos en una unidad. ¿Cuántos medios se han interpolado?
- A) 10 B) 14 C) 13
D) 15 E) 17
64. Dada la PA: $\dots; 5; \dots; 47; \dots; 159$, donde el número de términos que hay entre 47 y 159 es el triple del número de términos que hay entre 5 y 47. Hallar el número de términos.
- A) 17 B) 20 C) 23
D) 21 E) 19
65. Las edades de cuatro hermanos están en PG. Si cuando nació el menor, el mayor tenía 19 años y la diferencia de los dos es 6, hallar la edad del menor.
- A) 12 B) 11 C) 10 D) 8 E) 9
66. En una PA, el primer término es 20 y la suma de sus 10 primeros términos es 650. En otra PA, el primer término es 60 y su razón es 6. Sabiendo que estas progresiones coinciden en un término y en la misma posición, calcule dicho término.
- A) 100 B) 140 C) 110
D) 104 E) 120
67. Hallar la suma de los n primeros términos de la sucesión; e indicar su denominador.
- $1 \times 2; 2 \times 3; 3 \times 4; 4 \times 5; \dots$
- A) n B) 2 C) 5
D) 3 E) $n+1$
68. Hallar la razón de una progresión aritmética en la cual la suma de los n primeros términos es: $5n^2 + 7n$
- A) 3 B) 5 C) 8 D) 7 E) 10

CLAVES

1. B	10. C	19. C	28. D	37. E	46. C	55. D	64. C
2. A	11. D	20. C	29. E	38. B	47. B	56. A	65. D
3. C	12. B	21. E	30. C	39. B	48. C	57. A	66. E
4. B	13. C	22. A	31. D	40. A	49. B	58. C	67. D
5. D	14. C	23. A	32. E	41. D	50. E	59. A	68. E
6. E	15. D	24. C	33. D	42. B	51. C	60. D	
7. C	16. C	25. D	34. C	43. B	52. A	61. A	
8. A	17. E	26. A	35. B	44. B	53. C	62. B	
9. C	18. B	27. B	36. D	45. E	54. D	63. B	

Relaciones y Funciones

20

capítulo

Leonhard Paul Euler nació en Basilea (Suiza) el 15 de abril de 1707 y murió en San Petersburgo (Rusia) el 18 de septiembre de 1783. Fue un matemático y físico suizo, reconocido como el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos. Vivió en Rusia y Alemania la mayor parte de su vida y realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos. También introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como la noción de función matemática.

Euler introdujo y popularizó varias convenciones referentes a la notación en los escritos matemá-

ticos en sus numerosos y muy utilizados libros de texto. Posiblemente, lo más notable fue la introducción del concepto de función matemática, siendo el primero en escribir $f(x)$ para hacer referencia a la función f aplicada sobre el argumento x . También introdujo la notación moderna de las funciones trigonométricas, la letra «e» como base del logaritmo natural o neperiano (el número «e» es conocido también como el número de Euler), la letra griega Σ como símbolo de los sumatorios y la letra «i» para hacer referencia a la unidad imaginaria; además del uso de la letra griega π para hacer referencia al cociente entre la longitud de la circunferencia y la longitud de su diámetro.



Leonhard Euler

Suiza, 1707 - Rusia, 1783

Fuente: Wikipedia

DEFINICIONES PREVIAS

Producto cartesiano

Dados dos conjuntos no vacíos A y B , el producto cartesiano de ambos se denota por $A \times B$ y se define como el conjunto de pares ordenados, cuyo primer elemento pertenece al primer conjunto y el segundo elemento al segundo conjunto, así: $A \times B = \{(x; y) / x \in A \wedge y \in B\}$

Por ejemplo, sean los conjuntos: $A = \{1; 2\}$; $B = \{3; 4; 5\}$

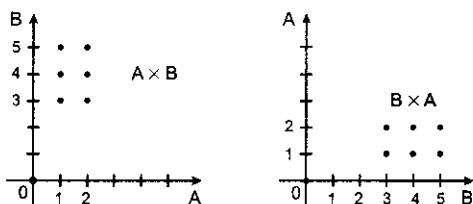
El producto cartesiano $A \times B$ será:

$$A \times B = \{(1; 3); (1; 4); (1; 5); (2; 3); (2; 4); (2; 5)\}$$

Como también, puede establecerse el producto cartesiano $B \times A$, y este será:

$$B \times A = \{(3; 1); (3; 2); (4; 1); (4; 2); (5; 1); (5; 2)\}$$

Graficándolos se tendrá:



De donde puede concluirse que: $A \times B \neq B \times A$

RELACIÓN

Dados dos conjuntos no vacíos A y B , se llama relación binaria de A en B a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$.

O sea: R es relación de A en $B \Leftrightarrow R \subset A \times B$

Determinación de una relación

Como una relación es un conjunto se determina por extensión o por comprensión.

Por extensión: nombrando cada uno de los pares de la relación.

Sea: $A = \{1; 2\}$; $B = \{3; 7\}$

Se sabe que: $A \times B = \{(1; 3); (1; 7); (2; 3); (2; 7)\}$ y como una relación de A en B es cualquier subconjunto de $A \times B$ y en este caso $A \times B$ tiene 2^4 subconjuntos (16 conjuntos), entonces es posible obtener 16 relaciones binarias diferentes de A en B . Veamos para el ejemplo mencionado.

$$R_1 = \emptyset$$

$$R_2 = \{(1; 3)\}$$

$$R_3 = \{(1; 3); (2; 7)\}$$

$$R_4 = \{(2; 3); (2; 7)\}$$

$$R_5 = A \times B$$

⋮

Nota

Si A tiene m elementos y B tiene n elementos, existirán $2^{m \cdot n}$ relaciones diferentes de A en B .

Por comprensión: expresando un enunciado abierto P , tal que para todo $(a; b) \in A \times B$; P sea una proposición, Si P es $V \Rightarrow (a; b) \in R$

Si P es $F \Rightarrow (a; b) \notin R$

Ejemplo:

Se tiene el conjunto formado por 5 automóviles de marcas $\{m_1; m_2; m_3; m_4; m_5\}$ y el conjunto formado por las cantidades de gasolina consumidas por cada automóvil en 100 km, que representaremos por: $\{C_1; C_2; C_3; C_4; C_5\}$, respectivamente. Definir por extensión la relación que hace corresponder a cada marca de automóvil la cantidad de gasolina consumida por el en 100 km.

Resolución:

El conjunto de pares que define la relación por extensión es: $\{(m_1; C_1); (m_2; C_2); (m_3; C_3); (m_4; C_4); (m_5; C_5)\}$.

Nota

A veces los dos conjuntos que están relacionados se confunden, es decir que se establecen relaciones o correspondencias entre elementos de un conjunto y elementos del mismo conjunto.

Ejemplo:

Dado un conjunto de personas, podemos hacer corresponder a cada persona del conjunto las personas del mismo que sean más altas que ella.

Resolución:

Supongamos que hay 5 personas, que ordenadas de la más pequeña a la más alta las representaremos por $P_1; P_2; P_3; P_4; P_5$. La relación definida queda determinada por extensión mediante el siguiente conjunto de pares:

$$\{(P_1; P_2); (P_1; P_3); (P_1; P_4); (P_1; P_5); (P_2; P_3); (P_2; P_4); (P_2; P_5); (P_3; P_4); (P_3; P_5); (P_4; P_5)\}$$

FUNCIÓN

Es un conjunto no vacío de pares ordenados $(x; y)$ formado por la correspondencia de dos conjuntos, tal que dos pares ordenados diferentes no pueden tener el mismo primer elemento; caso contrario el conjunto de pares ordenados representa a una relación.

Ejemplos:

$f = \{(2; 3); (4; 5); (5; 7)\}$ es una función.

$g = \{(2; 1); (3; 1); (4; 1)\}$ es una función.

$h = \{(1; 2); (2; 3); (3; 4); (1; 5)\}$ no es una función; es una relación porque existen dos pares ordenados distintos que tienen un mismo primer elemento.

$m = \{(3; 2); (3; 4); (3; 5)\}$ es una relación.

Por lo general, las funciones se denotan por letras tales como: $f; g; h; F; G; \dots$, etc.

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN

Al conjunto formado por los primeros elementos de los pares ordenados se les denomina **dominio** de la función.

ción y **rango** al conjunto que tiene como elementos las segundas componentes de los pares ordenados.

Por ejemplo: sea $f = \{(2; 3); (4; 7); (5; 9)\}$

El dominio de f denotado será: $\text{Dom}f = \{2; 4; 5\}$

El rango de f denotado será: $\text{Ran}f = \{3; 7; 9\}$

◀ FUNCIÓN DE VARIABLE REAL

Es una función que tiene la siguiente regla de correspondencia:

$$y = f(x) \text{ o } y = F(x)$$

en donde su dominio esté en $\mathbb{R}$ y su rango también esté formado por números reales.

Es necesario precisar que "x" representa la variable independiente y al conjunto de valores que puede tomar se le designará como el dominio de f ($\text{Dom}f$), a su vez "y" representa la variable dependiente y al conjunto de valores que puede tomar se le designará como el rango de f ($\text{Ran}f$).

Sea: $f = \{(x; y) / y = f(x)\}$

Donde: $y = f(x) \rightarrow$ regla de correspondencia

variable dependiente variable independiente

Además: $\text{Dom}f = \{x / y = f(x)\} \wedge \text{Ran}f = \{y / y = f(x)\}$

Ejemplos:

- Indicar cuáles de los siguientes conjuntos, representan una función:

$$A = \{(2; 3); (3; 3); (4; 3); (4; 5)\}$$

$$B = \{(2; 3); (2; 3); (2; 3); (3; 3)\}$$

$$C = \{(a; a^2) / a = -1; 0; 1; 2\}$$

$$D = \{(a^2; a) / a = -1; 0; 1; 2\}$$

Resolución:

El conjunto A no representa una función, ya que hay dos pares ordenados distintos que tienen igual primer elemento.

El conjunto B puede también escribirse:

$$B = \{(2; 3); (3; 3)\} \text{ es una función.}$$

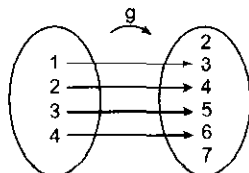
El conjunto C estará expresado por:

$$C = \{(-1; 1); (0; 0); (1; 1); (2; 4)\} \text{ es una función.}$$

El conjunto D puede escribirse:

$$D = \{(1; -1); (0; 0); (1; 1); (4; 2)\} \text{ no es una función.}$$

- Indicar la regla de correspondencia, el dominio y rango en:



Resolución:

Un elemento de B es igual a un elemento de A aumentado en 2. Se puede denotar:

$y = g(x) = x + 2 \Rightarrow$ regla de correspondencia
donde: $x \in A; y \in B$

Dominio: $\text{Dom}g = \{1; 2; 3; 4\}$

Rango: $\text{Ran}g = \{3; 4; 5; 6\}$

- Si $f(x) = x - 1$, donde $x = -1; 0; 1; 2; 3$, determinar:

I. El conjunto f

II. $\text{Dom}f \cap \text{Ran}f$

III. $f(0); f(1); f(5); f(7)$

IV. Gráfica del conjunto f

Resolución:

I. Sabemos que: $f(x) = x - 1$

luego: $y = f(x); y = x - 1$

como: $x = -1; 0; 1; 2; 3 \wedge y = -2; -1; 0; 1; 2$

además: $f = \{(x; y) / y = x - 1\}$

$\therefore f = \{(-1; -2); (0; -1); (1; 0); (2; 1); (3; 2)\}$

II. De lo anterior se deduce que:

$$\text{Dom}f = \{-1; 0; 1; 2; 3\}$$

$$\text{Ran}f = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

$$\therefore \text{Dom}f \cap \text{Ran}f = \{-1; 0; 1; 2\}$$

III. Como $f(x) = x - 1$, entonces:

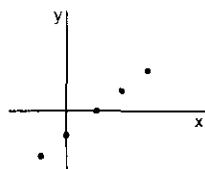
$$f(0) = -1$$

$$f(1) = 0$$

$$f(5) = 4 \text{ ya que 5 no se encuentra en el Dom}f$$

$$f(7) = 6$$

IV. La gráfica de f será:



- Dada la función:

$$f = \{(2; 6); (1; a - b); (1; 4); (2; a + b); (3; 4)\}$$

determinar a y b .

Resolución:

Para que sea función debe cumplirse:

$$a + b = 6 \quad \dots(1)$$

$$a - b = 4 \quad \dots(2)$$

Resolviendo (1) y (2): $a = 5 \wedge b = 1$

- Dada la función:

$$f = \{(2; 2); (4; 3); (2; |a + 1|); (4; |b - 1|); (5; \sqrt{a}); (6; \sqrt{2 - b})\}$$

determinar:

I. $a + b$

II. $\text{Dom}f \cap \text{Ran}f$

III. $\text{Dom}f - \text{Ran}f$

Resolución:

Para que sea función debe cumplirse:

$$|a + 1| = 2 \wedge |b - 1| = 3$$

Sabemos por definición que:

$$|x| = a \begin{cases} a > 0 \\ x = a \vee x = -a \end{cases}$$

Luego: $a + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$
 $a + 1 = -2 \Rightarrow a = -3$

(no es posible, no haría cumplir a los dos últimos pares)

También:

$|b - 1| = 3$, luego: $b - 1 = 3 \Rightarrow b = 4$

(no es posible, no haría cumplir el último par)

$\Rightarrow b - 1 = -3 \Rightarrow b = -2$

Como: $a \geq 0 \wedge b \leq 2 \Rightarrow a = 1; b = -2$

Luego $f = \{(2; 2); (4; 3); (5; 1); (6; 2)\}$

$\text{Dom}f = \{2; 4; 5; 6\}$

$\text{Ran}f = \{2; 3; 1\}$

I. $a + b = -1$

II. $\text{Dom}f \cap \text{Ran}f = \{2\}$

III. $\text{Dom}f - \text{Ran}f = \{4; 5; 6\}$

6. Hallar $\text{Dom}f - \text{Ran}f$, si f es una función y $a \in \mathbb{Z}$:

$f = \{(a + 1; 3); (a - 3; b - 1); (a + b; 7);$

$(\frac{1}{\sqrt{a-3}}, \frac{1}{\sqrt{5-a}})\}; (4; 0)\}$

Resolución:

Como $a \in \mathbb{Z}$, entonces: $a = 4$

Reemplazando se tendrá:

$f = \{(5; 3); (1; b - 1); (4 + b; 7); (1; 1); (4; 0)\}$

De donde también: $b - 1 = 1 \Rightarrow b = 2$

$\Rightarrow f = \{(5; 3); (1; b - 1); (4 + b; 7); (1; 1); (4; 0)\}$

Luego: $\text{Dom}f = \{5; 1; 6; 4\}$

$\text{Ran}f = \{3; 1; 7; 0\}$

$\therefore \text{Dom}f - \text{Ran}f = \{5; 6; 4\}$

7. Si el $\text{Dom}f \in [-3; 2]$, determinar el rango de la función: $f(x) = 2 - 3x$

Resolución:

Si $\text{Dom}f \in [-3; 2]$, implica que: $-3 \leq x \leq 2 \dots (1)$

Además: $y = f(x)$; luego: $y = 2 - 3x$

En (1): $9 \geq -3x \geq -6$

$11 \geq 2 - 3x \geq -4 \vee -4 \leq 2 - 3x \leq 11$

Es decir: $-4 \leq y \leq 11 \therefore \text{Ran}f \in [-4; 11]$

8. Si $\text{Dom}f = [-3; 2]$, hallar el conjunto solución para el rango de la función: $f(x) = x^2 + 1$

Resolución:

Si $\text{Dom}f = [-3; 2] \Rightarrow -3 \leq x \leq 2 \dots (1)$

Pero: $y = x^2 + 1$

Analizando, la variación de x es:



Pero, la de x^2 es: $0 \leq x^2 \leq 9$



En (1): $0 \leq x^2 \leq 9 \Rightarrow 1 \leq x^2 + 1 \leq 10$

Luego: $1 \leq y \leq 10 \therefore \text{Ran}f = [1; 10]$

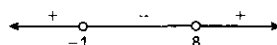
9. Hallar el dominio de: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 7x - 8}}$

Resolución:

Para que $f(x)$ tenga existencia en $\mathbb{R}$ debe tenerse en cuenta que:

$x^2 - 7x - 8 \geq 0 \vee (x - 8)(x + 1) > 0$

Utilizando el criterio de los puntos críticos, se tendrá:



$\therefore \text{Dom}f = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 8; +\infty \rangle$

o también: $\text{Dom}f = \mathbb{R} - [-1; 8]$

10. Hallar el dominio y el rango de: $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

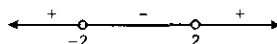
Resolución:

Sea: $y = \sqrt{4 - x^2}$

De donde, para que tenga existencia en $\mathbb{R}$: $4 - x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 - 4 \leq 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 2) \leq 0$

Por el criterio de los puntos críticos:



$\Rightarrow \text{Dom}f = [-2; 2]$, quiere decir: $-2 \leq x \leq 2$

Haciendo el análisis para x^2 , se tendrá:

$0 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 0 \geq -x^2 \geq -4 \Rightarrow 4 \geq 4 - x^2 \geq 0$

Es decir: $2 \geq (4 - x^2)^{1/2} \geq 0 \Rightarrow 0 \leq y \leq 2$

$\Rightarrow \text{Ran}f = [0; 2]$

11. Hallar el dominio de: $f(x) = \frac{1}{x-2} + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$

Resolución:

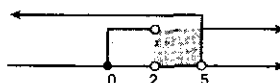
De la expresión puede observarse que en el primer

sumando: $x \in \mathbb{R} - \{2\} \dots (1)$

El segundo sumando: $x \geq 0 \dots (2)$

El tercer sumando: $x < 5 \dots (3)$

De (1), (2) y (3):



Donde: $\text{Dom}f = [0; 2) \cup (2; 5)$

o también: $\text{Dom}f = [0; 5) - \{2\}$

12. Hallar el dominio y rango de: $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$

Resolución:

Como el dominio está representado por el conjunto de los valores que puede tomar x , entonces:

$\text{Dom}f = \mathbb{R} - \{2\}$

Para determinar el rango: $y = \frac{x+1}{x-2}$

Despejando x : $x = \frac{1+2y}{y-1} \therefore \text{Ran}f = \mathbb{R} - \{1\}$

13. Hallar el dominio y el rango de:

$f(x) = \frac{x^5 - 5x^4 + 8x^3}{x(x-2)(x-3)}$

Resolución:

Factorizando el numerador:

$$f(x) = \frac{x^3(x^2 - 5x + 6)}{x(x-2)(x+3)} = \frac{x^3(x-2)(x-3)}{x(x-2)(x+3)} = x^2$$

 Donde: $x \neq 0; 2; 3$

 Luego: $f(x) = x^2$
 $\therefore \text{Dom}f = \mathbb{R} - \{0; 2; 3\} \wedge \text{Ran}f = \mathbb{R}^+$

14. Hallar el dominio, rango y además graficar:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

Resolución:

 Sabemos que: $\sqrt{x^2} = |x|$

$$\text{Luego: } f(x) = \frac{x}{|x|} + \frac{|x|}{x}; (x \neq 0)$$

Aquí existen dos posibilidades:

- Si $x > 0 \Rightarrow |x| = x$

Reemplazando en la función original:

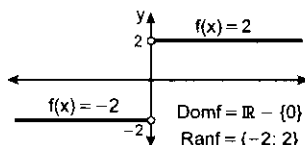
$$f(x) = \frac{x}{x} + \frac{x}{x} = f(x) = 2$$

- Si $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

Reemplazando:

$$f(x) = \frac{x}{-x} + \frac{-x}{x} \Rightarrow f(x) = -2$$

Graficando:



< FUNCIONES ESPECIALES Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA

La correspondencia entre el conjunto de elementos del dominio y el conjunto de elementos del rango, puesto que el rango de cada par ordenado corresponde o es determinado por el dominio, se puede ilustrar por medio de:

1. Sistema de coordenadas cartesianas en el plano.
2. Dos rectas numéricas paralelas (para cada función), una que representa el dominio y otra el rango.
3. Por los diagramas de Venn-Euler.
4. Por cualquier otra forma de representación que se pueda intuir.

Es decir, el conjunto de pares ordenados de una función real de variable real, pueden considerarse como las coordenadas cartesianas de un punto en el plano. El conjunto de dichos puntos es la gráfica de la función.

Como a cada elemento del $\text{Dom}f$ le corresponde un solo elemento del $\text{Ran}f$, la gráfica cartesiana de una función es cortada a lo más en un punto, por cualquier recta perpendicular al eje de las abscisas.

Función polinomial de grado n

Si: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ es un polinomio de grado n , donde n es un entero no negativo. Entonces:

$G = \{(x; y) / y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n\}$ es una función polinomial de grado n , cuya regla de correspondencia está dada por:

$$G(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

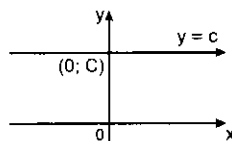
Función constante

Es una función polinomial de grado cero, esto es:

$$C = \{(x; y) / y = C_0x^0\} \vee C = \{(x; y) / y = C\}$$

Donde: $C(x) = C \vee C \in \mathbb{R}$

$\text{Dom}C = \mathbb{R}; \text{Ran}C = C$



Su gráfica es una recta paralela al eje x , intersectando al eje y en el punto $(0; C)$.

Función lineal

Es una función polinomial de grado 1, definido por:

$$f(x) = ax + b$$

Donde: $a; b \in \mathbb{R}; (a \neq 0)$

La gráfica de esta función es una línea recta (de ahí el nombre de función lineal).

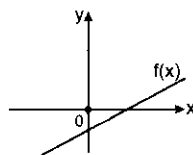
Por ejemplo: hallar la gráfica, el dominio y el rango de la función: $f(x) = 2x - 5$

Resolución:

Hagamos una pequeña tabla de valores:

x	2	3
$f(x)$	-1	1

Ubicando los puntos en el plano cartesiano:



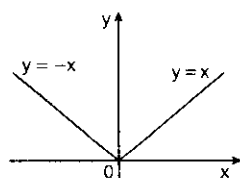
Donde: $\text{Dom}f = \mathbb{R}$
 $\text{Ran}f = \mathbb{R}$

Conclusión. Todas las funciones de la forma $y = ax + b$; con $a \neq 0$, tiene como dominio y rango a todo el conjunto de los $\mathbb{R}$. Su representación gráfica es una recta, que se traza por dos de sus puntos que se hallan dando dos valores arbitrarios a " x ", y encontrando los correspondientes a " y ".

Función valor absoluto

Es aquella función cuyo dominio es el conjunto de los números reales y cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{si: } x \geq 0 \\ -x, & \text{si: } x < 0 \end{cases}$$



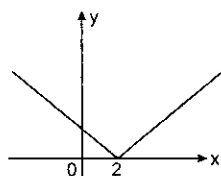
Su gráfica es la función de dos rectas simétricas respecto al eje y .

Por ejemplo: graficar $y = |x - 2|$

Resolución:

Tabulando:

x	y
0	2
1	1
2	0
3	1
$\vdots$	$\vdots$



Conclusión. El dominio de la función valor absoluto es todo el conjunto de los números reales.

El rango es el conjunto de los números reales positivos o nulos.

Función cuadrática

Es una función polinomial de grado 2, definida en el conjunto de los reales; cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

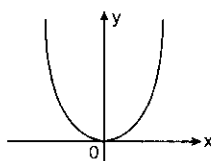
Donde: $a \neq 0$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$

La gráfica de una función cuadrática es una parábola cuyas ramas se abren hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo en caso contrario.

Ejemplos:

1. Graficar: $y = f(x) = x^2$

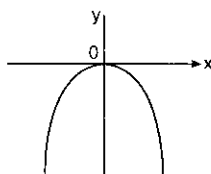
x	y
0	0
1	1
2	4
-2	4
-1	1



$$\therefore \text{Dom}f = \mathbb{R} \wedge \text{Ran}f = \mathbb{R}^+$$

2. Graficar: $y = f(x) = -x^2$

x	y
0	0
1	-1
-1	-1
2	-4
-2	-4



$$\therefore \text{Dom}f = \mathbb{R} \wedge \text{Ran}f = \mathbb{R}^-$$

Conclusiones. El dominio de todas las funciones es $\mathbb{R}$. El rango es el conjunto de los números reales positivos o nulos si $a > 0$ y el conjunto de los reales negativos o nulos si $a < 0$.

El punto más alto o más bajo se llama vértice de la parábola.

Comentarios. Si $a > 0$ el vértice es el punto más bajo y la curva tiene la forma de un puente colgante.

Si $a < 0$ el vértice es el punto más alto y la curva tiene la forma del arco iris (cuando el sol está por ocultarse). La trayectoria de la bala de un fusil tiene esta forma parabólica.

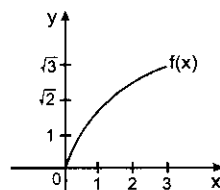
Función raíz cuadrada

Es una función definida por: $f(x) = \sqrt{x}$; donde: $x \geq 0$.

Donde $\sqrt{x}$ es un número no negativo cuyo cuadrado es x , esto es $y^2 = x$, que es la ecuación de una parábola cuyas segundas coordenadas son mayores o iguales que cero.

Por ejemplo: graficar $f(x) = \sqrt{x}$

x	$f(x)$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$



$$\text{Donde: } \text{Dom} = \mathbb{R}^+ \wedge \text{Ran}f = \mathbb{R}^+$$

Función máximo entero

Denotado por $\llbracket x \rrbracket$ y definida por:

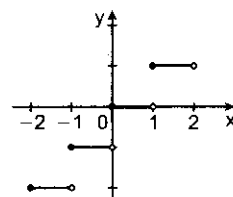
$$f(x) = \llbracket x \rrbracket = n; \text{ si: } n \leq x < n + 1$$

Donde n es un entero, $\llbracket x \rrbracket$ es el máximo entero no mayor que x .

La gráfica de la función máximo entero es como se muestra:

$$f(x) = \llbracket x \rrbracket = \begin{cases} -2, & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ -1, & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2, & \text{si } 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

De donde se aprecia que:



$$\begin{aligned} \text{Dom}f &= \mathbb{R} \\ \text{Ran}f &= \mathbb{Z} \end{aligned}$$

◀ GRÁFICA DE FUNCIONES DE FORMAS ESPECIALES

Por lo visto anteriormente, las funciones especiales tienen la forma $y = f(x)$, definiremos ahora a una función de forma especial de la forma siguiente:

$$y = f(x - a) + b$$

Para graficarlas, deberá tenerse en cuenta las siguientes reglas o pasos a seguir:

Desplazamiento horizontal

Si: $a > 0$, hacia la derecha

Si: $a < 0$, hacia la izquierda

Si: $a = 0$, no hay desplazamiento

Desplazamiento vertical

Si: $b > 0$, hacia arriba

Si: $b < 0$, hacia abajo

Si: $b = 0$, no hay desplazamiento

Ejemplos:

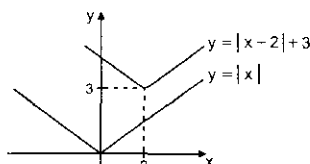
1. Graficar: $y = |x - 2| + 3$

Resolución:

Una forma práctica para esbozar la gráfica es:

- Eliminando las constantes y graficar la función referencial.
- Luego analizando el comportamiento de las constantes, nos indicará el desplazamiento horizontal o vertical.

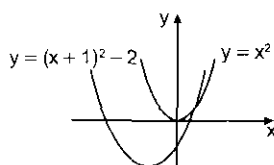
$$\begin{aligned} y &= |x - 2| + 3 & a &= 2 \\ y &= |x - a| + b & b &= 3 \end{aligned}$$



2. Graficar: $y = (x + 1)^2 - 2$

Resolución:

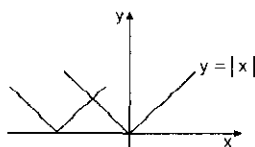
$$\begin{aligned} \text{Comparando: } y &= (x + 1)^2 - 2 & a &= -1 \\ y &= (x - a)^2 + b & b &= -2 \end{aligned}$$



3. Graficar: $y = |x + 3|$

Resolución:

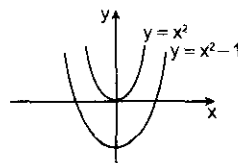
$$\begin{aligned} \text{Comparando: } y &= x + 3 & a &= -3 \\ y &= x - a + b & b &= 0 \end{aligned}$$



4. Graficar: $y = x^2 - 1$

Resolución:

$$\begin{aligned} \text{Comparando: } y &= x^2 - 1 & a &= 0 \\ y &= (x - a)^2 + b & b &= -1 \end{aligned}$$



5. Graficar: $y = |x^2 - 3|$

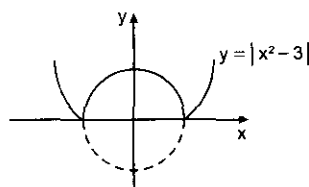
Resolución:

Aquí existen dos funciones, entonces primero analizamos $f(x) = x^2 - 3$, luego se toma el valor absoluto $||$.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 3 & a &= 0 \\ y &= (x - a)^2 + b & b &= -3 \end{aligned}$$

Como $y = x^2 - 3$ describe una parábola con vértice en -3 , al tomar el valor absoluto:

$y = |x^2 - 3|$ tendremos:

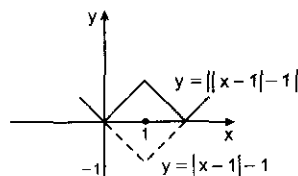


6. Graficar: $y = ||x - 1| - 1|$

Resolución:

Primero analicemos para: $|x - 1| - 1$

Sea: $f(x) = |x - 1| - 1 \Rightarrow a = 1 \wedge b = -1$



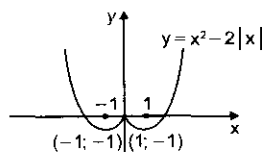
7. Graficar: $y = x^2 - 2|x|$

Resolución:

$$\text{Si } x > 0 \Rightarrow y = x^2 - 2x \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 1$$

$$\text{Si } x < 0 \Rightarrow y = x^2 - 2(-x) \Rightarrow y = (x + 1)^2 - 1$$

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = 0$$



TIPOS DE FUNCIONES: INYECTIVA, SURVECTIVA, BIYECTIVA

Función inyectiva

Si los pares ordenados diferentes que lo forman no tienen segundas componentes iguales.

Sea $f: A \rightarrow B$

O sea: si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

Si aplicamos el principio lógico de transposición, la función inyectiva se puede definir por:

f es inyectiva, si: $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}f, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Función suryectiva

Si $\text{Ran}f = B$

Función biyectiva

Si f es inyectiva y suryectiva a la vez:

Ejemplos:

- Sean $A = \{2; 3; 5\} \wedge B = \{7; 9; 4; 6\}$

La función $f = \{(2; 7); (3; 9); (5; 4)\}$

¿será inyectiva o suryectiva?

Resolución:

Es inyectiva, porque todos sus pares ordenados tienen segundas componentes diferentes.

No es suryectiva por que $\text{Ran}f = \{7; 9; 4\}$ es diferente del conjunto de llegada B .

$\therefore$ No es suryectiva.

- Indicar si la función

$f = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / y = 2x + 3\}$ es biyectiva,

Resolución:

- Sea: $f(a) = f(b) \Rightarrow 2a + 3 = 2b + 3 \Rightarrow a = b$

Luego: si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

$\Rightarrow f$ es inyectiva.

- $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

Pero: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$, tal que: $y = 2x + 3$ y como $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces el $\text{Ran}f$ es igual al conjunto de llegada.

$\Rightarrow f$ es suryectiva.

- Sea: $f(x) = x^2; f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

demostrar que no es inyectiva y suryectiva.

Resolución:

- Sea $f(a) = f(b) \Rightarrow a^2 = b^2 \Rightarrow (a = b \vee a = -b)$

Como $a \neq b$, entonces, f no es inyectiva.

- $\text{Ran}f = \mathbb{R}^+$, esto es: $\mathbb{R}^+ = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$

o sea: $\text{Ran}f \neq \mathbb{R}$

$\therefore f$ no es suryectiva

OPERACIONES CON FUNCIONES

Dadas f y g funciones con $\text{Dom}f$ y $\text{Ran}f$; $\text{Dom}g$ y $\text{Ran}g$, respectivamente, denotamos y definimos lo siguiente:

- Suma y resta de f y g : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$;

$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$

- Producto de f y g : $(fg)(x) = f(x)g(x)$;

$\text{Dom}(fg) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$

- Cociente f por g : $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$;

$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (\text{Dom}f \cap \text{Dom}g) - \{g(x) = 0\}$

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Sean las funciones $f: A \rightarrow B \wedge g: B \rightarrow C$ que abreviadamente escribiremos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

A cada elemento $x \in A$, la función f le asigna un elemento $f(x) \in B$ y como B es el dominio de g , resulta que a este elemento $f(x) \in B$ la función g le asigna un elemento $g(f(x)) \in C$.

Esto nos permite definir una nueva función, que llamaremos **g compuesta con f** de la siguiente manera.

A cada $x \in A$, le asignamos el elemento $g(f(x)) \in C$

A la función **g compuesta con f** la denotaremos por

$g \circ f$ y en forma simbólica quedara definidos por:

$f \circ g = (x; y) / y = g(f(x)); x \in \text{Dom}f$

Es decir, si: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$
 $a \xrightarrow{f} f(a) \xrightarrow{g} g(f(a))$

Por ejemplo: sea $f(x) = x + 1 \wedge g(x) = \frac{1}{x^2}$

Determinar: $f \circ g$ y $g \circ f$

Primero veamos: $\text{Dom}f = \mathbb{R}$

$\text{Dom}g = \mathbb{R} - \{0\}$

Luego: $(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} + 1$

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \text{Dom}g / g(x) \in \text{Dom}f\}$

$\text{Dom}(f \circ g) = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} / \frac{1}{x^2} \in \mathbb{R}\}$

$\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R} - \{0\}$

También: $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = \frac{1}{(x + 1)^2}$

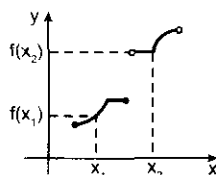
$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \text{Dom}f / f(x) \in \text{Dom}g\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x + 1 \in \mathbb{R} - \{0\}\}$

$\text{Dom}(g \circ f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

FUNCIONES MONÓTONAS CRECIENTES Y DECRECIENTES

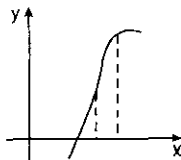
- Una función f se llama **no decreciente**, si para $x_1, x_2 \in \text{Dom}f$:



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

Por ejemplo: función máximo entero.

- Una función f se llama **creciente** (o estrictamente creciente), si para $x_1, x_2 \in \text{Dom}f$:



$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Por ejemplo: $f(x) = 2x^2 - 1$

- Una función f se llama **no creciente**, si para $x_1, x_2 \in \text{Dom} f \Rightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
Su gráfica baja o se mantiene constante pero no sube, conforme x va de izquierda a derecha.
- Una función f se llama **decreciente** (o estrictamente decreciente) si para $x_1, x_2 \in \text{Dom} f$.
 $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Una función f se llama **monótona** si es que f corresponde a algunos de los cuatro tipos antes mencionados.

Teorema

Si una función f es creciente (decreciente), entonces f es univalente (inyectiva).

FUNCIÓN INVERSA

Se denota por f^{-1} o f^* (tomaremos el segundo por prestarse a menos confusiones con otras notaciones matemáticas) definida por:

$$f^* = \{(f(x), x) / x \in \text{Dom} f\}$$

Esto es que el dominio de f^* es el rango de f y el rango de f^* es el dominio de f .

Es condición necesaria la univalencia o inyectividad para hallar la inversa de la función; debido a que si existen dos pares ordenados de f que tienen un mismo segundo elemento, luego de intercambiar los primeros con los segundos elementos, habría pares ordenados con el mismo primer elemento, y por lo tanto los pares invertidos ya no construirán una función.

Ejemplos:

- Sean las funciones:
 $f = \{(-2; 5); (-1; 3); (0; 1); (1; -1); (2; -3)\}$
 $g = \{(-2; 3); (-1; 0); (1; 3); (3; 5)\}$
hallar la función inversa en cada caso, si existe.

Resolución:

En el primer caso, obsérvese que ninguna de las segundas componentes se repite, entonces; su inversa será:

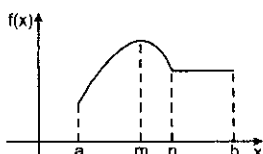
$$f^* = \{(5; -2); (3; -1); (1; 0); (-1; 1); (-3; 2)\}$$

Para la función g , notar que existen dos pares ordenados diferentes que tienen igual segunda componente, entonces no tendrá función inversa.

Obsérvese: $g = \{(3; -2); (0; 1); (3; 1); (5; 3)\}$

Regla: una función tendrá inversa si y solo si no se repite la segunda componente.

- Analizar la monotonía de la función:



Resolución:

Analizando por tramos:

En el intervalo: $[a; m)$ es estrictamente creciente

$[m; n)$ es estrictamente decreciente

$[n; b]$ es constante

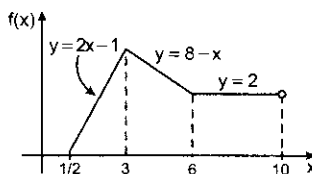
Luego, es continua en el intervalo $[a; b]$

- Analizar la monotonía de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1; & 1/2 < x \leq 3 \\ 8 - x; & 3 < x \leq 6 \\ 2; & 6 < x < 10 \end{cases}$$

Resolución:

Graficando se tiene:



En el intervalo: $(1/2; 3]$ es creciente

En el intervalo: $(3; 6]$ es decreciente

En el intervalo: $(6; 10)$ es constante

$\therefore$ Es continua en el intervalo $(1/2; 10)$

- Calcular a y b , si f es una función continua, donde:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 3; & \text{si: } x < 2 \\ 4x + 5; & \text{si: } 2 \leq x < 7 \\ 2x + b; & \text{si: } x \geq 7 \end{cases}$$

Resolución:

Por ser continua, la función puede evaluarse en los siguientes puntos:

Evaluando a la función en $x = 2$, se tiene:

$$2(a) + 3 = 4(2) + 5 \Rightarrow a = 5$$

$$\text{Luego, en } x = 7: 4(7) + 5 = 2(7) + b \Rightarrow b = 19$$

$$\therefore a = 5 \wedge b = 19$$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Dado un número real " a ", tal que: $0 < a \neq 1$; se llama función exponencial de base " a " a la función que asocia a cada x real el número a^x $y = f(x) = a^x$

Ejemplos:

$$\bullet f(x) = 2^x \quad \bullet g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

- El dominio de esta función es todos los reales, es decir: $\text{Dom} f = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

- Por propiedad, si $x \in \mathbb{R}$ y $a > 0$
entonces: $a^x > 0$; por tanto, el rango es: $\text{Ran} f = (0; +\infty)$

GRÁFICA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

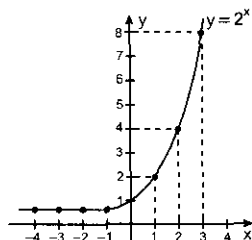
Caso I. Si: $a > 1$

Ejemplos:

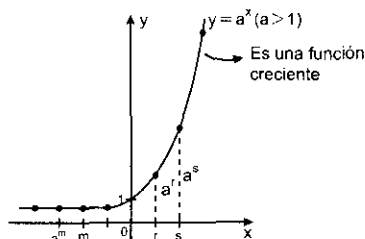
$$\bullet f(x) = 2^x \quad \bullet g(x) = 3^x$$

Graficamos: $y = f(x) = 2^x$

x	y = 2 ^x
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	8



En general, si $a > 1$, la gráfica tiene la forma siguiente:



✓ Propiedades

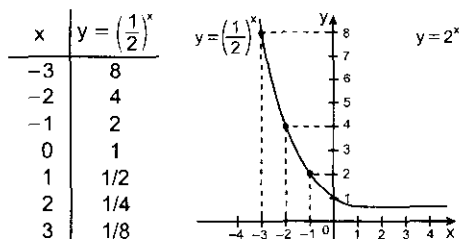
1. $f(0) = a^0 = 1$, es decir, el par ordenado $(0; 1)$ pertenece a la función.
2. Si $r < s$, entonces $a^r < a^s$, o si $s > r$, entonces $a^s > a^r$.
3. Si $r < 0$, entonces $a^r < 1$.
4. Si $m < 0$, entonces $a^m < 1$.

Caso II. Si: $0 < a < 1$

Ejemplos:

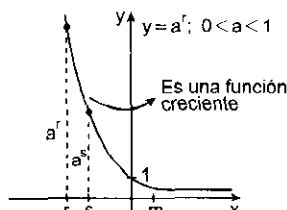
$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x} \quad \cdot \quad g(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x$$

Graficamos: $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$



En general, si: $0 < a < 1$

La gráfica tiene la forma siguiente:



✓ Propiedades

1. $f(0) = a^0 = 1$, es decir, el par ordenado $(0; 1)$ pertenece a la función.
2. Si $r < s$, entonces $a^r > a^s$, o si $s > r$, entonces $a^s < a^r$.
3. Si $r < s$, entonces $a^r > 1$.
4. Si $m > s$, entonces $a^m < 1$.

◀ FUNCIÓN EXPONENCIAL DE BASE e

La función $y = e^x$, donde "e" es número irracional trascendente juega un rol muy importante en las matemáticas.

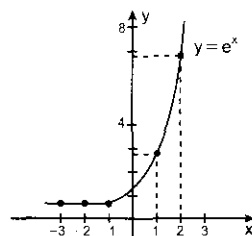
- Las aproximaciones del número "e" se pueden determinar con la expresión:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

- El valor de "e" con siete decimales de aproximación es: $e = 2,7182818\dots$

La gráfica de $y = e^x$ es:

x	y = e ^x
-3	0,05
-2	0,14
-1	0,37
0	1
1	2,72
2	7,39
3	20,09



◀ INECUACIONES EXPONENCIALES

Son aquellas inecuaciones cuya incógnita se encuentra en el exponente y sus criterios de solución son:

- I. En toda desigualdad, si las bases son iguales y mayor que la unidad, al comparar los exponentes, el signo de la desigualdad no se invierte, es decir:

	Si la base es mayor que la unidad ($a > 1$), se cumple:
1.º	$a^{P(x)} > a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) > Q(x)$
2.º	$a^{P(x)} \geq a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) \geq Q(x)$
3.º	$a^{P(x)} < a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) < Q(x)$
4.º	$a^{P(x)} \leq a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) \leq Q(x)$

- II. En toda desigualdad si las bases son iguales y su valor está comprendido entre cero y uno ($0 < \text{base} < 1$) al comparar los exponentes, el signo de la desigualdad se invierte, es decir:

	Si la base está comprendida entre cero y la unidad ($0 < a < 1$), se cumple:
1.º	$a^{P(x)} > a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) < Q(x)$
2.º	$a^{P(x)} \geq a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) \leq Q(x)$
3.º	$a^{P(x)} < a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) > Q(x)$
4.º	$a^{P(x)} \leq a^{Q(x)} \Rightarrow P(x) \geq Q(x)$

Por ejemplo, resolver:

$$x+6\sqrt{(0,5)^{x-6}} \leq x+6\sqrt{(0,5)^{x-6}}$$

Transformando los radicales a exponentes fraccionarios, se tiene:

$$(0,5)^{\frac{x+6}{x-6}} \leq (0,5)^{\frac{x-6}{x+6}}$$

Como la base está comprendido entre cero y la unidad, al comparar los exponentes, el signo de la desigualdad varía, es decir:

$$\frac{x+6}{x-6} \geq \frac{x-6}{x+6}$$

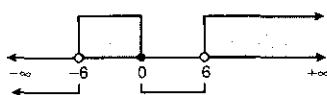
Como el segundo miembro debe ser cero:

$$\frac{x+6}{x-6} - \frac{x-6}{x+6} \geq 0$$

Efectuando las operaciones indicadas, se obtiene:

$$\frac{x}{(x+6)(x-6)} \geq 0 \Rightarrow \text{PC} \begin{cases} N \{x = 0\} \\ D \{x = 6\} \\ x = -6 \end{cases}$$

Graficando en la recta real:



$$\therefore x \in (-6, 0] \cup (6, \infty)$$

◀ FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Dado un número real b ($0 < b \neq 1$), llamamos función logarítmica de base b a la función de f de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, que asocia a cada x el número de $\log_b x$.

En símbolos: $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \log_b x$

Ejemplos:

$$\bullet f(x) = \log_2 x \quad \bullet g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Observaciones

- $y = \log_b x \Leftrightarrow x = b^y$
De donde concluimos que las funciones exponenciales y logarítmicas son inversas una de la otra.
- Para la función: $y = f(x) = \log_b x$
 Dominio = Domf = $(0; +\infty) \Rightarrow x > 0$
 Rango = Ranf = $\mathbb{R} \Rightarrow y = \log_b x \in \mathbb{R}$

◀ GRÁFICA DE LA FUNCIÓN LOGARÍTMICA

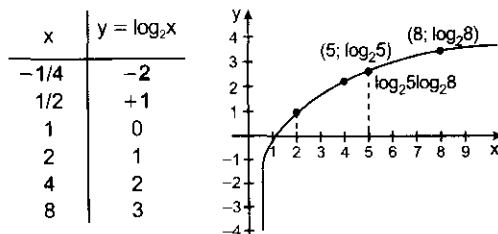
Caso I. Si: $b > 1$

Ejemplos:

$$\bullet f(x) = \log_2 x \quad \bullet g(x) = \log x$$

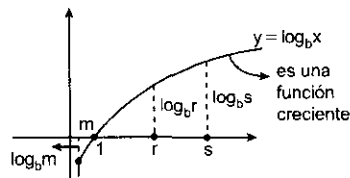
$$\bullet b(x) = \log_4 x \quad \bullet p(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

Graficamos: $y = f(x) = \log_2 x$



Notar que: $5 < 8$ y $\log_2 5 < \log_2 8$

En general: si $b > 1$, la gráfica tiene la forma siguiente:



✓ Propiedades

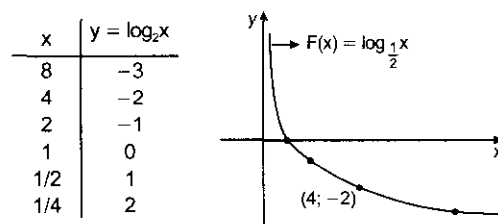
- $f(1) = \log_b 1 = 0$, es decir, el par ordenado $(1; 0)$ pertenece a la función.
- Si: $r < s$, entonces $\log_b r < \log_b s$
- Si: $r > 1$, entonces $\log_b r > 0$
- Si: $0 < m < 1$, entonces $\log_b m < 0$

Caso II. Si: $0 < b < 1$

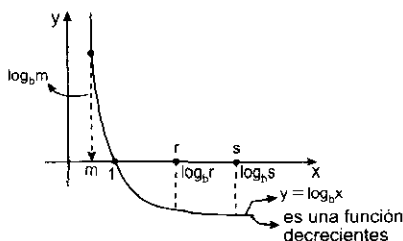
Ejemplos:

$$\bullet f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x \quad \bullet g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$$

Graficamos: $y = f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$



En general: si $0 < b < 1$, la gráfica tiene la forma siguiente:



✓ Propiedades

1. $f(1) = \log_b 1 = 0$, es decir, el par ordenado $(1; 0)$ pertenece a la función.
2. Si: $r < s$, entonces $\log_b r > \log_b s$
3. Si: $r > 1$, entonces $\log_b r < 0$
4. Si: $0 < m < 1$, entonces $\log_b m < 0$

Ejemplos

1. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = 13\left(\frac{x}{16x^2 + 9}\right) + 12\left(\frac{1}{16x + 9x^{-1}}\right)$
hallar un valor de $m > 0$ para $f(x)$, tal que $|f(x)| \leq M$
 $\forall x \in \text{Dom}f$.

Resolución:

$$\text{Dom}f = \mathbb{R}, \text{ con } f(x) = y = \frac{25x}{16x^2 + 9}$$

$$\Rightarrow 16x^2y + 9y - 25x = 0 \text{ (cuadrática en } x\text{)}$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{(25)^2 - 4(16y)(9y)}}{32y} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 4(16y)(9y)}}{32y}$$

$$\Rightarrow 625 - 64(9)y^2 \geq 0 \Rightarrow y^2 \leq \frac{625}{9 \times 64}$$

$$|y| \leq \frac{25}{48} \Rightarrow M = \frac{25}{48}$$

2. Hallar fog, si: $f = \sqrt{4+x}$, $x \in [0; 6]$
 $g = x^2 + 2$, $x \in [-1; 3]$

Resolución:

$$\text{Dom}(fog) = -1 \leq x \leq 3 \cap 0 \leq x^2 + 2 \leq 6$$

$$-1 \leq x \leq 3 \wedge -2 \leq x \leq 2$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(fog) = -1 \leq x \leq 2$$

$$fog = f(g(x)) = f(x^2 + 2) = \sqrt{4 + x^2 + 2}$$

$$fog = \sqrt{x^2 + 6}; \text{ Dom}(fog) = -1 \leq x \leq 2$$

3. Resolver: $5^{2x-3} - 25^{-x+2} \geq 0$

Resolución:

Expresando la inecuación convenientemente, se

$$\text{tendría: } 5^{2x-3} \geq 25^{-x+2}$$

$$5^{2x-3} \geq 25^{-2x+4}$$

Como la base es mayor que la unidad, se cumple que:



$$2x - 3 \geq -2x + 4 \Rightarrow 4x \geq 7 \Rightarrow x \geq 7/4$$

$$\therefore x \in \left[\frac{7}{4}; +\infty\right)$$

4. Determinar si las siguientes funciones son pares o impares:

I. $f(x) = \left(x|x| - \frac{1}{x}\right)\text{sen}(x^4)$

II. $g(x) = x^4$

III. $h(x) = \frac{1}{x}(|2x| - |x+2|)$

Resolución:

I. $f(x)$ es impar, pues:

$$f(-x) = \left((-x)|x| + \frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad \forall x \in \text{Dom}f$$

II. $g(x)$ es par pues: $g(-x) = (-x)^4 = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

III. $h(x)$ no es par ni impar, pues:

$$h(-x) = -\frac{1}{x}(|2x| - |-x+2|) \neq -h(x) \neq h(x)$$

5. Resolver: $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-3|} < \frac{1}{8}$

Resolución:

Colocando en base $\left(\frac{1}{2}\right)$, se tendría: $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-3|} < \left(\frac{1}{2}\right)^3$

Como la base está comprendida entre cero y la unidad: $|x-3| > 3$

Recordemos que:

$$|a| > b \Leftrightarrow a < -b \vee a > b$$

$$\Rightarrow x - 3 < -3 \quad \vee \quad x - 3 > 3$$

$$x < 0 \quad \vee \quad x > 6$$

Gráficamente:



$$\therefore x \in \langle -\infty; 0 \rangle \cup \langle 6; \infty \rangle$$

6. Si: $f(x) = 2\sqrt{x}$; $x > 0$; $g(x) = 16x^2$; $\text{gofoh} = 128\sqrt{4x^2 - 1}$

Además: $h(1) + h(2) = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $b > a$

Calcular $5a + b$

Resolución:

$$\text{gofoh} = g(f(h)) = g(2\sqrt{h}) = 16(2\sqrt{h})^2 = 64h \quad \dots(1)$$

$$\text{Además: } \text{gofoh} = 128\sqrt{4x^2 - 1} \quad \dots(2)$$

De (1) = (2)

$$\Rightarrow 64h = 128\sqrt{4x^2 - 1} \Rightarrow h = 2\sqrt{4x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow h(1) + h(2) = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{15} = \sqrt{12} + \sqrt{60} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\text{Como: } a < b \Rightarrow a = 12 \wedge b = 60$$

$$\therefore 5a + b = 5(12) + 60 = 120$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Hallar el dominio de la relación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq y \wedge x^2 + y^2 \leq 8\}$$

Resolución:

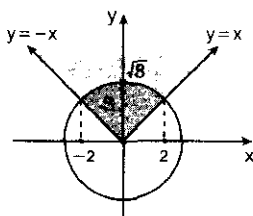
$$S: -y \leq x \leq y \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \leq 8$$

$$\text{Graficamos: } -y = x; x = y (y \geq 0) \wedge x^2 + y^2 = 8$$

Luego determinamos las regiones correspondientes a las desigualdades:

$$\text{Intersecamos: } \begin{cases} y = |x| \\ x^2 + y^2 = 8 \end{cases}$$

$$2x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2$$



$$\therefore \text{Dom}(S) = [-2; 2]$$

2. Hallar el dominio de la relación:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq x + 2\}$$

Resolución:

$$S: x^2 + y^2 \leq 4 \wedge y \geq x + 2$$

Graficamos (los bordes)

$$C: x^2 + y^2 = 4 \wedge L: y = x + 2$$

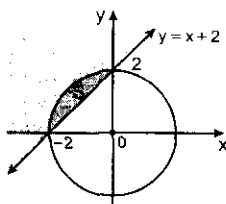
Probamos con (0; 0), en ambos casos.

Luego, tenemos la región S.

$$L \cap C: x^2 + (x + 2)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x = -2$$

Intersecamos:



$$\therefore \text{Dom}(S) = [-2; 0]$$

3. Si se cumple la relación:

$$F(x) = F(x-1) + F(x-2)$$

$$\text{además: } F(1) = 3 \text{ y } F(0) = 5$$

$$\text{Hallar } n \text{ en } F[-F(-1)] + n = F(3)$$

Resolución:

En el dato:

$$F(x) = F(x-1) + F(x-2); \text{ evaluando para:}$$

$$x = 1 \Rightarrow F(1) = F(0) + F(-1)$$

$$\Rightarrow 3 = 5 + F(-1) \Rightarrow F(-1) = -2$$

$$\text{Ahora: } -F(-1) = 2 \Rightarrow F[-F(-1)] = F(2)$$

Luego, evaluando para:

$$x = 2 \Rightarrow F(2) = \frac{F(1)}{3} + \frac{F(0)}{5} \Rightarrow F(2) = 8$$

$$x = 3 \Rightarrow F(3) = \frac{F(2)}{8} + \frac{F(1)}{3} \Rightarrow F(3) = 11$$

Reemplazando en la condición:

$$\frac{F[-F(-1)]}{8} + n = \frac{F(3)}{11} \quad \therefore n = 3$$

4. Sea $f(x) = -(x-1)^2 + 2$. Si $A(x) = bf(x) / (1-x)$, con $b > 0$ y $f(x+b) = f(x)$; hallar en que intervalo se encuentra $A(x)$, cuando: $0 < x < 1$

Resolución:

$$\text{Del dato: } f(x+b) = f(x) \Rightarrow b = 2 - 2x$$

$$\text{Luego: } A(x) = \frac{(2-2x)[-(x-1)^2 + 2]}{1-x}$$

$$A(x) = -2(x-1)^2 + 4$$

Por dato

$$0 < x < 1 \Rightarrow -1 < x-1 < 0$$

$$1 > (x-1)^2 > 0 \Rightarrow -2 < -2(x-1)^2 < 0$$

$$2 < -2(x-1)^2 + 4 < 4$$

$$2 < A(x) < 4 \quad \therefore A(x) \in (2; 4)$$

5. Sea $S = \{2; 3; 4\}$ un conjunto cuyo número de elementos se expresa así: $n(S) = 3$. Si:

$$R_1 = \{(x, y) \in S^2 / y > x\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in S^2 / y = x^2\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in S^2 / y - x = 1\}$$

$$\text{hallar: } \frac{n(R_1)}{n(R_2) + n(R_3)}$$

Resolución:

$$R_1 = \{(x, y) \in S^2 / y > x\} = \{(x, y) \in S^2 / y \leq x\};$$

$$x \in S \wedge y \in S$$

Para:

$$x = 2; y \leq 2 \Rightarrow y = 2, \text{ luego } (2; 2) \in R_1$$

$$x = 3; y \leq 3 \Rightarrow y = 2 \vee 3, \text{ luego } (3; 3); (3; 2) \in R_1$$

$$x = 4; y \leq 4 \Rightarrow y = 2 \vee 3 \vee 4, \text{ luego } (4; 2), (4; 3),$$

$$(4; 4) \in R_1$$

$$\Rightarrow R_1 = \{(2; 2), (3; 2), (3; 3), (4; 2), (4; 3), (4; 4)\}$$

$$R_2 = \{(x, y) \in S^2 / y = x^2\}; x \in S \wedge y \in S$$

$$\text{Para: } x = 2; y = 2^2 \Rightarrow y = 4, \text{ luego } (2; 4) \in R_2$$

$$x = 3; y = 3^2 \Rightarrow y = 9, \text{ pero } 9 \notin S$$

$$x = 4; y = 4^2 \Rightarrow y = 16, \text{ también } 16 \notin S$$

$$\Rightarrow R_2 = \{(2; 4)\}$$

$$R_3 = \{(x, y) \in S^2 / y - x = 1\} = \{(x, y) \in S^2 / y = x + 1\};$$

$$x \in S \wedge y \in S$$

$$\text{Para: } x = 2; y = 2 + 1 \Rightarrow y = 3, \text{ luego } (2; 3) \in R_3$$

$$x = 3; y = 3 + 1 \Rightarrow y = 4, \text{ luego } (3; 4) \in R_3$$

$$x = 4; y = 4 + 1 \Rightarrow y = 5, \text{ pero } 5 \notin S$$

$$\Rightarrow R_3 = \{(2; 3), (3; 4)\}$$

Entonces: $n(R_1) = 6$; $n(R_2) = 1$; $n(R_3) = 2$

$$\therefore \frac{n(R_1)}{n(R_2) + n(R_3)} = \frac{6}{2+1} = 2$$

6. En $\mathbb{Z}$ se define las siguientes relaciones:

$$R_1 = \{(x; y) / 3x + y = 7\}$$

$$R_2 = \{(x; y) / 5x - 4y = 12\}$$

$$S = \{(x; y) / \exists (x; z) \in R_1 \wedge (z; y) \in R_2\}$$

determinar S por comprensión.

Resolución:

De acuerdo con la definición: $S = R_2 \circ R_1$

$$\text{De: } R_1 = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / y = 7 - 3x\}$$

$$\text{Dom}(R_1) = \mathbb{Z}; \text{Ran}(R_1) = \{7 - 3x / x \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{De: } R_2 = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / 4y = 5x - 12\}$$

$$R_2 = \{(x; y) \in \mathbb{Z}^2 / y = \frac{5}{4}x - 3\}$$

Como: $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 4k$; $\forall k \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\text{Dom}(R_2) = \{4k / k \in \mathbb{Z}\}; \text{Ran}(R_2) = \{5k - 3 / k \in \mathbb{Z}\}$$

Entonces se puede observar que:

$$\text{Ran}(R_1) \cap \text{Dom}(R_2) \neq \emptyset, \text{ pues } \exists x; k \in \mathbb{Z} / 7 - 3x = 4k$$

Lo cual significa que: $S = R_2 \circ R_1$ existe.

Según el enunciado del problema, solo interesa la regla de correspondencia de S , más no el dominio que tendría.

$$\text{Sean } (x; z) \in R_1 \wedge (z; y) \in R_2 \Rightarrow 3x + z = 7 \wedge 5z - 4y = 12$$

$$\Rightarrow 15x + 5z = 35 \wedge 5z - 4y = 12 \Rightarrow 15x + 4y = 23$$

$$\therefore S = R_2 \circ R_1 = \{(x; y) / 15x + 4y = 23\}$$

7. En el conjunto $A = \{2; 4; 5; 6\}$, se definen:

$$R = \{(x; y) \in A^2 / x \leq y\}$$

$$S = \{(x; y) \in A^2 / x + 1 = y\}$$

$$T = \{(x; y) \in A^2 / x \neq y\}$$

señalar la proposiciones verdaderas:

$$\text{I. } R \cap S \subset T \quad \text{II. } T \text{ no es simétrica}$$

$$\text{III. } R \cup T \text{ es de equivalencia}$$

Resolución:

Extendiendo las relaciones R , S y T .

$$\bullet R = \{(x; y) \in A^2 / x \leq y\}$$

Para:

$$x = 2: 2 \leq y = y = 2; 4; 5; 6 \Rightarrow (2; 2), (2; 4), (2; 5), (2; 6) \in R$$

$$x = 4: 4 \leq y = y = 4; 5; 6 \Rightarrow (4; 4), (4; 5), (4; 6) \in R$$

$$x = 5: 5 \leq y = y = 5; 6 \Rightarrow (5; 5), (5; 6) \in R$$

$$x = 6: 6 \leq y = y = 6 \Rightarrow (6; 6) \in R$$

Luego:

$$\Rightarrow R = \{(2; 2), (2; 4), (2; 5), (2; 6), (4; 4), (4; 5), (4; 6), (5; 5), (5; 6), (6; 6)\}$$

$$\bullet S = \{(x; y) \in A^2 / y = x + 1\}$$

$$\text{Para: } x = 2: y = 2 + 1 = 3, \text{ pero } 3 \notin A$$

$$x = 4: y = 4 + 1 = 5 \Rightarrow (4; 5) \in S$$

$$x = 5: y = 5 + 1 = 6 \Rightarrow (5; 6) \in S$$

$$x = 6: y = 6 + 1 = 7, \text{ pero } 7 \notin A$$

$$\text{Luego: } S = \{(4; 5), (5; 6)\}$$

$$\bullet T = \{(x; y) \in A^2 / x \neq y\}$$

$$T = A \times A - \{(2; 2), (4; 4), (5; 5), (6; 6)\}$$

Analícemos ahora cada expresión:

$$\text{I. } R \cap S = \{(4; 5), (5; 6)\} \subset T \quad (\text{Verdadero})$$

$$\text{II. Si } x \neq y \Rightarrow y \neq x, \text{ es decir: } \forall (x; y) \in T: (y; x) \in T \\ \Rightarrow T \text{ es simétrica} \quad (\text{Falso})$$

III. $R \cup T = A \times A$ (el lector puede deducir esto de inmediato) y por propiedad la relación $A \times A$, necesariamente es de equivalencia. (Verdadero)

$\therefore$ Son verdaderas: I y III

8. Sean: $N = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\} \wedge A = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ denotemos por $r: N \rightarrow A$, la función que satisface.

$$\bullet r(m) = m, \text{ si } m \in A$$

$$\bullet r(m) = r(m + 5k), \forall k \in \mathbb{N}$$

Determinar las soluciones enteras de las ecuaciones:

$$r(5) = \ell \wedge r(4h) = 1$$

Resolución:

$$\text{De } r(m) = m, m \in A$$

$$r(m) = r(m + 5k), \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Tenemos: } r(0) = 0; r(1) = 1; r(2) = 2; r(3) = 3; r(4) = 4$$

En $r(m) = r(m + 5k)$ evaluamos para $m = 0 \wedge k = 1$

$$r(0) = r(0 + 5) = \ell \Rightarrow r(5) = r(0) = 0 \Rightarrow \ell = 0$$

$$\text{Como } r(4h) = 1 = r(1), \text{ evaluamos para: } m = 1$$

$$\Rightarrow r(1) = r(1 + 5k) \Rightarrow r(1) = \underbrace{r(1 + 5k)}_{r(4h)} = 1$$

Como r es periódica, una posibilidad es $1 + 5k = 4h$

$$\Rightarrow h = \frac{1 + 5k}{4}; k \in \mathbb{N}$$

$$\text{Para: } k = 3 \Rightarrow h = 4$$

$$\text{Una solución entera es: } \ell = 0 \wedge h = 4$$

9. Dada la función polinomial:

$$P(x) = x^3 - 10\,000x^2 - 10\,002x + 9999$$

calcular el valor de: $P(10\,001)$

Resolución:

$$\text{Haciendo: } 10\,001 = a$$

$$\Rightarrow P(x) = x^3 - (a - 1)x^2 - (a + 1)x + a - 2$$

$$\text{Piden } P(a) = a^3 - (a - 1)a^2 - (a + 1)a + a - 2$$

$$P(a) = a^3 - a^3 + a^2 - a^2 - a + a - 2$$

$$\therefore P(a) = P(10\,001) = -2$$

10. La función $f(t) = -t^4 + 2a^2t^2 + b - a^4$, con $b - a^4 > 0$, representa la fórmula de crecimiento de una población de conejos en un ambiente con recursos limitados de (pastos y espacio), en función del tiempo t en años ($a > 0$). Determinar cuando la población será máxima.

Resolución:

Para hallar el máximo valor de la función

$$f(t) = -t^4 + 2a^2t^2 + b - a^4; t > 0 \text{ (tiempo)}$$

Completando cuadrados:

$$f(t) = b - (t^4 - 2a^2t^2 + a^4)$$

$$f(t) = b - (t^2 - a^2)^2$$

$$f(t) \text{ es máximo} \Leftrightarrow t^2 = a^2 \quad \therefore t = a$$

11. Dado los siguientes enunciados:

I. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función creciente, g es función constante, entonces $f + g$ es función creciente.

II. Si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función par, entonces $g(x) = h(-x)$ es función par.

III. Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es función impar, entonces $h(x) = g(-x)$ es función impar.

Señalar las proposiciones correctas.

Resolución:

I. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es creciente $\wedge$ g es constante

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} / x_1 < x_2) \\ \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \wedge g(x_1) = g(x_2) \\ \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2) \\ \Rightarrow (f+g)(x_1) < (f+g)(x_2) \\ \Rightarrow f+g \text{ es creciente} \quad (V) \end{aligned}$$

II. Si $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es par $\Rightarrow h(-x) = h(x)$

$$g(x) = h(-x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$g(-x) = h(-(-x)) = h(x) = h(-x) = g(x)$$

$$\Rightarrow g \text{ es par} \quad (V)$$

III. Si $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es impar, entonces:

$$g(-x) = -g(x).$$

$$h(x) = g(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$h(-x) = g(-(-x)) = g(x) = -g(-x) = h(x)$$

$$\Rightarrow h \text{ es impar.} \quad (V)$$

$\therefore$ Son correctas: I, II y III

12. Sean las funciones:

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sqrt{4-x}\}$$

$$g = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\}$$

determinar el dominio de: $f+g$

Resolución:

$$f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sqrt{4-x}\}$$

$$4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4 \Rightarrow \text{Dom}f = (-\infty; 4]$$

$$g = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}\}$$

$$x^2-4 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-2) > 0$$

$$\Rightarrow x < -2 \vee x > 2 \Rightarrow \text{Dom}g = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

$$\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$$

$$\text{Dom}(f+g) = ((-\infty; 4]) \cap ((-\infty; -2) \cup (2; +\infty))$$

$$\therefore \text{Dom}(f+g) = (-\infty; -2) \cup (2; 4]$$

13. Hallar $f+g$, si $f(x) = \begin{cases} x+1; & x < 2 \\ x-1; & x > 3 \end{cases}$

$$g(x) = \begin{cases} x-1; & x < 1 \\ x+1; & x > 4 \end{cases}$$

Resolución:

$$\text{Dom}f = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$$

$$\text{Dom}g = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$$

$$\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$$

$$\text{Dom}(f+g) = (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$$

$$\text{Para } x \in (-\infty; 1)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x+1 + x-1 = 2x$$

$$\text{Para } x \in (4; +\infty)$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x-1 + x+1 = 2x$$

$$\therefore (f+g)(x) = 2x; x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$$

14. Dado: $f = \{(2; -1), (3; 1), (4; 5)\}$

$$g = \{(3; 2), (4; -1), (5; 7), (1; -1)\}$$

determinar el rango de $3f+g^2$

Resolución:

$$f = \{(2; -1), (3; 1), (4; 5)\}$$

$$\Rightarrow 3f = \{(2; -3), (3; 3), (4; 15)\}$$

$$g = \{(3; 2), (4; -1), (5; 7), (1; -1)\}$$

$$\Rightarrow g^2 = \{(3; 4), (4; 1), (5; 49), (1; 1)\}$$

$$\text{Dom}(3f+g^2) = \text{Dom}(3f) \cap \text{Dom}(g^2)$$

$$\text{Dom}(3f+g^2) = \{2; 3; 4\} \cap \{1; 3; 4; 5\}$$

$$\Rightarrow \text{Dom}(3f+g^2) = \{3; 4\}$$

$$(3f+g^2)(3) = (3f)(3) + g^2(3) = 3 + 4 = 7$$

$$(3f+g^2)(4) = (3f)(4) + g^2(4) = 15 + 1 = 16$$

$$\therefore \text{Ran}(3f+g^2) = \{7; 16\}$$

15. Determinar cuáles de las siguientes proposiciones son correctas:

I. Si f es una función inyectiva, entonces f es creciente o decreciente.

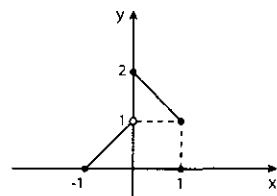
II. Si f es creciente, entonces f es inyectiva.

III. Si f es subyectiva, entonces f es creciente.

Resolución:

I. Si f es inyectiva, f no es necesariamente creciente o decreciente. Por ejemplo, la función:

$$\begin{cases} x+1; & -1 \leq x < 0 \\ 2-x; & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



Cuya gráfica es:

Es inyectiva, pero no es creciente ni decreciente (F)

II. Si f es creciente, f necesariamente es inyectiva, pues: $\forall x_1, x_2 \in \text{Dom}f: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (V)$$

III. Si f es subyectiva, entonces f no necesariamente es creciente. (F)

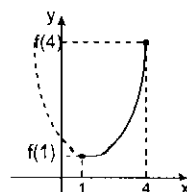
$\therefore$ Es correcto solo II

16. Sea la función $f: [1; 4] \rightarrow [a; b]$ definida por $f(x) = x^2 - 2x + 3$, hallar $a+b$ para que f sea inyectiva y sobreyectiva.

Resolución:

$$f: [1; 4] \Rightarrow [a; b] / f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$f(x) = (x-1)^2 + 2; \text{ su gráfica es:}$$



En $[1; 4]$, la función es inyectiva y además es creciente. Como f es sobreyectiva:

$$\Rightarrow \text{Ran}f = [a; b] = [f(1); f(4)]$$

$$\Rightarrow a = f(1) = 2 \wedge b = f(4) = 11$$

$$\therefore a + b = 13$$

17. Sea la función $f: \langle -2; +\infty \rangle - \{3\} \rightarrow \mathbb{B}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-6x-7}{5}; & -2 < x < 3 \\ \frac{x}{x-3}; & x > 3 \end{cases}$$

Hallar $\mathbb{B}$ para que f sea suryectiva.

Resolución:

$$f: \langle -2; +\infty \rangle - \{3\} \Rightarrow \mathbb{B}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-6x-7}{5}; & -2 < x < 3 \\ \frac{x}{x-3}; & x > 3 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si: } -2 < x < 3 \Rightarrow 12 > -6x > -18$$

$$\Rightarrow 5 > -6x - 7 > -25$$

$$\Rightarrow \frac{5}{5} > \frac{-6x-7}{5} > -\frac{25}{5}$$

$$\Rightarrow 1 > f(x) > -5 \Rightarrow \text{Ranf}_1 = \langle -5; 1 \rangle$$

$$\bullet \text{ Si: } x > 3 \Rightarrow x - 3 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-3} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{3}{x-3} > 0 \Rightarrow 1 + \frac{3}{x-3} > 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-3} > 1 \Rightarrow f(x) > 1 \Rightarrow \text{Ranf}_2 = \langle 1; +\infty \rangle$$

$$\text{Luego: } \text{Ranf} = \text{Ranf}_1 \cup \text{Ranf}_2$$

$$\Rightarrow \text{Ranf} = \langle -5; 1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$$

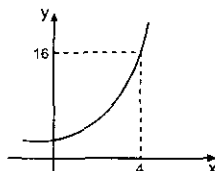
Como f es suryectiva, entonces $\text{Ranf} = \mathbb{B}$

$$\therefore \mathbb{B} = \langle -5; 1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$$

18. Sea la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = b^x, \quad b > 1$$

Calcular b^2 , si la gráfica de f es:



Resolución:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = b^x \wedge b > 1$$

$$\text{Del gráfico: } f(4) = 16 \Rightarrow b^4 = 16 \Rightarrow b = 2 \quad \therefore b^2 = 4$$

19. Determinar la veracidad (V) o falsedad (F) de las siguientes afirmaciones.

$$\text{I. } \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}} > 1 \quad \text{II. } (0,21)^{-\pi} < 1 \quad \text{III. } (\sqrt{3})^{-1,2} < 1$$

Resolución:

Tenga en cuenta que:

$$1 \leq a < b \Rightarrow a^x < b^x, \quad \forall x > 0.$$

$$\text{I. } 1 < 2 \Rightarrow 1^{\frac{6}{7}} < 2^{\frac{6}{7}}$$

$$\Rightarrow 1 < 2^{\frac{6}{7}} \Rightarrow 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{6}{7}} \quad (\text{V})$$

$$\text{II. } 100 > 21 \Rightarrow 100^\pi > 21^\pi$$

$$\Rightarrow \left(\frac{100}{21}\right)^\pi > 1 \Rightarrow \left(\frac{21}{100}\right)^{-\pi} > 1 \quad (\text{F})$$

$$\text{III. } 3 > 1 \Rightarrow 3^{0,6} > 1^{0,6}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{3}^{1,2} > 1 \Rightarrow 3^{-1,2} < 1 \quad (\text{V})$$

$$\therefore \text{VFV}$$

20. Sean las funciones:

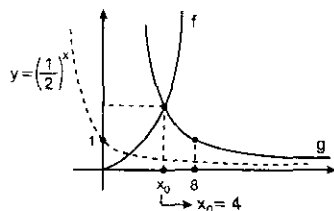
$$f(x) = x^2, \quad x > 0 \quad \wedge \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-8}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Determinar el conjunto $f = \{x / f(x) \geq g(x)\}$

Resolución:

$$f(x) = x^2, \quad x > 0 \quad \wedge \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-8}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Grificando:



$$f(4) = 16 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = g(4) \Rightarrow x_0 = 4$$

$$f = \{x / f(x) \geq g(x)\}$$

$$\text{Del gráfico: } f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x \geq 4 \quad \therefore f = [4; +\infty)$$

21. Se define la función:

$$f: S \rightarrow \mathbb{R}^+ / f(x) = e^{1-x\sqrt{5x+1}-|3x+7|}, \quad S \text{ es el dominio.}$$

Determinar la afirmación correcta:

Resolución:

$$f(x) = e^{1-x\sqrt{5x+1}-|3x+7|}$$

$$\Rightarrow 5x + 1 - |3x + 7| \geq 0$$

$$\Rightarrow |3x + 7| \leq 5x + 1$$

$$\Rightarrow 5x + 1 \geq 0 \wedge -5x - 1 \leq 3x + 7 \leq 5x + 1$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{5} \wedge (-5x - 1 \leq 3x + 7 \wedge 3x + 7 \leq 5x + 1)$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{5} \wedge (-1 \leq x \wedge 3 \leq x)$$

$$\Rightarrow x \geq -\frac{1}{5} \wedge (x \geq 3) \Rightarrow x \geq 3.$$

$$\text{Luego: } S = \text{Dom}f = [3; +\infty)$$

$$\therefore \mathbb{R}^+ / S = \mathbb{R}^+ - [3; +\infty) = \langle 0; 3 \rangle$$

22. Si $a < b < 0$ y $f(x) = a\left(\frac{a}{b}\right)^{x-a}$

Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

I. f es creciente. II. f es inyectiva.

III. f es una función constante.

Resolución:

$$a < b < 0 \wedge f(x) = a\left(\frac{a}{b}\right)^{x-a}$$

$$a < b \Rightarrow \frac{a}{b} > 1; \text{Dom}f = \mathbb{R}.$$

$$\text{I. } \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} / x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + a < x_2 + a$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{x_1+a} < \left(\frac{a}{b}\right)^{x_2+a}$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{a}{b}\right)^{x_1+a} > a\left(\frac{a}{b}\right)^{x_2+a} \Rightarrow f_{(x_1)} > f_{(x_2)}$$

$$\Rightarrow f \text{ es decreciente} \quad (F)$$

II. Como f es decreciente, entonces f es inyectiva. (V)

III. f no es constante. (F)

$\therefore$ FVF

23. Sea f una función definida por la regla de correspondencia:

$f(x) = -3|x-1|^2 - 2^{k-1} + 3$, con $x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, determinar el máximo valor de f .

Resolución:

$$f(x) = -3|x-1|^2 - 2^{k-1} + 3$$

$$f(x) = 3 - (3|x-1|^2 + 2^{k-1}); \quad x \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

f será máximo, si: $3|x-1|^2 + 2^{k-1}$

toma su mínimo valor en $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

Lo cual ocurre cuando: $x = 1$.

$$\therefore f_{\max} = 3 - [3(0)^2 + 2^0] = 3 - 1 = 2$$

24. Dada la función f definida por:

$$f(x) = \frac{5^{-|x-1|}}{5^{-|x-1|} + 1}, \text{ determinar el Ran}(f).$$

Resolución:

$$f(x) = \frac{5^{-|x-1|}}{5^{-|x-1|} + 1} = 1 - \frac{1}{5^{-|x-1|} + 1}$$

$$\text{Dom}f = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}: |x-1| \geq 0$$

$$0 < \left(\frac{1}{5}\right)^{|x-1|} \leq 1 \Rightarrow 0 < 5^{-|x-1|} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 < 5^{-|x-1|} + 1 \leq 2 \Rightarrow 1 > \frac{1}{5^{-|x-1|} + 1} \geq \frac{1}{2}$$

Multiplicando por -1 :

$$-1 < -\frac{1}{5^{-|x-1|} + 1} \leq -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{5^{-|x-1|} + 1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{Ran}f = \left(0; \frac{1}{2}\right]$$

25. Si la función $f: A \rightarrow \left[\frac{1}{9}; 27\right]$; con $f(x) = 3^{3-|x|}$ es sobreyectiva, hallar el mayor dominio A .

Resolución:

$$f: A \rightarrow \left[\frac{1}{9}; 27\right] / f(x) = 3^{3-|x|}$$

$$f \text{ es sobreyectiva} \Rightarrow \text{Ran}f = \left[\frac{1}{9}; 27\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} \leq f(x) \leq 27 \Rightarrow 3^{-2} \leq 3^{3-|x|} \leq 3^3$$

$$\Rightarrow -2 \leq 3 - |x| \leq 3 \Rightarrow -5 \leq -|x| \leq 0$$

$$\Rightarrow 5 \geq |x| \geq 0 \Rightarrow |x| \leq 5$$

$$\Rightarrow -5 \leq x \leq 5 \quad \therefore A = \text{Dom}f = [-5; 5]$$

26. Dada la función: $f(x) = \sqrt{4-2^x}$; $\text{Dom}f = \langle -\infty; a]$

Hallar el valor de: $a^3 - a + 3$.

Resolución:

$$f(x) = \sqrt{4-2^x}$$

$$4 - 2^x \geq 0 \Rightarrow 2^x \leq 4 \Rightarrow 2^x \leq 2^2$$

$$\Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in \langle -\infty; 2]$$

$$\text{Dom}f = \langle -\infty; 2] = \langle -\infty; a] \Rightarrow a = 2$$

$$\therefore a^3 - a + 3 = 2^3 - 2 + 3 = 9$$

27. Dada la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = \pi^{-x}y$ los siguientes enunciados:

I. Su rango es $\langle -\infty; 0)$.

II. f es función creciente.

III. La ecuación $f(x) = x$ tiene solución.

Indicar cuáles son correctos.

Resolución:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \pi^{-x}$$

I. Recuerde que, siendo: $a > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}; a^x > 0$

$$f(x) = \pi^{-x} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x > 0$$

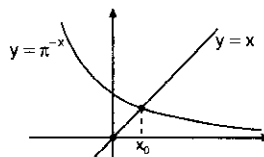
$$\Rightarrow f(x) \in \langle 0; +\infty) = \text{Ran}f \quad (F)$$

II. Para: $0 < \frac{1}{\pi} < 1$; $f(x) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$

Es una función decreciente. (F)

III. La ecuación $f(x) = x \Rightarrow \pi^{-x} = x$

Tiene una solución, como se puede apreciar en la figura siguiente:



$\therefore$ Es correcto: solo III

28. Sea $f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2} + \sqrt{2^{x^2} - 4}$. determinar el dominio de f .

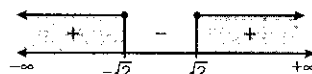
Resolución:

$$f(x) = \frac{2^x}{2^x + 2} + \sqrt{2^{x^2} - 4}$$

Como $2^x + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\Rightarrow 2^{x^2} - 4 \geq 0 \Rightarrow 2^{x^2} \geq 2^2 \Rightarrow x^2 \geq 2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \geq 0 \Rightarrow (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) \geq 0$$



$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$$

$$\therefore \text{Dom}f = \langle -\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$$

29. Un obrero típico de una fábrica puede producir $f(t)$ unidades diarias después de t días de desarrollar el mismo trabajo, donde $f(t) = 50(1 - e^{-0.34t})$. ¿Cuántas unidades diarias se puede llegar a esperar que produzca el mismo obrero?

Resolución:

$$f(t) = 50(1 - e^{-0.34t})$$

Para un tiempo prolongado ($t \rightarrow \infty$)

$e^{-0.34t}$ es prácticamente igual a 0

Por lo que $f(x) = 50(1 - 0) = 50$

∴ Se espera que el obrero produzca 50 unidades.

30. Determinar el dominio de la función:

$$f/f(x) = \frac{\sqrt{3^x - 2^x}}{\sqrt[3]{5^x + 1}} + \sqrt{3^{x+1} - 1}$$

Resolución:

$$f(x) = \frac{\sqrt{3^x - 2^x}}{\sqrt[3]{5^x + 1}} + \sqrt{3^{x+1} - 1}$$

f está definida, si: $3^x - 2^x \geq 0 \wedge 3^{x+1} - 1 \geq 0$

$$\Rightarrow 3^x \geq 2^x \wedge 3^{x+1} \geq 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \geq 1 \wedge 3^{x+1} \geq 3^0$$

$$\Rightarrow x \geq 0 \wedge x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\therefore \text{Dom } f = [0; +\infty)$$

31. Hallar el dominio de la función real:

$$f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$$

Resolución:

Como $f(x)$ es real, se tiene: $x-1 \geq 0 \wedge 6-x \geq 0$

$$x \geq 1 \wedge 6 \geq x \Rightarrow x \geq 1 \wedge x \leq 6 \Rightarrow 1 \leq x \leq 6$$

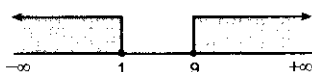
$$\therefore x \in [1; 6]$$

32. ¿Cuál es el dominio de la función?

$$f(x) = \sqrt{(x-1)(x-9)}$$

Resolución:

Sabemos: $(x-1)(x-9) \geq 0$



$$\Rightarrow x \in \langle -\infty; 1 \rangle \cup [9; +\infty) \quad \therefore x \in \mathbb{R} - \langle 1; 9 \rangle$$

33. Encontrar una función lineal $F(x)$, tal que:

$$F(2) = 3 \quad \dots(I)$$

$$F(3) = 2F(4) \quad \dots(II)$$

Resolución:

Sea $F(x) = ax + b$, la función lineal

$$\text{Para: } F(2) = 2a + b = 3 \quad \dots(III)$$

$$\text{Para: } F(3) = 3a + b$$

$$\text{Para: } F(4) = 4a + b$$

$$\text{Entonces: } 3a + b = 2(4a + b) \quad \dots(IV)$$

De la ecuación (III) y (V): $a = -1$; $b = 5$

$$\therefore F(x) = -x + 5$$

34. Hallar los valores de a y b para que el conjunto de pares ordenados sea una función.

$$A = \{(2; 5), (-1; -3), (2; 2a-b), (-1; b-a), (a+b^2; a)\}$$

Resolución:

En una función, dos pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento, luego:

$$(2; 5) \text{ y } (2; 2a-b) \in A \Rightarrow S = 2a-b \quad \dots(I)$$

$$(-1; -3) \text{ y } (-1; b-a) \in A \Rightarrow b-a = 3 \quad \dots(II)$$

De la ecuación (I) y (II):

$$\therefore a = 2; b = 1$$

35. Hallar el rango para la función definida por:

$$h(x) = x^2 - 4x + 7; x \in [2; 3]$$

Resolución:

$$y = x^2 - 4x + 7 \Rightarrow y = (x-2)^2 + 3$$

$$\text{Como: } 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq x-2 \leq 1$$

$$\text{Al cuadrado: } 0 \leq (x-2)^2 \leq 1$$

$$\text{Más tres: } 3 \leq (x-2)^2 + 3 \leq 4 \Rightarrow 3 \leq y \leq 4$$

$$\therefore \text{Ran}(h) = [3; 4]$$

36. Si el rango de la función: $F(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

es $[a; b]$, hallar: $a + b$

Resolución:

$$\text{Despejando } x \text{ en términos de } y \text{ en: } y = F(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

$$y(x^2 + 1) = x^2$$

$$\Rightarrow yx^2 + y = x^2 \Leftrightarrow x^2y - x^2 = -y$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{-y}{y-1} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{-y}{y-1}}$$

$$\text{Como } x \text{ es real: } \frac{-y}{y-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{y}{y-1} \leq 0 \Rightarrow y \neq 1$$



$$\text{Ran}(F) = [a; b] = [0; 1) \Rightarrow a = 0; b = 1$$

$$\therefore a + b = 1$$

37. Si $\langle a; b \rangle$ es el dominio de la función f definida por

$$f = \left\{ \left(\frac{2x+1}{2x+3}; x \right) / x \in \langle 0; 10 \rangle \right\}, \text{ hallar la relación entre}$$

a y b

Resolución:

$$f = \left\{ \left(\frac{2x+1}{2x+3}; x \right) / x \in \langle 0; 10 \rangle \right\}$$

$$f = \left\{ (t; x) / t = \frac{2x+1}{2x+3} \wedge x \in \langle 0; 10 \rangle \right\}$$

$$\text{Dom}(f) = \left\{ t \in \mathbb{R} / t = \frac{2x+1}{2x+3} \wedge x \in \langle 0; 10 \rangle \right\}$$

$$t = \frac{2x+1}{2x+3} = 1 - \frac{2}{2x+3}$$

$$0 < x \leq 10 \Rightarrow 0 < 2x \leq 20$$

$$\Rightarrow 3 < 2x+3 \leq 23 \Rightarrow \frac{1}{3} > \frac{1}{2x+3} \geq \frac{1}{23}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} < -\frac{2}{2x+3} \leq -\frac{2}{23}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < 1 - \frac{2}{2x+3} \leq 1 - \frac{2}{23}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} < t \leq \frac{21}{23} \Rightarrow \text{Dom}(f) = \left\langle \frac{1}{3}; \frac{21}{23} \right]$$

$$\text{Luego: } a = \frac{1}{3}; b = \frac{21}{23}$$

$$\therefore 3a + 23b = 22$$

38. Sea f una función real de variable real definida por $f(x) = mx + b$, tal que $f(-1) = 2$ y $f(2) = -3$, hallar: $3(m + b)$.

Resolución:

Del problema: $f(x) = mx + b$

$$\Rightarrow f(-1) = 2 \Rightarrow m(-1) + b = 2 \quad \dots(I)$$

$$\Rightarrow f(2) = -3 \Rightarrow m(2) + b = -3 \quad \dots(II)$$

De la ecuación (I) y (II): $m = -\frac{5}{3}$, $b = \frac{1}{3}$

$$\therefore 3(m + b) = -4$$

39. f y g son dos funciones definidas por:

$$f = \{(0; 2), (-2; 3), (4; 6), (7; 0)\}$$

$$g = \{(-3; 3), (0; 3), (4; 0), (1; 8), (-2; 0)\}$$

Indicar verdadero (V) o falso (F) en los siguientes enunciados:

- I. La función $3f$ tiene como dominio al conjunto $\{0; -6; 12; 21\}$

- II. La suma de los elementos del rango de $(f^2 + g^2)$ es 58

- III. Se cumple: $\left(\frac{f}{g}\right) \times g = \{(0; 2)\}$

Resolución:

Calculando $\text{Dom}(f)$ y $\text{Dom}(g)$:

$$f = \{(0; 2), (-2; 3), (4; 6), (7; 0)\}$$

$$\text{Dom}(f) = \{0; -2; 4; 7\}$$

$$g = \{(-3; 3), (0; 3), (4; 0), (1; 8), (-2; 0)\}$$

$$\text{Dom}(g) = \{-3; 0; 4; 1; -2\}$$

- I. Falso

$$\text{Dom}(3f) = \text{Dom}(f)$$

- II. Verdadero

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f^2 + g^2) &= \text{Dom}(f^2) \cap \text{Dom}(g^2) \\ &= \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{0; 4; -2\} \end{aligned}$$

$$x = 0: (f^2 + g^2)(0) = f^2(0) + g^2(0) = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$x = 4: (f^2 + g^2)(4) = f^2(4) + g^2(4) = 6^2 + 0^2 = 36$$

$$x = -2: (f^2 + g^2)(-2) = f^2(-2) + g^2(-2) = 3^2 + 0^2 = 9$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f^2 + g^2) = \{13; 36; 9\}$$

$$\text{La suma: } 13 + 36 + 9 = 58$$

- III. Verdadero

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x/g(x) = 0\}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \{0; 4; -2\} - \{4; -2\} = \{0\}$$

$$\text{Luego: } \text{Dom}\left[\left(\frac{f}{g}\right) \times g\right] = \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) \cup \text{Dom}(g)$$

$$\Rightarrow \text{Dom}\left[\left(\frac{f}{g}\right) \times g\right] = \{0; 4; -2\} \cup \{0\} = \{0\}$$

$$x = 0: \left[\left(\frac{f}{g}\right) \times g\right](0) = f(0) = 2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right) \times g = \{(0; 2)\}$$

$\therefore$ FVV

40. Si f y g son dos funciones definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x; & x \in \langle -5; -1 \rangle \\ 4x - x^2; & x \in [0; 4] \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 4; & x \in \langle -3; 1 \rangle \\ 2x - 6; & x \in \langle 2; +\infty \rangle \end{cases}$$

$$\text{Hallar: } (f - g)(0) + (f \cdot g)(3) - 7\left(\frac{f}{g}\right)(-1; 5)$$

Resolución:

Sean:

$$f_1(x) = 1 - x; \quad f_2(x) = 4x - x^2$$

$$g_1(x) = x^2 - 4; \quad g_2(x) = 2x - 6$$

Calculando las operaciones con funciones:

$$\bullet (f - g)(0) = f(0) - g(0) = 0 - (-4) = 4$$

$$\text{Pues } f(0) = f_2(0) = 4(0) - 0^2 = 0$$

$$\wedge g(0) = g_1(0) = 0^2 - 4 = -4$$

$$\bullet (f \cdot g)(3) = f(3) \cdot g(3) = 3 \times 0 = 0$$

$$\text{Pues: } f(3) = f_2(3) = 4(3) - 3^2 = 3$$

$$\wedge g(3) = g_2(3) = 2(3) - 6 = 0$$

$$\bullet \left(\frac{f}{g}\right)(-1,5) = \frac{f(-1,5)}{g(-1,5)} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{7}{4}} = -\frac{10}{7}$$

Luego:

$$(f - g)(0) + (f \cdot g)(3) - 7\left(\frac{f}{g}\right)(-1,5) = 14$$

41. Si f y g son dos funciones definidas por:

$$f = \{(x; |2x - 1|) / x = -2; 0; 1; 2; 5\}$$

$$g = \{(x; |x|) / x \in [-1; 3]\}$$

Hallar la suma de todos los elementos del dominio y del rango de $(f^2 - g^2)$.

Resolución:

Para la función $f^2 - g^2$:

$$\text{Dom}(f^2 - g^2) = \text{Dom}(f^2) \cap \text{Dom}(g^2)$$

$$= \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \{-2; 0; 1; 2; 5\} \cap [-1; 3] = \{0; 1; 2\}$$

Luego:

$$x = 0: (f^2 - g^2)(0) = f^2(0) - g^2(0) = 1^2 - 0^2 = 1$$

$$x = 1: (f^2 - g^2)(1) = f^2(1) - g^2(1) = 1^2 - 1^2 = 0$$

$$x = 2: (f^2 - g^2)(2) = f^2(2) - g^2(2) = 3^2 - 2^2 = 5$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f^2 - g^2) = \{1; 0; 5\}$$

$$\text{Luego: } 0 + 1 + 2 + 1 + 0 + 5 = 9$$

42. Si $f: \text{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}$ y $g: \text{Dom}(g) \rightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones, determine verdadero (V) falso (F) en cada una de las siguientes proposiciones:

$$\text{I. } f = (f + g) - g \quad \text{II. } f = \left(\frac{f}{g}\right) \cdot g$$

$$\text{III. } \text{Dom}(f + g) \subset \text{Dom}(f)$$

Resolución:

Recuerde que:

$$f = g \Leftrightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \wedge f(x) = g(x);$$

$$\forall x \in \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$$

- I. Falsa

$$\text{Dom}[(f + g) - g] = \text{Dom}(f + g) \cap \text{Dom}(g)$$

$$\text{Dom}[(f + g) - g] = (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) \cap \text{Dom}(g)$$

$$\text{Dom}[(f + g) - g] = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

Luego: $\text{Dom}(f)$ no necesariamente es igual a $\text{Dom}((f+g)-g)$, entonces f no necesariamente es igual a $(f+g)-g$

II. Falsa

$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x/g(x) \neq 0\}$ y este no necesariamente es igual a $\text{Dom}(f)$. Luego, f no siempre es igual a $\left(\frac{f}{g}\right) \cdot g$.

III. Verdadera

$\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) \subset \text{Dom}(f)$
 $\Rightarrow \text{Dom}(f+g) \subset \text{Dom}(f)$
 También: $\text{Dom}(f+g) \subset \text{Dom}(g) \quad \therefore \text{FFV}$

43. Si f y g son dos funciones definidas por:

$$f(x) = x + 1; x \in \langle 0; 4 \rangle \wedge g(x) = \begin{cases} 2x - 3; x \in [-5; 3] \\ 3 - x^2; x \in \langle 3; 7 \rangle \end{cases}$$

Hallar el rango de $(f+g)$

Resolución:

$$f(x) = x + 1; x \in \langle 0; 4 \rangle$$

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) = 2x - 3; x \in [-5; 3] \\ g_2(x) = 3 - x^2; x \in \langle 3; 7 \rangle \end{cases}$$

- $\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$
 $\text{Dom}(f+g) = \langle 0; 4 \rangle \cap \{[-5; 3] \cup \langle 3; 7 \rangle\}$
 $\text{Dom}(f+g) = \langle 0; 3 \rangle \cup \langle 3; 4 \rangle = \langle 0; 4 \rangle$

• Definiendo la suma:

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(x) + g_1(x); x \in \langle 0; 3 \rangle \\ f(x) + g_2(x); x \in \langle 3; 4 \rangle \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} 3x - 2; x \in \langle 0; 3 \rangle \\ 4 + x - x^2; x \in \langle 3; 4 \rangle \end{cases}$$

• Cálculo del rango de $f+g$:

$$f(x) + g_1(x) = 3x - 2$$

$$0 < x \leq 3 \Rightarrow -2 < 3x - 2 \leq 7$$

$$\Rightarrow -2 < f(x) + g_1(x) \leq 7$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f+g_1) = \langle -2; 7 \rangle$$

$$f(x) + g_2(x) = 4 + x - x^2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow 3 < x < 4 \Rightarrow \frac{5}{2} < x - \frac{1}{2} < \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{25}{4} < \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow -2 > -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > -8$$

$$\Rightarrow -8 < f(x) + g_2(x) < -2$$

$$\Rightarrow \text{Ran}(f+g_2) = \langle -8; -2 \rangle$$

$$\text{Luego: } \text{Ran}(f+g) = \text{Ran}(f+g_1) \cup \text{Ran}(f+g_2)$$

$$\text{Ran}(f+g) = \langle -2; 7 \rangle \cup \langle -8; -2 \rangle$$

$$\therefore \text{Ran}(f+g) = \langle -8; 7 \rangle - \{-2\}$$

44. Sea $f: [1; a] \rightarrow [b; 7]$, definida por $f(x) = x^2 + 3$ una función suryectiva y los enunciados siguientes:

- f es inyectiva
- f es biyectiva
- f tiene inversa

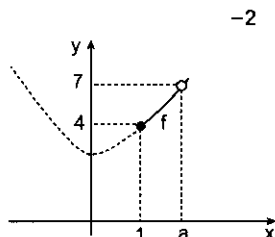
Indicar verdadero (V) o falso (F)

Resolución:

$$f: [1; a] \rightarrow [b; 7] / f(x) = x^2 + 3$$

$$\text{Dato: } f \text{ es suryectiva} \Rightarrow \text{Ran}(f) = [b; 7]$$

$$\text{Luego, graficando } f(x) = x^2 + 3:$$



$$\text{Ran}(f) = [4; 7] \Rightarrow a = 2; b = 4$$

Del gráfico:

- Verdadero
 f es inyectiva
- Verdadero
Como f es inyectiva y suryectiva, f es biyectiva
- Verdadero
Como f es una biyección, existe f inversa
 $\therefore$ VVV

45. indicar verdadero (V) o falso (F), en cada una de los siguientes enunciados:

- Si $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones acotadas, entonces $f+g$ es acotada.
- Si $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \langle 0; +\infty \rangle$, entonces f es una función acotada.
- Si f es acotada, entonces $-f$ es también acotada.

Resolución:

I. Verdadero

f y g son acotadas $\Rightarrow$ existen M_1 y M_2 positivos tales que:

$$|f(x)| \leq M_1, \forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$|g(x)| \leq M_2, \forall x \in \text{Dom}(g)$$

Para $x \in \text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$, se tiene:

$$|(f+g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

(Por la desigualdad triangular)

$$\text{Pero: } |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2$$

$$\Rightarrow |(f+g)(x)| \leq M_1 + M_2; M_1 + M_2 > 0$$

$$\Rightarrow (f+g) \text{ es acotada}$$

II. Falso

$$f(x) = \frac{1}{x}, x \in \langle 0; 3 \rangle$$

$$\forall x > 0: \frac{1}{x} > 0 \rightarrow f(x) > 0$$

$$\Rightarrow |f(x)| > 0 \Rightarrow f \text{ no es acotada}$$

III. Verdadero

$$f \text{ es acotada} \Rightarrow \exists M > 0;$$

$$\text{Tal que: } |f(x)| \leq M \forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$\Rightarrow |f(x)| = |-f(x)| \leq M, \forall x \in \text{Dom}(-f) = \text{Dom}(f)$$

$$\Rightarrow -f \text{ es acotada} \quad \therefore \text{VVF}$$

46. Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada uno de los siguientes enunciados:

I. $\{(x; |9 - x^2|) / x \in \mathbb{R}\}$ es una función acotada inferiormente.

II. La función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = \frac{1999}{x^2 + 1}$ es una función acotada superiormente

III. La función f definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x; & -3 < x < 0 \\ 5\sqrt{x}; & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

es acotada

Resolución:

I. Verdadero

$$f = \{(x; |9 - x^2|) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$f(x) = |9 - x^2|, \forall x \in \mathbb{R}; |9 - x^2| \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0 \Rightarrow 0 \leq f(x)$$

$\Rightarrow f$ es acotada inferiormente

II. Verdadero

$$f(x) = \frac{1999}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{x^2 + 1} \leq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1999}{x^2 + 1} \leq 1999$$

$$\Rightarrow 0 < f(x) \leq 1999$$

$\Rightarrow f$ es acotada superiormente

III. Verdadero

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4; & -3 < x < 0 \\ 5\sqrt{x}; & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Para } f_1(x) = x^2 + 4x:$$

$$-3 < x < 0 \Rightarrow -1 < x + 2 < 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq (x + 2)^2 < 4 \Rightarrow -4 \leq (x + 2)^2 - 4 < 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq f_1(x) < 0 \quad \dots(\alpha)$$

$$\text{Para } f_2(x) = 5\sqrt{x}$$

$$0 \leq x \leq 4 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq 5\sqrt{x} \leq 10$$

$$\Rightarrow 0 \leq f_2(x) \leq 10 \quad \dots(\beta)$$

$$\text{De la ecuación } (\alpha) \text{ y } (\beta): -4 \leq f(x) \leq 10$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 10 \Rightarrow f \text{ es acotada}$$

$\therefore$ VVV

47. Si f es una función definida por:

$$f(x) = \frac{6}{x^2 - 2x + 3} - 2; \forall x \in \mathbb{R}$$

Hallar el menor valor de k , tal que $|f(x)| \leq k$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$

Resolución:

$$f(x) = \frac{6}{x^2 - 2x + 3} - 2; x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{6}{(x - 1)^2 + 2} - 2$$

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x - 1)^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)^2 + 2 \geq 2$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{1}{(x - 1)^2 + 2} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < \frac{6}{(x - 1)^2 + 2} \leq 3$$

$$\Rightarrow -2 < \frac{6}{(x - 1)^2 + 2} - 2 \leq 1 \Rightarrow -2 < f(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x)| < 2 \Rightarrow k \geq 2$$

$$\therefore k_{\min} = 2$$

48. Sean las funciones:

$$f(x) = 3x + 1, x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 5x, x \in \mathbb{R}$$

$$31 \leq (f \circ g) \leq b$$

Hallar el valor de b , para que $(f \circ g)$ sea suryectiva en el dominio $[2; 10]$

Resolución:

$(f \circ g)$ existe, pues $g(x) \in \text{Dom}(f) \quad \forall x \in \text{Dom}(g)$; además:

$$(f \circ g)(x) = 15x + 1; x \in [2; 10]$$

$$2 \leq x \leq 10 \Rightarrow 30 \leq 15x \leq 150$$

$$\Rightarrow 31 \leq 15x + 1 \leq 151$$

$$\Rightarrow 31 \leq (f \circ g)(x) \leq 151$$

$$\therefore b = 151$$

49. Dadas las funciones: $f(x) = 2x + a \wedge g(x) = ax$

Hallar el valor de a , tal que: $(g^* \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 1$

Resolución:

Teniendo en cuenta que:

$$g \circ g^* = I \wedge I \circ f = f \circ I = f$$

$f(x) = 2x + a \wedge g(x) = ax$, son funciones biyectivas, tenemos:

$$(g^* \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 1$$

$$\Rightarrow g[(g^* \circ f)(x)] = g\left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow [(g \circ g^*) \circ f](x) = g\left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = g\left(\frac{x}{2} + 1\right) \Rightarrow 2x + a = \left(\frac{x}{2} + 1\right)a$$

$$\Rightarrow 2x + a = \frac{a}{2}x + a \quad \therefore a = 4$$

50. Sea $f: [0; 1] \rightarrow [2; 4]$ una función creciente y sobreyectiva, tal que $f(x) = ax + b$. Hallar $a - b$

Resolución:

Como f es creciente de la definición tenemos que f es inyectiva, y como toda función lineal es sobreyectiva concluimos que f es biyectiva. Luego:

$$f(0) = 2 \Rightarrow b = 2$$

$$f(1) = 4 \Rightarrow a + b = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$\therefore a - b = 0$$

51. Sea $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Hallar $f^*(x)$, si existe

Resolución:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}; \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

Veamos que f no es inyectiva

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R} / f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_1^2 + 1} = \frac{x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2}{x_2^2 + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_1 x_2^2 + x_1 - x_1^2 x_2 - x_2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(1 - x_1 x_2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 x_2 = 1$$

Con lo cual f no es inyectiva

Veamos por ejemplo que:

$$f(2) = \frac{2}{5} \wedge f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{2}{5} \quad \therefore f^* \text{ no existe}$$

52. Halle la inversa de la función $f(x) = 4 - \sqrt{1 - x^2}$; $x \in [-1; 0]$ si existe

Resolución:

Veamos si f es inyectiva:

Sean $x_1, x_2 \in [-1; 0]$, tal que: $f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow 4 - \sqrt{1 - x_1^2} = 4 - \sqrt{1 - x_2^2}$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2$$

Como $x_1, x_2 \in [-1; 0]$:

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

En general: $x_1 = x_2 \Rightarrow f$ es inyectiva y f^* existe

$$\text{Sea: } y = 4 - \sqrt{1 - x^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - x^2} = 4 - y \Rightarrow 1 - x^2 = (4 - y)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 - (4 - y)^2$$

$$\Rightarrow |x| = \sqrt{1 - (4 - y)^2} \wedge x \in [-1; 0]$$

$$\Rightarrow -x = \sqrt{1 - (4 - y)^2} \quad \therefore f^*(x) = \sqrt{1 - (4 - y)^2}$$

53. Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada uno de los enunciados siguientes:

- Si f es una función biyectiva, entonces $f \circ f^* = f^* \circ f$.
- Si f es creciente, entonces f^* también es creciente
- Si f es impar e inyectiva, entonces f^* también es impar.

Resolución:

- I. Falso

f es biyectiva $\Rightarrow f^*$ existe

$$f^* \circ f = I, \forall x \in \text{Dom}(f)$$

$$f \circ f^* = I, \forall x \in \text{Dom}(f^*)$$

Pero, $\text{Dom}(f)$ no necesariamente es igual a:

$$\text{Dom}(f^*). \text{ Luego: } f^* \circ f \neq f \circ f^*$$

$$\text{Por ejemplo: } f(x) = \sqrt{2 - x}$$

$$\text{Donde: } \text{Dom}(f) = \langle -\infty; 2 \rangle$$

$\Rightarrow f$ es inyectiva y f^* existe:

$$f^*(x) = 2 - x^2; \text{Dom}(f^*) = [0; +\infty)$$

Note que: $\text{Dom}(f) \neq \text{Dom}(f^*)$

- II. Verdadero

f es creciente $\Rightarrow f$ es inyectiva

$\Rightarrow f^*$ existe y esta también es creciente.

- III. Verdadero

f es impar y f es inyectiva

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x) \wedge f^* \text{ existe}$$

$$f^*(-y) = x \Rightarrow -y = f(x)$$

$$\Rightarrow y = -f(x) \Rightarrow y = f(-x)$$

$$\Rightarrow -x = f^*(y) \Rightarrow x = -f^*(y)$$

$$\text{Luego: } f^*(-y) = -f^*(y) \Rightarrow f^* \text{ es impar}$$

$\therefore$ FVV

54. Sea $f(x) = x + |x|$. Indicar verdadero (V) o falso (F) en cada uno de los siguientes enunciados:

I. Existe la función inversa f^* de f .

II. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

III. f es acotada

Resolución:

$$f(x) = x + |x|; \quad f(x) = \begin{cases} 2x; & x \geq 0 \\ 0; & x < 0 \end{cases}$$

- I. Falso

f no es inyectiva (la función nula, no es inyectiva)
 $\Rightarrow f^*$ no existe

- II. Verdadero

De la definición de $\text{Dom}(f)$, vemos que:

$$f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

- III. Falso

$\text{Ran}(f) = [0; +\infty)$, con lo cual f no es acotada

$\therefore$ FVF

55. Dada la función: $F(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{4}$

si $x < 2$, hallar la inversa, si existe:

Resolución:

$$\text{Del dato: } F(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 6x + 1)$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2; x < 2$$

$$\text{Sean } x_1, x_2 \in \text{Dom}(F) / F(x_1) = F(x_2)$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}(x_1 - 3)^2 + 2 = -\frac{1}{4}(x_2 - 3)^2 + 2$$

$$\Rightarrow (x_1 - 3)^2 = (x_2 - 3)^2 \Rightarrow |x_1 - 3| = |x_2 - 3|$$

Como $x_1, x_2 \in \text{Dom}(F)$, se tiene:

$$x_1 < 2 \wedge x_2 < 2 \Rightarrow x_1 - 3 < -1 < 0 \wedge x_2 - 3 < -1 < 0$$

$$\text{Luego: } 3 - x_1 = 3 - x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$\Rightarrow F$ es inyectiva y por tanto F^* existe

$$\text{Sea: } y = -\frac{1}{4}(x - 3)^2 + 2 \Rightarrow 4(y - 2) = -(x - 3)^2$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 = 4(2 - y) \wedge x < 2$$

$$\Rightarrow |x - 3| = \sqrt{4(2 - y)} \Rightarrow 3 - x = 2\sqrt{2 - y}$$

$$\Rightarrow x = 3 - 2\sqrt{2 - y} \quad \therefore F^*(x) = 3 - 2\sqrt{2 - y}$$

56. Hallar f^* , si existe para:

$$f(x) = (|x - 31| - 30 + x)\sqrt{62 - 2x}$$

Resolución:

Primero tenemos que:

$$62 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 31, \text{ luego}$$

$$f(x) = (31 - x - 30 + x)\sqrt{62 - 2x}$$

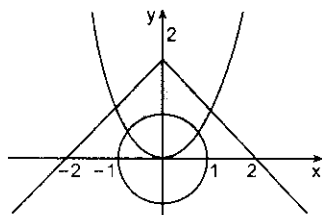
$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{62 - 2x}; x \leq 31$$

Como f es inyectiva, entonces f^* existe,

$$\text{Luego: } y = \sqrt{62 - 2x} \Rightarrow y^2 = 62 - 2x$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}(62 - y^2) \quad \therefore f^*(x) = \frac{1}{2}(62 - x^2)$$

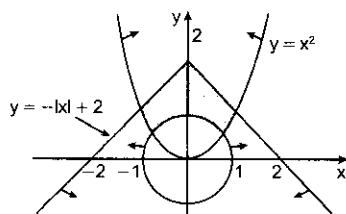
57. En la figura adjunta se muestra una región sombreada.



Hallar el sistema de inecuaciones que mejor define dicha región

Resolución:

De la figura:

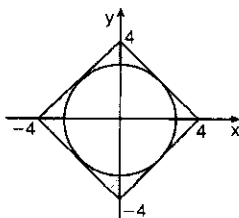


La región sombreada es la representación del sistema de inecuaciones:

$$y \geq x^2 \Rightarrow y \leq -|x| + 2$$

$$\therefore x^2 + y^2 \geq 1$$

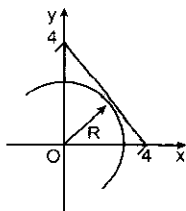
58. En la figura adjunta se muestra una región sombreada.



Hallar el sistema de inecuaciones que mejor define dicha región

Resolución:

La región sombreada es la intersección de la parte interna del rombo con la región externa del disco centrado en el origen, cuyo radio es:



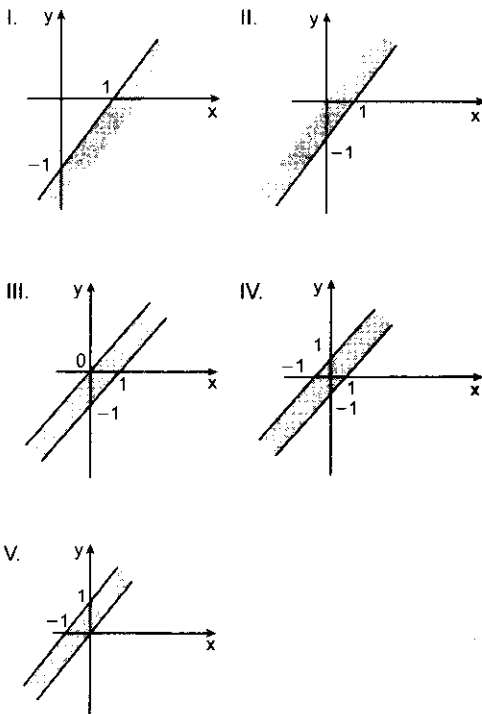
$$R = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Luego, el sistema de inecuaciones será:

$$|x| + |y| \leq 4 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq (2\sqrt{2})^2 = 8$$

59. Si A es un conjunto definido por:

$A = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \sqrt{x-y} \leq 1\}$, hallar la figura que mejor representa la gráfica del conjunto A.



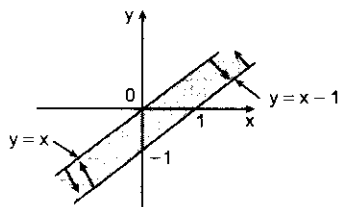
Resolución:

$$A = \{(x; y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \sqrt{x-y} \leq 1\}$$

$$\text{De: } \sqrt{x-y} \leq 1$$

$$\Rightarrow x - y > 0 \wedge x - y < 1 \Rightarrow x \geq y \wedge y \geq x - 1$$

$$\Rightarrow x - 1 \leq y \leq x; \text{ y su gráfica es:}$$



$\therefore$ Solo III

60. Al representar gráficamente el siguiente sistema:

$$x + y \leq a$$

$$-x + y \leq a$$

$$-x - y \leq a$$

$$x - y \leq a$$

Se obtiene una región cerrada, cuya área es 32. Hallar el valor de "a".

Resolución:

$$x + y \leq a \quad \dots(I)$$

$$-x + y \leq a \quad \dots(II)$$

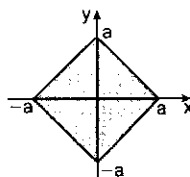
$$-x - y \leq a \quad \dots(III)$$

$$x - y \leq a \quad \dots(IV)$$

Nótese que el sistema anterior es equivalente a:

$$|x| + |y| \leq a$$

Donde: $a \in \mathbb{R}^+$ y cuya gráfica es:



Si S es el área de la región sombreada:

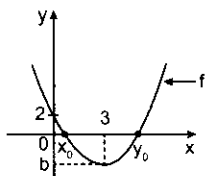
$$S = 2a^2 = 32 \quad \therefore a = 4$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

**PROBLEMA 1 (UNI 2012 - II)**

Cuál de las alternativas es la función cuadrática f , cuyo gráfico se muestra a continuación, sabiendo que $x_0^2 + y_0^2 = 34$.



A) $x^2 - 6x + 2$

B) $x^2 + 6x + 2$

C) $2x^2 - 6x + 2$

D) $2x^2 - 12x + 2$

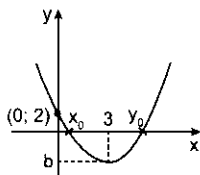
E) $2x^2 + 12x + 2$

Resolución:

Sea la función cuadrática:

$$F(x) = px^2 + qx + 2; (0; 2) \in F$$

$$\text{Vértice: } \left(-\frac{p}{2q}, F\left(-\frac{p}{2q}\right)\right) \Rightarrow -\frac{q}{2p} = 3 \Rightarrow q = -6p$$



$$\text{Dato: } (x_0 + y_0)^2 - 2x_0y_0 = 34$$

$$\left(-\frac{q}{p}\right)^2 - 2\left(\frac{2}{p}\right) = 34$$

$$\Rightarrow (6)^2 - 2\left(\frac{2}{p}\right) = 34 \Rightarrow p = 2 \wedge q = -12$$

$$\therefore F(x) = 2x^2 - 12x + 2$$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - II)

Respecto a la función $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$f(x) = \frac{3x+5}{x-2} \wedge A = \langle 2; +\infty \rangle$$

Indique la secuencia correcta, después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F):

- I. f es inyectiva
- II. f es sobreyectiva
- III. f^* existe, donde f^* indica la inversa de f

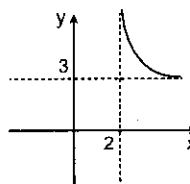
A) VVV

B) VFV

C) VFF

D) FFV

E) FFF

Resolución:

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}; A = \langle 2; +\infty \rangle \Rightarrow f(x) = 3 + \frac{11}{x-2}$$

f es inyectiva

$$\text{Ran}f = \langle 3; +\infty \rangle \Rightarrow f \text{ no es sobreyectiva}$$

$\Rightarrow f^*$ no existe

$\therefore$ I - V; II - F; III - F

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2013 - I)

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, tal que $f(x) \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, y sea $a \in \mathbb{R}$

Si f satisface:

$$|a - 2|(f(x))^2 - a^2 f(x) \leq f(x), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Determine el conjunto de todos los valores de "a" que garantizan que la función f sea acotada.

A) $\{2\}$ B) $\{4\}$ C) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ D) $\mathbb{R} \setminus \{4\}$ E) $\mathbb{R}$ **Resolución:**

I. Para: $f(x) > 0$

$$|a - 2|f(x) - a^2 \leq 1 \Rightarrow |a - 2|f(x) \leq a^2 + 1$$

II. Para: $f(x) < 0$

$$|a - 2|f(x) - a^2 \geq -1 \Rightarrow |a - 2|f(x) \geq a^2 - 1$$

$$\Rightarrow a^2 - 1 \leq |a - 2|f(x) \leq a^2 + 1$$

$$\frac{a^2 - 1}{|a - 2|} \leq f(x) \leq \frac{a^2 + 1}{|a - 2|}; a \neq 2$$

f es acotada, $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

Sean f , g y h funciones reales de variable real.

Dadas las siguientes proposiciones:

- I. $h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g$
- II. Si $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = \mathbb{R}$, entonces $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$
- III. $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

Señale la alternativa que presenta la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

- | | | |
|--------|--------|--------|
| A) VVV | B) VFV | C) FVV |
| D) FVF | E) FFF | |

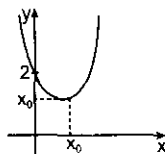
Resolución:

- I. La función compuesta no verifica la propiedad distributiva. (F)
- II. $\text{Dom}(f \circ g): x \in \text{Dg} \wedge g(x) \in \text{Df}$
 $\mathbb{R} \cap \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}$ (V)
- III: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$; la función compuesta verifica la propiedad asociativa. (V)

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

Dada la gráfica de la función cuadrática f , halle el valor de x_0 , sabiendo que f tiene el coeficiente del término de mayor grado igual a uno.



- | | | |
|--------|--------|--------|
| A) 1/4 | B) 1/2 | C) 3/4 |
| D) 1 | E) 3/2 | |

Resolución:

La función cuadrática: $f(x) = a(x - x_0)^2 + x_0$

Se sabe que $a = 1 \wedge (0; 2) \in f$

$$\Rightarrow f(0) = 2; f(0) = x_0^2 + x_0 = 2$$

Reemplazando: $x_0^2 + x_0 - 2 = 0$

$$(x_0 + 2)(x_0 - 1) = 0$$

Del gráfico: $x_0 > 0 \Rightarrow x_0 = 1$

Clave: D



PROBLEMAS

- Hallar el rango de la función: $f(x) = x^2 - 3$
 A) $[3; +\infty)$ B) $[-3; 0]$ C) $\langle -3; +\infty)$
 D) $[0; +\infty)$ E) $\langle -\infty; +\infty)$
- Determinar el rango de la función F , donde:
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/y = F(x) = x^2 + 4x + 7; x \in \langle -5; 4]$
 A) $[12; 39]$ B) $[2; 11]$ C) $[3; 39]$
 D) $\langle 12; 39]$ E) $\langle 12; 39)$
- Determinar el máximo valor de la función:
 $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 4$; en el intervalo $[-1; 1]$
 A) -4 B) 3 C) 1
 D) 7 E) 5
- Si el dominio de la función:
 $f(x) = \sqrt{6 - \sqrt{x^4 - 10x^2 + 25x^2}}$ es $[a; b] \cup [c; d]$
 calcular: $a + b + c + d$
 A) 6 B) 7 C) 8
 D) 9 E) 10
- Si $A = \{1; 2; 3\} \wedge B = \{2; 4; 6\}$
 expresar por extensión la relación R , de A en B ,
 definida así: $R = \{(x; y) \in A \times B / y = 2x\}$
 A) $R = \{(1; 2), (2; 4)\}$
 B) $R = \{(0; 1), (2; 4), (3; 5)\}$
 C) $R = \{(1; 2), (2; 4), (3; 6)\}$
 D) $R = \{(1; 2), (2; 4), (4; 8)\}$
 E) $R = \{(2; 4), (1; 6)\}$
- Hallar el rango de la función:
 $y = F(x) = |\operatorname{sen} x| + \operatorname{sen} x; 0 \leq x \leq 360^\circ$
 A) $\langle -1; 1)$ B) $[-1; 0]$ C) $[1; 2]$
 D) $\langle 0; 2]$ E) $[0; 2]$
- Dada la función F , definida así:
 I. $F(x) > 0; \forall x \in \mathbb{N}$
 II. $F(x + y) = \frac{3}{F(x)} - \frac{1}{F(y)}; \forall x \wedge y \in \mathbb{Z}^+$
 calcular: $\prod_{k=1}^n F(k) \prod_{k=1}^n F(2k)$
 A) 3^n B) 5^n C) 2^n
 D) 1 E) 2
- Dada la función: $F(x) = 2x^2 + 3x + 2; x \in \mathbb{R}$
 donde: $\operatorname{Ran}(F) = [\frac{a}{a+1}; +\infty)$
 Calcular "a".
 A) 6 B) 7 C) 8
 D) 9 E) 10
- Sea la función polinomial $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 12$; encontrar su dominio, si
 su rango es $[-12; 16]$

PROPUESTOS



- A) $[1; +\infty)$ B) $\langle -16; 12)$ C) $\langle -2; 2)$
 D) $\langle -1; 4)$ E) $\langle -4; 1]$
- Sea la función: $F = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \frac{3}{x^2 + 9}\}$
 Se sabe que su rango es: $\langle a; b]$, hallar: $9b + a$
 A) 2 B) 1 C) 3
 D) 0 E) 4
- Sea: $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$, si:
 $A(x) = bf(x) / (1 - x)$, con $b > 0$ y $f(x + b) = f(x)$,
 hallar en qué intervalo se encuentra $A(x)$, cuando:
 $0 < x < 1$
 A) $\langle -6; 7)$ B) $\langle 2; 4)$ C) $\langle 0; 1)$
 D) $\langle 0; 4)$ E) $\langle 1; 4)$
- Indicar verdadero o falso, sabiendo que $f(x) = 3x$
 I. Si: $|x - 1| < 0,1 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0,3$
 II. Si: $|f(x)| = 3 \Rightarrow x \in \{-1 \text{ o } 1\}$
 III. Si: $|f(x) - 3| < 0,6 \Rightarrow |x - 1| < 0,1$
 A) VVV B) VFF C) VFV
 D) VVF E) FVV
- Sea la función: $f: \langle 1; +\infty) \rightarrow \mathbb{N}$, tal que $f(x)$ es el
 número de primos menores o iguales a x .
 Si $g(x) = \frac{f(\sqrt{2})x^2 + 3f(8)}{x + f(f(f(23)))}$, determinar $f(g(4))$.
 A) 0 B) 1 C) $17/7$
 D) $13/5$ E) 3
- Sean las funciones:
 $f(x) = x^2 - \sqrt{x^2 - 1} \wedge g(x) = 1 + \sqrt{x^2 - 1}$
 Sea A el dominio de $(f + g)$ y B el rango de $(f + g)$,
 determinar $A \cup B$.
 A) $\mathbb{R}$ B) $\langle -1; 1)$ C) $\mathbb{R} - \langle -1; 1)$
 D) $[0; +\infty)$ E) $[1; +\infty)$
- Hallar el rango de: $F(x) = \frac{x}{|x|} [(x - 1)^2 + 2|x|]$.
 A) $\mathbb{R} - [-1; 1]$ B) $\langle -1; 1)$ C) $\mathbb{R} - \langle -1; 1)$
 D) $\langle -\infty; 0)$ E) $\langle -1; +\infty)$
- Calcular la suma de elementos del rango de:
 $F(x) = \left\lfloor \frac{3}{x^2 + 1} \right\rfloor$
 siendo: $\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1; n \in \mathbb{Z}$
 A) 1 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

17. Sea f una función definida por:

$$f(x) = e^x + \ln|x|; x \in \mathbb{R}$$

determinar los signos de la función en los puntos:

$$x = -100; x = -\frac{1}{100}; x = \frac{1}{100}; x = 100; \text{ son:}$$

- A) + - - + B) + + - - C) - + + +
D) - + + - E) + - + +

18. Sea: $h(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Si definimos: $g(t) = h(t+2) - h(t-2)$, entonces, se cumple que:

A) $g(t) = \begin{cases} 0; & t < 1 \\ 1; & 1 < t < 2 \\ 0; & t > 2 \end{cases}$

B) $g(t) = \begin{cases} 0; & t \leq 1 \\ 1; & 1 < t < 2 \\ 0; & t \geq 2 \end{cases}$

C) $g(t) = \begin{cases} 0; & t < 1 \\ 1; & 1 \leq t < 2 \\ 0; & t \geq 2 \end{cases}$

D) $g(t) = \begin{cases} 0; & t \leq -2 \\ 1; & -2 < t < 2 \\ 0; & t \geq 2 \end{cases}$

E) $g(t) = \begin{cases} 0; & t < -2 \\ 1; & -2 \leq t < 2 \\ 0; & t \geq 2 \end{cases}$

19. Sea: $F(x+3) = F(x) + F(3)$

$$\text{además: } F(0) = 0; F(3) \neq 0; x \in \mathbb{R}$$

Señala el valor de las siguientes proposiciones:

I. $F(3) = -F(-3)$ II. $3F(6) = 6F(3)$

III. $\frac{F(27)}{F(3)} = 9$

- A) VFV B) VFF C) VVF
D) VVV E) FVV

20. Sea F , una función lineal, tal que:

$$F(x+y) = F(x) + f(y); F(3) = 6.$$

dicha función lineal, geoméricamente, representa una línea recta. Determinar la pendiente de dicha recta.

- A) -1 B) 1 C) -2
D) 2 E) 3

21. Sea $F = \{(x; x^2 - 2) / \text{Dom} f = \langle -2; 2 \rangle\}$

hallar la suma de los elementos del rango de F .

- A) -2 B) -1 C) 0
D) 1 E) 2

22. Si la intersección del dominio y rango de la siguiente función:

$$F(x) = \frac{10x+5}{2x+4}$$

es: $\mathbb{R} - \{a; b\}$, hallar el valor de ab .

- A) 10 B) -5 C) -1
D) 5 E) 10

23. Sean las funciones:

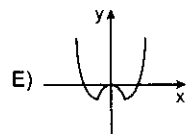
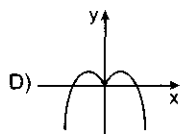
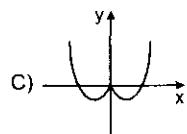
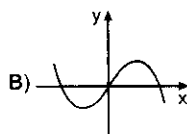
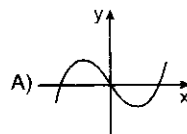
$$F(x) = x^2 - 4x + 8 \wedge G(x) = mx - 1$$

calcular la suma de los valores de m en valor absoluto para que la gráfica de las funciones se corten en un punto (interpretar geoméricamente).

- A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

24. Esbozar la gráfica de la función:

$$F(x) = |x| - 3x$$



25. Sea F una función real de variable real, tal que:

$$F(x^2) - F(y^2) + 2x + 1 = F(x+y)F(x-y)$$

hallar el valor de $F(-0,009)$.

- A) 0,119 B) 0,919 C) 0,091
D) 0,999 E) 0,991

26. Sea F una función lineal, tal que $F(10) = 11$ y $F(50) = 15$. Calcular el valor de: $J = F(3) + F(7)$

- A) 30 B) 28 C) 25
D) 23 E) 21

27. Calcular el área de la región encerrada por la gráfica de las funciones:

$$F(x) = x + 2; G(x) = -\frac{2x}{2} + \frac{16}{3} \text{ y el eje de las abscisas.}$$

- A) 40 B) 30 C) 20
D) 10 E) 5

28. Sea F una función de proporcionalidad, tal que:

$$F(0,1) + F(0,2) + F(1,7) = 0,02$$

hallar el valor de $F(0,01)$.

- A) 10^{-5} B) 10^{-4} C) 10^{-3}
D) 10^{-2} E) 10^{-1}

29. Sea la función: $F(x) = x^2 - 4x; 3x \in \langle -3; 15 \rangle$

Si $\text{Ran}(F) = [a; b]$, hallar el valor de $2a + 3b$.

- A) 7 B) 4 C) -2
D) -4 E) -7

30. Si $[a; b]$ es el rango de la función: $F(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

determinar el valor de: $a^{-1} + b^{-1}$

- A) -8 B) -4 C) -2
D) 4 E) 8

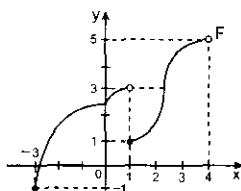
31. Con respecto a la siguiente función:

$$F(x) = 3 + \sqrt{16 - x^2}$$

determinar el $\text{Dom}(F) \cap \text{Ran}(F)$.

- A) $[-4; 7]$ B) $[-4; 3]$ C) $[4; 7]$
D) $[3; 4]$ E) $[3; 7]$

32. Dado el siguiente gráfico:



calcular la suma de los elementos enteros del $\text{Dom} F \cap \text{Ran} F$.

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 9

33. Si el conjunto:

$$F = \{(1; a^2), (1; a+2), (2; a^3+1), (a; 3a+1)\}$$

nos representa a una función, hallar la suma de los elementos del rango.

- A) 20 B) 10 C) 3
D) -1 E) -5

34. Sea el conjunto:

$$F = \{(1; 5), (2; 6), (3; 8), (4; 12), (x; 10)\}$$

Calcular la suma de los valores que no admite x para que F nos represente a una función.

- A) 3 B) 5 C) 10 D) 13 E) 18

35. Indica cuáles de los siguientes conjuntos:

$$F = \{(x-y; xy) / x, y \in \mathbb{R}\}$$

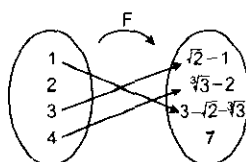
$$G = \{(\sqrt{x^2-4x+4}; |2-x|) / x \in \mathbb{R}\}$$

$$H = \{(t^2+2; t+3) / t \in \mathbb{R}\}$$

nos representan a una función.

- A) Solo F B) Solo G C) Solo H
D) F y G E) G y H

36. Dado el siguiente diagrama sagital:



$$\text{calcular el valor de: } E = \frac{F(1)^3 + F(3)^3 + F(4)^3}{F(1)F(3)F(4)}$$

- A) 9 B) 3 C) 1
D) 1/3 E) 1/9

37. Calcular la suma de los elementos enteros del dominio de la siguiente función:

$$F(x) = \sqrt{x+5} + \frac{1}{\sqrt{8+x}} + \frac{1}{x-7}$$

- A) 6 B) 13 C) 14
D) 19 E) 26

38. Determinar el dominio máximo de la siguiente función: $F(x) = \sqrt{x - \sqrt{x+2}}$

- A) $[-1; 2]$ B) $[0; 2]$ C) $[-1; 0]$
D) $[4; +\infty)$ E) $[2; +\infty)$

39. Determine el rango de $F(x) = x + \frac{2b}{x}$ sabiendo que $\text{Dom} f = \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+$.

- A) $[2\sqrt{b}; +\infty)$ B) $\langle 2\sqrt{b}; +\infty)$
C) $[2\sqrt{2b}; +\infty)$ D) $[-2\sqrt{b}; +\infty)$
E) $[-2\sqrt{b}; 2\sqrt{b}]$

40. Sean las funciones:

$$F(x) = 2x^2 - x - 1$$

$$G(x) = -x^2 + 3x + 1$$

Si $\text{Ran}(F) \cap \text{Ran}(G) = [a; b]$, hallar el valor de: $2a + b$

- A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

41. Dadas las funciones:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = |x^2 - 6x| + |x - 3| + x; x \in [x; 3]$$

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x) = x|x| - 6; x \in \langle -2; 4 \rangle$$

determinar el rango de: $F + G$

- A) $\langle 0; 3]$ B) $[0; 3]$ C) $[-3; 15]$
D) $\langle -3; 3]$ E) $[-3; 3]$

42. Sean:

$$F = \{(-1; 1), (2; 0), (1; -1), (5; -1), (3; 1)\}$$

$$G = \{(3; 0), (5; 4), (1; 0), (-1; 2)\}$$

hallar el número de valores distintos para "y", si:

$$\left(\frac{F^2 G}{G}\right)(x) = y$$

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 1

43. Sea la función lineal $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = |ax^2 - 3ax + a - 2| + ax^2 - ax + 3$$

indicar los valores del parámetro real a , que definan completamente la función f .

- A) $a \in \langle 0; 8/5 \rangle$ B) $a \in \langle 1; 5/3 \rangle$
C) $a \in \langle -8/5; 1 \rangle$ D) $a \in \mathbb{R}$
E) $a \in \langle -8/5; 0 \rangle$

44. Calcular el rango de la función:

$$F(x) = -\sqrt{2x - \sqrt{x}}, \text{ si } \text{Dom} F = x \in [1; 9].$$

- A) $\langle 1; \sqrt{15} \rangle$ B) $\langle -1; \sqrt{15} \rangle$ C) $\langle \sqrt{15}; 1 \rangle$
 D) $[-\sqrt{15}; -1]$ E) $\langle 0; \sqrt{15} \rangle$

45. Siendo:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \text{ impar} \wedge 3 < x < 1\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / x^3 \leq 100 \vee x = 12\}$$

indicar cuáles de las relaciones están definidas de A en B.

$$I. R_1 = \{(9; 2), (5; 4), (7; 3)\}$$

$$II. R_2 = \{(3; 1), (5; 2), (7; 3), (9; 4)\}$$

$$III. R_3 = \{(5; 12), (7; 4)\}$$

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y III E) II y III

46. Si los pares ordenados $(2n; 0)$, $(0; -n)$ y $(n; 1)$; pertenecen a la relación:

$$R = \{(x; y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / y = ax + b\}$$

hallar el valor de: $a + b$.

- A) -2,5 B) -1,5 C) 1,5 D) 2,5 E) 5

47. Determinar el rango de la función F, donde:

$$F: [5; 8] \rightarrow [15; 30] / y = F(x) = 2x + 5$$

- A) $[10; 13]$ B) $[15; 21]$ C) $\langle 10; 13 \rangle$
 D) $[15; 30]$ E) $[35; 65]$

48. Indicar el rango de: $H = \{(x; y) / y = \frac{x}{x-3}\}$

- A) $\mathbb{R} - \{-3\}$ B) $\mathbb{R}$ C) $\mathbb{R} - \{1\}$
 D) $\mathbb{R} - \{0\}$ E) $\mathbb{R} - \{3\}$

49. Determinar el dominio de la función F, donde:

$$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = \sqrt{3 + \sqrt{2 - \sqrt{x}}}$$

- A) $\langle 0; +\infty \rangle$ B) $[0; +\infty)$ C) $[0; 4]$
 D) $[0; 4]$ E) $[-4; 4]$

50. Determinar los pares ordenados $(x; y)$ que verifican la igualdad: $\{x^2; x + y\} = \{y; 2\}$

- A) $\{(-2; 1); (4; 1)\}$ B) $\{(-2; 4); (1; 1)\}$
 C) $\{(1; -2); (1; 4)\}$ D) $\{(4; -2); (1; 1)\}$
 E) $\{(-3; 1); (4; 2)\}$

51. Dados:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -12 < x + 6 < 20\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / 10 < x^2 < 400\}$$

determinar el número de elementos de $A \times B$.

- A) 1054 B) 1320 C) 840
 D) 992 E) 1200

52. Sea $A = \{1; 2; 3\}$ y sean R, S y T relaciones en A, reflexiva, simétrica y transitiva, respectivamente.

$$\text{Si: } R = \{(1; 2), (2; 3), (a; 2), (3; b)\}$$

$$S = \{(1; 3), (c; d)\}$$

$$T = \{(3; e), (2; 3)\}$$

hallar: $b - a + c - d + e$

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6

53. Si tenemos $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in [0; 2) \\ 2x + 1 & ; x \in [2; 5) \end{cases}$

$$\text{Si } x \in [1; \frac{3}{2}), \text{ hallar: } f(2x - 1) - f(2x^2)$$

- A) 14 B) $2x - 1$ C) $-4x$
 D) x^2 E) $2x$

54. Para la función:

$$F(x) = x^2 - 2x + 3 + |x - 10| + |x|; 2 \leq x \leq 10$$

A es el menor valor real y B es el mayor valor real, tal que: $B \leq f(x) \leq A, \forall x \in [2; 10]$. Hallar: $A + B$

- A) 80 B) 96 C) 103
 D) 106 E) 115.

55. Determinar el rango de la función real de variable real, cuya regla de correspondencia es:

$$y = F(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- A) $[-1; 1]$ B) $\langle -1; 1 \rangle$ C) $[-1; +\infty)$
 D) $[0; 1]$ E) $\langle -\infty; 0 \rangle$

56. Determinar el valor máximo de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + b}, a; b \in \mathbb{R}^+$$

- A) $\frac{1}{4\sqrt{ab}}$ B) $\frac{1}{3\sqrt{ab}}$ C) $\frac{1}{2\sqrt{ab}}$
 D) $\frac{1}{\sqrt{ab}}$ E) $\frac{1}{5\sqrt{ab}}$

57. Si, f o g son dos funciones definidas por:

$$f = \{(-3; 4), (-1; 0), (2; 0), (3; 1), (4; 1), (5; 3), (6; 6)\}$$

$$g = \{(-4; 3), (-3; 0), (2; 3), (3; 3), (4; 6), (6; 5), (7; 5)\}$$

hallar la suma de elementos del rango de $(f^2 - 2g)$.

- A) 16 B) 17 C) 18
 D) 20 E) 22

58. Señalar qué conjuntos de pares ordenados son funciones.

$$A = \{(t^2 + 3; t) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{(t + 5; t) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$C = \{(t^2 - 1; t) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$D = \{(3t + 2; t) / t \in \mathbb{R}\}$$

- A) Solo B B) A y B C) Solo B
 D) Todos E) B y D

59. Hallar el rango de:

$$G = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sqrt{5 - x} + \sqrt{3 + x}\}$$

- A) $y \in [\sqrt{2}; 4]$ B) $y \in [0; 4]$ C) $y \in \mathbb{R}$
 D) $y \in [2\sqrt{2}; 4]$ E) $y \in [0; 2\sqrt{2}]$

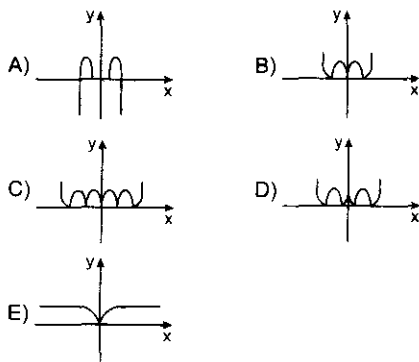
60. Determinar el dominio de la función real de variable real cuya regla de correspondencia viene dada por:

$$y = F(x) = \frac{1}{\sqrt{x-8}} + \sqrt[4]{12-x} + x^6$$

- A) $(8; +\infty)$ B) $(8; 12]$ C) $(8; 12)$
 D) $(-\infty; 12]$ E) $(-\infty; 8)$
61. Sean $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subset \mathbb{R}$, determinar el valor de verdad de cada una de las proposiciones.
- I. Si $\text{Dom}(f+g) \neq \emptyset$; además f y g son acotadas entonces $(f+g)$ es acotada.
- II. Si $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) \neq \emptyset$, además f y g son acotadas entonces $\left(\frac{f}{g}\right)$ es acotada, $g \neq 0$.
- III. Si f y g son acotados, entonces $f \cdot g$ es acotada.
- A) VVV B) VVF C) VFV
 D) FVV E) FVF

62. Sean las funciones:

$$f(x) = x^2 + 3g(x) = 4x, \text{ indique la gráfica de la función } |(f-4|g|)(x)|$$



63. En la siguiente tabla:

x	5	6	7	8
f(x)	8	7	6	5
h(x)	7	8	6	5

determinar el valor de: $\left(\frac{(h+f) \circ f - 2}{h \circ h}\right)(6)$

- A) -1 B) 1 C) 0
 D) 2 E) 3
64. Sean las funciones:
 $f(3x-1) = 6x-2 \wedge g(2x-3) = f(2x-1)$
 hallar el valor de: $\sqrt{\frac{13+(f \circ g)(1)}{h \circ h}}$
- A) $f(-1)$ B) $f(0)$ C) $f(1)$
 D) $g(1/2)$ E) $g(-3/2)$
65. Hallar $g \circ f$, si: $f(x) = 1 + \sqrt{x}$; $x \geq 9$
 $g(x) = x - 2$; $x \in (3; 100]$

- A) $\sqrt{x} + 2$; $x \geq 9$ B) $\sqrt{x} - 1$; $x \geq 9$
 C) $1 - \sqrt{x}$; $x \in [9; 81]$ D) $\sqrt{x} + 2$; $x \in (0; 9]$
 E) $\sqrt{x} - 1$; $x \in [9; 81]$

66. Sean f y g dos funciones definidas por:

$$f(x) = \sqrt{x+1}; x \in [-1; 3]$$

$$g(x) = x^2 + 2x; x \in [0; 5]$$

hallar el dominio de $f \circ g$.

- A) $(0; 1)$ B) $(0; 1]$ C) $[-1; 1]$
 D) $(-2; 5]$ E) $(-1; 1]$
67. Siendo f y g dos funciones definidos por:
 $f(x) = \sqrt{x+5} \wedge g(x) = \sqrt{5-x}$
 hallar el dominio de $f \cdot g$
- A) $(-5; 5)$ B) $[-3; 3]$
 C) $x \geq 5$ D) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$
 E) $[-5; 5]$

68. Dada la función $f: n \rightarrow b \wedge n \rightarrow n-2$

Si se define $f(a) * f(b) = f(a+b)$, hallar: $2 * 3$

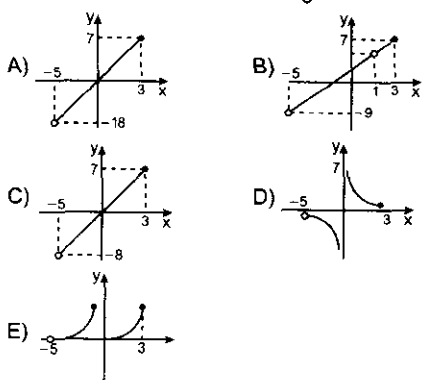
- A) 3 B) -1 C) 7
 D) 5 E) 6

69. Dadas las funciones:

$$f(x) = 2x^2 - x - 1; x \in (-5; 3]$$

$$g(x) = 2x - 2; x \in \mathbb{R}$$

hallar la gráfica de la función $2 \cdot \frac{f}{g}$.



70. Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 2; & x \geq 1 \\ x^3 + 4; & x < 1 \end{cases}$

hallar la función inversa (si existe) de $f(x)$.

- A) $f^*(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1; & x \geq 5 \\ \sqrt[3]{x-4}; & x < -5 \end{cases}$
 B) $f^*(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1; & x > 5 \\ \sqrt[3]{x-1}; & x \leq 5 \end{cases}$
 C) $f^*(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{x-1}; & x \geq 5 \\ \sqrt[3]{x-4}; & x < -5 \end{cases}$
 D) $f^*(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1; & x \geq 5 \\ \sqrt[3]{x-4}; & x < 5 \end{cases}$
 E) No existe

71. Si $g(x) = \begin{cases} (x-4)^4; & \text{si } x-4 \geq 0 \\ 8(x-4); & \text{si } x < 4 \end{cases}$

$h(x) = x + 4$

hallar la función inversa de $(g \circ h)(x)$

- A) $\begin{cases} \sqrt[4]{x}; & x \geq 0 \\ 8x; & x < 0 \end{cases}$ B) $\begin{cases} \sqrt[4]{x}; & x \geq 0 \\ \frac{x}{8}; & x < 0 \end{cases}$
- C) $\begin{cases} \sqrt[4]{x-4}; & x \geq 4 \\ \frac{1}{x}; & x < 4 \end{cases}$ D) $\begin{cases} \sqrt[4]{x}; & x \geq 0 \\ \frac{8}{x}; & x < 4 \end{cases}$
- E) $\begin{cases} \sqrt[4]{x+1}; & x \geq 0 \\ \frac{x}{8}; & x < 0 \end{cases}$

72. Sean f y g dos funciones definidas por:

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4; & x < 0 \\ |3x - 2|; & x > 0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} |x + 1|; & x \leq 0 \\ x - 1; & x > 0 \end{cases}$

hallar el valor de: $\frac{(f+g)(0) - (f \cdot g)(1)}{\left(\frac{f}{g}\right)(3) - (f+g)(-2)}$

- A) 3 B) 5/2 C) 6/5
D) -5/6 E) -6/5

73. Dadas las funciones:

$f(x) = \begin{cases} 1 - x; & x \in (-5; -1] \\ ax - x^2; & x \in [0; 4] \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} x^2 - \sqrt{2}; & x \in (-3; 0] \\ 2x - 6; & x > 2 \end{cases}$

hallar el valor de: $(f \cdot g)(3)$

- A) 1 B) 2 C) 3
D) -2 E) 0

74. Sea f una función definida por:

$f = \left\{ \left(x; \frac{1}{x-1} \right) / x \leq 0 \right\}$

hallar: $f \circ f$.

- A) $\left\{ \left(x; \frac{1}{x-1} \right) / x \leq 0 \right\}$ B) $\left\{ \left(x; \frac{x-1}{x+1} \right) / x > 0 \right\}$
- C) $\left\{ \left(x; \frac{2-x}{x-1} \right) / x < 0 \right\}$ D) $\left\{ \left(x; \frac{x+1}{x+2} \right) / x \geq 0 \right\}$
- E) $\left\{ \left(x; \frac{x-1}{2-x} \right) / x \leq 0 \right\}$

75. Sea $f: \langle 1; 5 \rangle \rightarrow \langle a; b \rangle$

$x \mapsto \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5x + 6}$

indicar el valor de $a+b$, si la función f es suryectiva.

- A) 1 B) 1/4 C) 2
D) 1/8 E) 1/2

76. Hallar $3(a+b-c)$, si

$f = \{(1; \sqrt{a-b}), (8; b+c), (1; \sqrt{c-a}), (8; 3)\}$

Además: $(g \circ f^*)(0) = 2$; $g(x) = x^2 + 1$

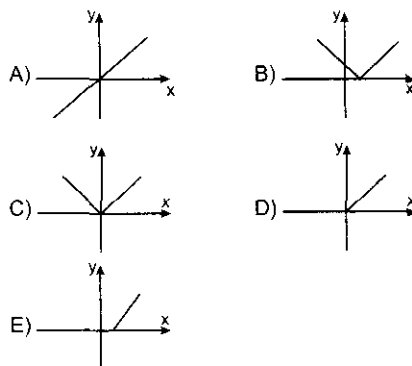
- A) 17/2 B) 7/2 C) 7
D) 9/2 E) 5/2

77. Sean f y g dos funciones definidas por:

$f = \{(x-3); \sqrt{x-3} / x \geq 3\}$

$g = \{(1-x; x^2-2x+1) / x \in \mathbb{R}\}$

determinar la gráfica de fog.



78. Sea f y g de funciones:

$f = \{(3; 1), (2; 3), (5; 2), (7; 4)\}$

$g = \{(2; 3), (7; 5), (9; 7), (11; -4)\}$

determinar: $(f \circ g) \circ f^{-1}(3) + (g^{-1} \circ f)(2)$

- A) -2 B) 3 C) 0
D) 1 E) 7

79. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

- I. Toda función lineal tiene inversa.
II. Toda función cuadrática tiene inversa.
III. Si $f(x) = x^3 + c \Rightarrow \text{Dom} f = \text{Ran} f$
IV. $f \circ f^*(x) = x \wedge f^* \circ f(x) = y$

- A) VVVV B) VFVF C) FVVF
D) VVFF E) VFVV

80. Dadas las funciones: $f(x) = 2x - 1$; $x \in \langle -5; 3 \rangle$

$g(x) = x^2$; $x \in \langle -1; 4 \rangle$

hallar el rango de la función fog.

- A) $\mathbb{R}^+$ B) $[-1; 17]$ C) $[-1; 5]$
D) $\langle -2; 5 \rangle$ E) $\langle 10; 20 \rangle$

81. Dadas las funciones:

$f(x) = \alpha x + 2 \wedge g(x) = x - \beta / \alpha \beta \neq 0$

hallar α y β , si $f \circ g = g \circ f$

- A) $\alpha = 1$; $\beta = 3$
B) $\alpha = 1$; $\beta = 1$
C) $\alpha = 1$ y β es cualquier número real.
D) $\alpha = 2$; $\beta \in \mathbb{R}$
E) $\alpha = 2$ y β es cualquier número real.

82. Hallar la suma de las funciones f que cumplen con la condición:

$(f \circ f)\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4-x}{x}$

- A) $x - \frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $x + \frac{2}{3}$
D) $2x$ E) $2x + \frac{2}{3}$

83. Sean f, g dos funciones definidas por:

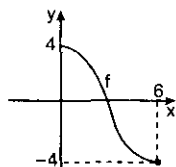
$$f = \{(2; 3), (0; -1), (4; 5), (1; -1)\}$$

$$g = \{(3; 0), (-1; 2), (5; 3)\}$$

Hallar: $\text{Rang}(f \circ g) \cap \text{Rang}(g \circ f)$

- A) $\{3\}$ B) $\{-1; 3\}$ C) $\{0; 2; 3\}$
 D) $\emptyset$ E) $\{1; 2\}$

84. La gráfica de la función: $f: [0; 6] \rightarrow [-4; 4]$ está dada por:



indicar el valor de cada proposición:

- I. f es biyectiva
 II. $|f|$ es biyectiva
 III. $h(x) = f(x) + 4 \quad \forall x \in [0; 6] \Rightarrow \text{Rangh} = \text{Rang}(|f|)$

- A) FVF B) VFF C) VVF
 D) FFF E) VVV

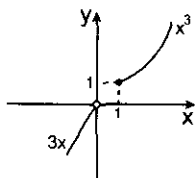
85. Sean las funciones:

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2} \wedge g(x) = \frac{1}{4} + x^2$$

hallar el rango de $f \cdot g$.

- A) $\left[-\frac{7}{4}, \frac{9}{4}\right]$ B) $\left[-\frac{17}{4}, \frac{3}{4}\right]$ C) $\left[\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right]$
 D) $\left[-\frac{17}{4}, \frac{9}{4}\right]$ E) $\left[-\frac{9}{2}, \frac{9}{4}\right]$

86. Sea el gráfico de la función inversa de $f(x)$:



determinar la función $f(x)$

- A) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}; & x \geq 1 \\ \frac{1}{3x}; & x < 0 \end{cases}$ B) $f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x}; & x > 1 \\ \frac{3}{x}; & x < 0 \end{cases}$
 C) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3}; & x \geq 1 \\ \frac{x}{3}; & x < 0 \end{cases}$ D) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}; & x \geq 1 \\ \frac{x}{3}; & x < 0 \end{cases}$
 E) N. A.

87. Sean $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$; $g(x) = \sqrt{x + 2}$, hallar el dominio y la regla de correspondencia de la función h , donde $h(x) = \frac{f(x+2)}{2g(x) - f(x)}$

$$A) h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2 - 4}}; x \in [2; 6) \cup (6; +\infty)$$

$$B) h(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x}}{2\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2 - 4}}; x \in (2; 6) \cup (6; +\infty)$$

$$C) h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x}}{2\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2 - 4}}; x \in [-2; 6) \cup (6; +\infty)$$

$$D) h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{2\sqrt{x+2} - \sqrt{x^2 - 4}}; x \in (2; 6) \cup (6; +\infty)$$

$$E) h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2\sqrt{x} - \sqrt{x^2 - 4}}; x \in (2; 6)$$

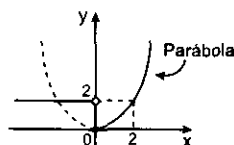
88. Dada la función:

$$f(x) = x^2 \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - 4x \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor; g(x) = \sqrt{-x^2 + 7x + 18}$$

determinar el dominio de: $f^2(x) - 4g(x) + 7f^3(x)g^3(x)$

- A) $[-2; 9]$ B) $[-2; 6]$ C) $(-2; 9)$
 D) $(0; 6]$ E) $(6; 9]$

89. Si la gráfica de la función f es:



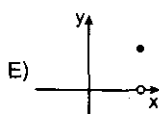
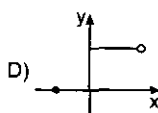
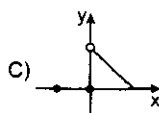
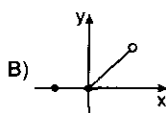
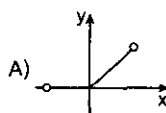
calcular $f(-4) + f(4)$.

- A) 10 B) 12 C) 8 D) 4 E) 2

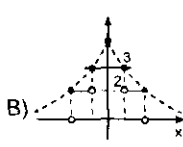
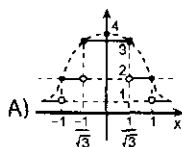
90. Sean las funciones: $f(x) = \sqrt{1+x}$; $-1 \leq x < 2$

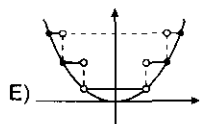
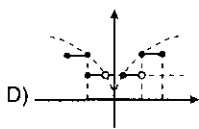
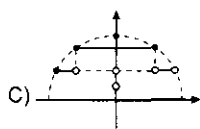
$$g(x) = \begin{cases} \lfloor x \rfloor; & x < 0 \\ x^2 - 1; & x \geq 0 \end{cases}$$

determinar la gráfica de $f \circ g$.



91. Hallar la gráfica de la función: $f(x) = \left\lfloor \frac{4}{1+x^2} \right\rfloor$.





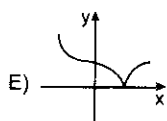
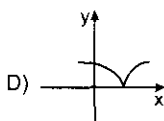
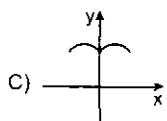
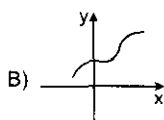
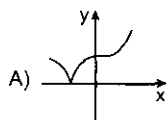
92. Hallar el dominio y la regla de correspondencia de

$$F = f \circ f \circ f, \text{ donde } f(x) = \frac{1}{1-x}$$

- A) $\text{Dom} f = \mathbb{R} \wedge y = 1 - \frac{1}{x}$
 B) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1\} \wedge y = 1 - \frac{1}{x}$
 C) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0; \frac{1}{2}; 1\} \wedge y = x$
 D) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{0; 1\} \wedge y = -x$
 E) $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1; 0; 1\} \wedge y = x$

93. Sea la función: $g(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$

Si $(f \circ g)(x) = 2x + 3$, determinar la gráfica de $|f(x)|$



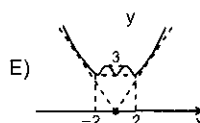
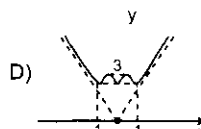
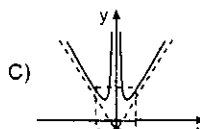
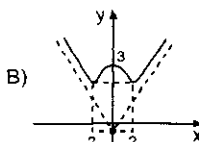
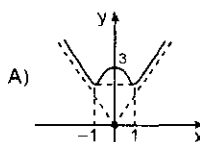
94. Dada la función: $U(x) = \{(x; bx + x^2) / x \in \mathbb{R}\}$

Se sabe además que $(8; 0) \in U(x)$.

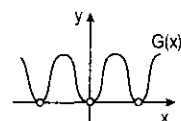
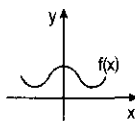
Determinar el valor máximo y mínimo de la función en el intervalo $[-1; 4]$.

- A) máximo = 2 $\wedge$ mínimo = 0
 B) máximo = 8 $\wedge$ mínimo = 0
 C) máximo = 9 $\wedge$ mínimo = -16
 D) máximo = 7 $\wedge$ mínimo = 0
 E) máximo = 4 $\wedge$ mínimo = -2

95. Graficar: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{\sqrt{x^2 + 1}}$

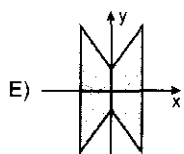
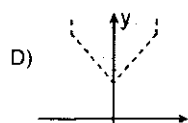
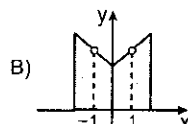
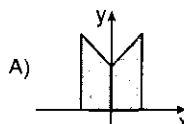


96. Dadas las gráficas de las funciones siguientes:



graficar la siguiente relación:

$$R = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{f(x)}{G(x)} (y - |x| - 1) > 0\}$$



97. Si F es una función definida por:

$$F(x) = \frac{6}{x^2 - 2x + 3} - 2; \forall x \in \mathbb{R}$$

hallar el menor valor de k , tal que:

$$|F(x)| \leq k, \forall x \in \text{Dom} F$$

- A) 1/3 B) 1/2 C) 1
 D) 2 E) 3

98. Si el rango de la función: $F(x) = \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{8x - x^2}$

es $[a; a\sqrt{b}]$, calcular el valor de: $E = a^b + b^a$

- A) 116 B) 125 C) 128
 D) 134 E) 145

99. Si F es una función estrictamente creciente y M es el conjunto definido por:

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} / F(\sqrt{4 - x^2} + \sqrt{x + 1}) > F\left(\frac{x - 3}{|x + 7|}\right) \right\}$$

hallar M .

- A) $(-\infty; -1)$ B) $(-2; +\infty)$ C) $[-2; 4]$
 D) $[-1; 2]$ E) $\{-2; +\infty\}$

100. Dada la función:

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}; & \text{si } x \geq 2 \\ 2 - |x|; & \text{si } -2 < x < 2 \\ x^2 - 4; & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$

Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- I. F es creciente en $(-2; 2)$
 II. F es decreciente en $(-\infty; -2)$
 III. F es decreciente en $(0; 2]$

- A) VVV B) FVV C) VVF
 D) FFV E) FVF

101. Sean G y H dos funciones definidas por:

$$G = \{(1; 0), (3; 3), (-1; 4), (2; 1)\}$$

$$H = \{(-1; -6), (2; -2), (3; 9)\}$$

Si $F \circ G = H$, hallar la suma de los elementos del rango de F.

- A) -3 B) -1 C) 1
 D) 2 E) 3

102. Sean F y G dos funciones: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$G(x) = x + 2 \wedge (F \circ G)(x) = 3x^2 + 14x + 9$$

determinar la regla de correspondencia de F.

- A) $3x^2 + 2x - 7$ B) $3x^2 - 2x + 7$ C) $3x^2 - 7$
 D) $3x^2 + 7$ E) $2x - 7$

103. Sean F y G dos funciones definidas por:

$$F = \{(2; 3), (0; -1), (4; 5), (1; -1)\}$$

$$G = \{(3; 0), (-1; 2), (5; 3)\}$$

determinar el $\text{Ran}(F \circ G) \cap \text{Ran}(G \circ F)$.

- A) $\{3\}$ B) $\{-1; 3\}$ C) $\{0; 2; 3\}$
 D) $\emptyset$ E) $\{1; 2\}$

104. Sean las funciones:

$$F(x) = \sqrt{9 - x^2} \wedge G(x) = \sqrt[4]{x^2 - 1}$$

Hallar el $\text{Dom}(F^3 + 5G)$.

- A) $[-3; -1]$ B) $[1; 3]$ C) $[-3; 1]$
 D) $[-1; 3]$ E) $[-3; -1] \cup [1; 3]$

105. Sean las funciones: $F(x) = \frac{1}{x-2}; x \geq 3$

$$G(x) = 2 + \frac{1}{x}; x \geq 0,5$$

calcular $G \circ F$

A) $(G \circ F)(x) = x, \forall x \in [3; 4]$

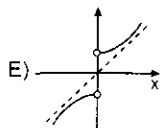
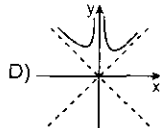
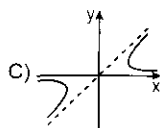
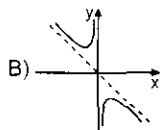
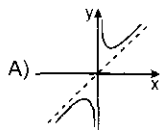
B) $(G \circ F)(x) = \frac{2x+1}{x}, \forall x \geq 3$

C) $(G \circ F)(x) = \frac{x}{x-2}; \forall x > -3,5$

D) $(G \circ F)(x) = \frac{x}{x-1}; \forall x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

E) $(G \circ F)(x) = \frac{2x+1}{x-2}; \forall x \in [0; 2)$

106. Esbozar la gráfica de la función: $F(x) = x + \frac{1}{x}$



CLAVES

- | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|
| 1. C | 16. E | 31. D | 46. D | 61. C | 76. D | 91. A | 106. A |
| 2. C | 17. A | 32. D | 47. B | 62. D | 77. C | 92. E | 107. B |
| 3. C | 18. C | 33. D | 48. C | 63. D | 78. B | 93. A | 108. D |
| 4. E | 19. D | 34. C | 49. C | 64. D | 79. E | 94. C | 109. B |
| 5. C | 20. D | 35. B | 50. B | 65. E | 80. C | 95. A | 110. D |
| 6. E | 21. C | 36. B | 51. D | 66. B | 81. C | 96. C | 111. A |
| 7. C | 22. A | 37. A | 52. C | 67. D | 82. B | 97. D | 112. D |
| 8. B | 23. E | 38. E | 53. C | 68. C | 83. A | 98. E | 113. C |
| 9. C | 24. A | 39. C | 54. D | 69. B | 84. A | 99. D | 114. D |
| 10. C | 25. E | 40. D | 55. A | 70. D | 85. B | 100. B | 115. E |
| 11. B | 26. E | 41. C | 56. C | 71. B | 86. D | 101. C | 116. B |
| 12. D | 27. C | 42. E | 57. D | 72. C | 87. A | 102. A | 117. A |
| 13. B | 28. B | 43. E | 58. E | 73. E | 88. A | 103. A | 118. E |
| 14. C | 29. A | 44. D | 59. D | 74. E | 89. A | 104. E | 119. A |
| 15. A | 30. B | 45. D | 60. B | 75. D | 90. B | 105. A | 120. E |

Logaritmos

21

capítulo

John Napier, barón de Merchiston, llamado también Neper o Nepair, nació en Edimburgo (1550) y murió el 4 de abril de 1617. Fue un matemático escocés reconocido por ser el primero en definir los logaritmos. También hizo común el uso del punto decimal en las operaciones aritméticas. John Napier no fue a la escuela hasta cumplir los 14 años, pero no permaneció mucho tiempo en ella, pues se cree que la abandonó y viajó por Europa continental para continuar sus estudios.

De regreso a Merchiston en 1571, contrajo matrimonio al año siguiente, administrando a partir de entonces los bienes de la familia por encargo de su padre, al tiempo que continuaba sus estudios de matemáticas y teología.

En 1614, Napier publica su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, ejusque usus in utroque Trigonometría; ut etiam in omni logística mathematica, amplissimi, facillimi, et expeditissimi explicatio*, en la que da a conocer los logaritmos que él llamó «números artificiales». Merced a estos números, las multiplicaciones pueden sustituirse por sumas, las divisiones por restas, las potencias por productos y las raíces por divisiones, lo que no solo simplificó enormemente la realización manual de los cálculos matemáticos, sino que permitió realizar otros que sin su invención no habrían sido posibles.



Escocia, 1550 - Escocia, 1617

John Napier

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

El logaritmo de un número real positivo en una base positiva (diferente de la unidad) se define como el exponente al cual hay que elevar a la expresión llamada base para que nos reproduzca el número dado. Así:

$$\log_b N = x \Rightarrow N = b^x$$

— número
— logaritmo
— base

Así: $125 = 5^3 \Rightarrow \log_5 125 = 3$
 $32 = 2^5 \Rightarrow \log_2 32 = 5$
 $81 = 3^4 \Rightarrow \log_3 81 = 4$

Ejemplos:

1. Calcular x en: $\log_{25} 5 = x + 3$

Resolución:

Aplicando la definición de logaritmo se tendrá:
 $5 = 25^{x+3}$

Escribiendo la igualdad en función de la base 5.

$$5 = (5^2)^{x+3} \Rightarrow 5 = 5^{2x+6}$$

Luego: $2x + 6 = 1$

$$\therefore x = \frac{-5}{2}$$

2. Calcular " x " en: $\log_{x+1} 81 = 2$

Resolución:

Aplicando la definición de logaritmo:

$$81 = (x+1)^2 \Rightarrow 9^2 = (x+1)^2$$

Luego: $x+1 = \pm 9$

Si: $x+1 = 9 \Rightarrow x = 8$ (Si es posible)

Si: $x+1 = -9 \Rightarrow x = -10$ (No es posible)

$\therefore$ Única solución: $x = 8$

3. Calcular " x " en $\log_2(x+3) = 7$

Resolución:

Por la definición de logaritmos se tiene:

$$x+3 = 2^7 \Rightarrow x+3 = 128$$

$$\therefore x = 125$$

4. Calcular " x " en $\log_2 x + 3 = 7$

Resolución:

Nótese en la distribución de los elementos con respecto al problema anterior, la diferencia saltante es que en este ejercicio no aparece el símbolo de agrupación (): $\log_2 x + 3 = 7 \rightarrow \log_2 x = 4 \Rightarrow x = 2^4 \therefore x = 16$

5. Resolver: $3 + [\log_x(\log_3 x)] = 0$

Resolución:

Trasladando el primer sumando al segundo miembro: $\log_x[\log_3 x] = -3$

Aplicando la definición: $x^{-3} = \log_3 x$

Nuevamente aplicando la definición:

$$x = 3^{x^{-3}} = 3^{\frac{1}{x^3}}$$

Elevando a x^3 miembro a miembro:

$$3 = x^{x^3} \Rightarrow 3^3 = (x^{x^3})^3$$

$$3^3 = (x^3)^{x^3} \Rightarrow x^3 = 3 \therefore x = \sqrt[3]{3}$$

IGUALDADES FUNDAMENTALES

De las relaciones iniciales:

$$\log_b N = x \quad (I)$$

$$N = b^x \quad (II)$$

Reemplazando (I) en (II):

$$b^{\log_b N} = N \quad \text{Primera igualdad fundamental}$$

Ejemplos:

• $2^{\log_2 7} = 7$ • $3^{\log_3(x-1)} = (x-1)$

Reemplazando (II) en (I):

$$\log_b b^x = x \quad \text{Segunda igualdad fundamental}$$

Ejemplos:

• $\log_5 5^3 = 3$ • $\log_{(x+2)}(x+2)^4 = 4$

PROPIEDADES GENERALES

1. No existe el logaritmo de los números negativos en el campo de los números reales, pero sí en los complejos.

$$\log_3(-9) = \text{? en } \mathbb{R}. \text{ Pero sí en } \mathbb{C}$$

2. $\log_b 1 = 0$

3. $\log_b b = 1$

4. Logaritmo de un producto:

$$\log_b(AB) = \log_b A + \log_b B$$

Ejemplo:

$$\log_3 5 + \log_3 7 + \log_3 2 + \log_3(x+1) = \log_3 70(x+1)$$

5. Logaritmo de un cociente:

$$\log_b \left(\frac{A}{B} \right) = \log_b A - \log_b B$$

$$\log_b \left(\frac{AB}{CD} \right) = \log_b A + \log_b B - \log_b C - \log_b D$$

6. Logaritmo de una potencia: $\log_b N^n = n \log_b N$

Observación: $\log_b N^n \neq \log_b^n N$

7. Logaritmo de una raíz: $\log_b \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_b N$

8. Cambio de base:

Sea " a " la base desconocida o no conveniente.

Sea "b" la base conocida o conveniente.

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

9. Regla de la cadena: $\log_a a \times \log_a b = 1$

Consecuencias:

- $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
- $\log_b a \times \log_c b \times \log_d c \times \log_e d = \log_e a$
- $\log_b a \times \log_a c \times \log_c d \times \log_d e = \log_e b$

10. Si a las componentes de un logaritmo (número y base) los elevamos a la misma potencia o le extraemos la misma raíz el valor del logaritmo no se altera. Es decir:

$$\log_b N = \begin{cases} \log_{b^n} N^n \\ \log_{\sqrt[n]{b}} \sqrt[n]{N} \end{cases}$$

Ejemplo:

$$\log_4 16 = 2 \begin{cases} \log_{4^2} 16^2 = \log_{16} 256 = 2 \\ \log_{\sqrt[4]{4}} \sqrt[4]{16} = \log_2 2 = 2 \end{cases}$$

11. Si se invierte la base de un logaritmo este cambia de signo. Así:

$$\log_{\frac{1}{b}} N = -\log_b N$$

Ejemplo:

$$\log_{\frac{1}{3}} 7 + \log_3 4 = -\log_3 7 + \log_3 4 = \log_3 \frac{4}{7}$$

12. Propiedad de la permuta: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

◀ COLOGARITMO (COLOG)

Se define, como el logaritmo de la inversa del número dado. Recibe también el nombre de aditivo inverso del logaritmo (implica que la suma del logaritmo de un número con su respectivo cologaritmo siempre dará como resultado cero).

$$\text{colog}_b N = \log_b \frac{1}{N} = -\log_b N$$

Ejemplos:

- $\text{colog}_3 7 = -\log_3 7$
- $-\log_2 5 = \text{colog}_2 5$
- $\log_2 7 = -\text{colog}_2 7$

◀ ANTILOGARITMO (ANTILOG)

Se define como el número que da origen al logaritmo.

Entonces: $\text{antilog}_b x = b^x$

Ejemplo:

- $\text{antilog}_2 3 = 2^3$
- $\text{antilog}_x 2 = x^2$

✓ Propiedades

- $\text{antilog}_b(\log_b N) = N$
- $\log_b(\text{antilog}_b x) = x$

Ejemplos:

- $\text{antilog}_3 2 = 3^2 = 9$
- $\text{antilog}_2 x = 2^x$
- $\text{antilog}_8(\log_8 4) = 4$

◀ LOGARITMOS COMO PROGRESIONES

Dadas dos progresiones, una geométrica y otra aritmética ambas ilimitadas en ambos sentidos, de modo tal que tengan dos términos coincidentes (1 y 0), respectivamente, se define logaritmos como progresiones, al logaritmo de un término cualquiera de la PG en una base dada, su valor correspondiente de la PA.

- $q^2, q^1, 1, q, q^2, q^3, \dots$
- $-2r, -r, 0, r, 2r, \dots$

De las dos progresiones es posible establecer que:

r: razón de la progresión aritmética.

q: razón de la progresión geométrica.

- $\log_b 1 = 0$
- $\log_b q = r$
- $\log_b q^2 = 2r$
- $\log_b q^{-1} = -r$

Tomando como referencia la igualdad:

$$\log_b q = r \Rightarrow b^r = q \quad \therefore b = \sqrt[r]{q}$$

$$\therefore b = \frac{\text{razón PA}}{\text{razón de la PG}}$$

◀ SISTEMA DE LOGARITMOS

Existen infinitos sistemas de logaritmos y vienen a estar expresados por la base a emplear. Siendo los más importantes o más usuales.

Logaritmos decimales, vulgares o de Briggs

Es aquel sistema de logaritmos en la cual la base a emplear es el número 10, siendo su notación:

$$\log_{10} N = \log N$$

Logaritmos naturales o neperianos

Es aquel sistema de logaritmos en la cual la base a emplear es el número incommensurable "e" donde $2 < e < 3$; (e = 2,7182). Siendo sus notaciones:

$$\log_e N = \ln N = \text{LN}$$

Ejemplo: $\log_e 7 = \ln 7 = \text{LN}$

Conversión de logaritmos decimales en naturales

$$\ln N = 2,302(\log N)$$

Conversión de logaritmos naturales en decimales

$$\log N = 0,4343(\ln N)$$

« LOGARITMOS DE NÚMEROS NEGATIVOS

Para deducir la fórmula, se debe hallar la forma exponencial del número negativo, expresado como un complejo, conforme se indica:

$$-N = \cdot N + 0i = Ne^{\pi i}$$

Luego:

$$\log(-N) = \log Ne^{\pi i} = \log N + \log e^{\pi i} = \log N + \pi i (\log e)$$

$$\therefore \log(\cdot N) = \log N + 1,36439i$$

Ejemplos:

1. Resolver y hallar x en: $\log_{2x} 1/4 + \log_{\frac{x}{8}} 2 + \log_{8x} 2 = 0$

Resolución:

Transformando la expresión:

$$\log_{2x}(2)^{-2} + \log_{\frac{x}{8}} 2 + \log_{8x} 2 = 0$$

$$-2\log_{2x} 2 + \log_{\frac{x}{8}} 2 + \log_{8x} 2 = 0$$

Por la propiedad de la cadena:

$$\frac{-2}{\log_2 2x} + \frac{1}{\log_2 (x/8)} + \frac{1}{\log_2 8x} = 0$$

Desdoblado en los denominadores:

$$\frac{-2}{1 + \log_2 x} + \frac{1}{\log_2 x - 3} + \frac{1}{3 + \log_2 x} = 0$$

$$2\log_2^2 x + 18 + \log_2^2 x + 4\log_2 x + 3 + \log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$$

$$\text{Luego: } 2\log_2 x + 18 = 0 \Rightarrow \log_2 x = -9$$

$$\therefore x = 2^{-9}$$

2. Resolver: $\log x^{\log x} - \log x - 6 = 0$

Resolución:

La expresión puede escribirse como:

$$\log x \times \log x - \log x - 6 = 0$$

$$(\log x)^2 - \log x - 6 = 0 \Rightarrow (\log x - 3)(\log x + 2) = 0$$

Igualando cada factor a cero se tendrá:

$$\bullet \text{ Si: } \log x - 3 = 0 \Rightarrow \log x = 3 \quad \therefore x_1 = 10^3$$

$$\bullet \text{ Si: } \log x + 2 = 0 \Rightarrow \log x = -2 \quad \therefore x_2 = 10^{-2}$$

3. Resolver: $\log_x \left[\frac{\log_3 2}{\log_3 (\log_{\sqrt{2}} x)} \right]^{\log x} + 1 = 0$

Resolución:

La igualdad puede escribirse como:

$$\log x \log_x \left[\log_{\log_{\sqrt{2}} x} 2 \right] = -1$$

$$\text{Por la regla de la cadena: } \log[\log_{\log_{\sqrt{2}} x} 2] = -1$$

Aplicando la definición de logaritmo:

$$\log_{\log_{\sqrt{2}} x} 2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$$

Aplicando nuevamente la definición de logaritmo:

$$(\log_{\sqrt{2}} x)^{1/10} = 2 \Rightarrow \log_{\sqrt{2}} x = 2^{10}$$

$$\text{Luego: } x = \sqrt{2}^{2^{10}} \quad \therefore x = 2^{2^9}$$

4. Resolver: $\log_x x^x + \log_{x^2} x^{x^2} = 4$

Resolución:

Transformando la ecuación:

$$x \log_x x + x^2 \log_{x^2} x = 4 \Rightarrow x + x^2 \log_{x^2} x = 4$$

Por la regla de la cadena se tendrá que:

$$x + x^2 \left(\frac{1}{\log_x x^2} \right) = 4$$

$$x + x^2 \left(\frac{1}{2 \log_x x} \right) = 4 \Rightarrow x + \frac{x^2}{2} = 4 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

Factorizando:

$$(x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = -4 \text{ (no cumple)}$$

$$x_2 = 2 \text{ (cumple)}$$

5. Calcular: $\log_{\sqrt{2}} \text{antilog}_{\sqrt{2}} \text{colog}_{\sqrt{2}} 8$

Resolución:

$$\text{Sacando raíz: } \log_{\sqrt{2}} \text{antilog}_{\sqrt{2}} \text{colog}_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{86}$$

Expresando el colog en función del logaritmo:

$$\log_{\sqrt{2}} \text{antilog}_{\sqrt{2}} \log_{\sqrt{2}} \sqrt[4]{86} = \log_2 \sqrt[4]{86} = \log_{\sqrt{2}} \sqrt[8]{86}$$

$$\text{Luego: } \log_{\sqrt{2}} \sqrt[8]{2^{-9}} = -9$$

6. Si $x = 2$, calcular: $k = (3^{\log_a x} + 7x^{\log_a 3})^{1/2}$

Resolución:

Aplicando la propiedad de la permuta:

$$k = (x^{\log_a 3} + 7x^{\log_a 3})^{1/2}$$

$$\text{Efectuando el paréntesis: } k = (8x^{\log_a 3})^{1/2}$$

Desdoblado el exponente de x y reemplazando su valor se tendrá:

$$k = [8(2^{\log_a 3})^{\log_a 3}]^{1/2} = (16)^{1/2} \quad \therefore k = 4$$

7. Efectuar: $\sqrt{\frac{2^{2+\log_7 5} + 5^{\log_7 14}}{5^{\log_7 2}}}$

Resolución:

Transformando el numerador del radicando en el radical:

$$K = \sqrt{\frac{2^2 \times 2^{\log_7 5} + 5^{\log_7 (7 \times 2)}}{5^{\log_7 2}}} = \sqrt{\frac{4 \times 2^{\log_7 5} + 5^{1+\log_7 2}}{5^{\log_7 2}}}$$

$$K = \sqrt{\frac{4 \times 2^{\log_7 5} + 5 \times 5^{\log_7 2}}{5^{\log_7 2}}}$$

$$K = \sqrt{\frac{9 \times 5^{\log_7 2}}{5^{\log_7 2}}} \quad \therefore k = 3$$

8. Resolver: $\log_{\frac{x}{8}} 2 + \log_{8x} 2 = \text{colog}_{2x} 4^{-1}$

Resolución:

Por la regla de la cadena en el primer miembro y expresando en función de log el segundo miembro:

$$\frac{1}{\log_2 (x/8)} + \frac{1}{\log_2 (8x)} = \frac{1}{\log_2 (2x)}$$

Desdoblado los denominadores:

$$\frac{1}{\log_2 x - \log_2 8} + \frac{1}{\log_2 8 - \log_2 x} = \frac{2}{\log_2 2 - \log_2 x}$$

Haciendo: $\log_2 x = a$

$$\frac{1}{a-3} + \frac{1}{a+3} = \frac{2}{a+1} \Rightarrow a^2 + a = a^2 - 9$$

$$\Rightarrow a = -9$$

$$\text{Luego, reponiendo } x: \log_2 x = -9 \Rightarrow x = 2^{-9}$$

4. $\log 0,000000145 = -7,838632$ (totalmente negativo)
 $\log 0,000000145 = 8,161368$ (parcialmente negativo)
 Es decir, si: $\log x = -421,037$
 x tiene 421 ceros entre la coma decimal y la primera cifra significa.

5. ¿Cuántos ceros existen entre el cero de los enteros y la primera cifra significativa de $(0,02)^{70}$?

Resolución:

Sea $N = (0,02)^{70}$

Tomando logaritmo a ambos miembros:

$$\log N = \log(0,02)^{70}$$

Luego:

$$\log N = 70 \log 0,02 = 70 \log 10^{-2}$$

$$\log N = 70(\log 2 + \log 10^{-2}) = 70(\log 2 - 2)$$

$$\log N = 70(2,30103) = 70(1,69897) = -118,9279$$

$\therefore N$ tiene 118 ceros

Desigualdades logarítmicas

$$\log_b a > \log_b c \quad \begin{cases} a > c; & b > 1 \\ a < c; & 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$\log_b a > c \quad \begin{cases} a > b^c; & b > 1 \\ a < b^c; & 0 < b < 1 \end{cases}$$

$$b^a > b^c \quad \begin{cases} a > c; & b > 1 \\ a < c; & 0 < b < 1 \end{cases}$$

Ejemplos:

1. Resolver: $\log_{\frac{1}{2}}(5x - 12) < -3$

Resolución:

$$\text{Analizando: } 5x - 12 > 0 \Rightarrow x > (12/5) \quad \dots(I)$$

$$\text{Resolviendo: } 5x - 12 > \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ 5x > 20 \Rightarrow x > 4 \quad \dots(II)$$

La solución estará dada por: $(I) \cap (II): x > 4$

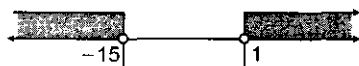
$$\therefore x \in \langle 4; +\infty \rangle$$

2. Resolver: $\log_x \left(\frac{x+15}{x-1} \right) > 1$

Resolución:

$$\text{Analizando: } \frac{x+15}{x-1} > 0$$

Los puntos críticos serán: -15 y 1 ; en la recta numérica:



$$\therefore x \in \langle -\infty; -15 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$$

$$\text{Pero: } x \neq 1, x > 0 \Rightarrow x \in \langle 1; +\infty \rangle \quad \dots(II)$$

$$\text{Resolviendo: } \frac{x+15}{x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x+15-x^2-x}{x-1} > 0$$

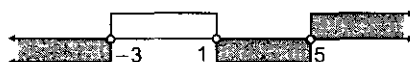
Reduciendo y multiplicando por (-1) :

$$\frac{x^2 - 2x - 15}{(x-1)} < 0$$

Luego, factorizando el numerador:

$$\frac{(x+3)(x-5)}{(x-1)} < 0$$

Los puntos críticos son: -3 , 5 y -1 , en la recta numérica:



$$\text{Donde: } x \in \langle -\infty; -3 \rangle \cup \langle 1; 5 \rangle \quad \dots(II)$$

La solución general será $(I) \cap (II): x \in \langle 1; 5 \rangle$

3. Resolver: $\log_2(2x+4) > \log_2(5x+3)$

Resolución:

$$\text{Analizando: } 2x+4 > 0 \Rightarrow x > -2 \quad \dots(I)$$

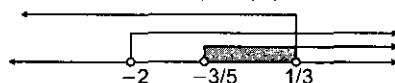
$$5x+3 > 0 \Rightarrow x > -3/5 \quad \dots(II)$$

También como la base (II) es mayor que (I):

$$2x+4 > 5x+3$$

$$-3x > -1 \Rightarrow x < \frac{1}{3} \quad \dots(III)$$

La solución será: $(I) \cap (II) \cap (III)$:



$$\therefore x \in \langle -3/5; 1/3 \rangle$$

4. Resolver: $\log_3|3-4x| > 2$

Resolución:

$$\text{Analizando: } |3-4x| > 3^2; \text{ pero: } |a|^2 = a^2$$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$$|3-4x|^2 > 9^2 \Rightarrow |3-4x|^2 - 9^2 > 0$$

$$\Rightarrow (3-4x)^2 - 9^2 > 0$$

$$(12-4x)(-6-4x) > 0 \Rightarrow (4x-12)(4x+6) > 0$$

Los puntos críticos son: 3 y $-3/2$, en la recta numérica:



$$\therefore x \in \langle -\infty; -3/2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$$

◀ EL NÚMERO e Y LOS LOGARITMOS NATURALES

El número e

Se define este número por la expresión:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

cuyo segundo miembro consta de una infinidad de sumandos.

El número "e" quedará perfectamente determinado por la igualdad anterior, si conseguimos demostrar que la suma:

$$S_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

tiende a un límite finito y determinado, al crecer "n" indefinidamente.

Prescindiendo de los dos primeros términos cuya suma es 2, se observa que los siguientes son, a partir del segundo, respectivamente, menores que los de la progresión geométrica decreciente.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n}, \text{ cuya suma: } \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

tiene por límite la unidad cuando $n \rightarrow \infty$. Luego, S_n es una variable constantemente creciente que tiende a un límite finito y determinado comprendido entre 2 y 3. Dicho límite es el que representamos por la letra "e".

Acabamos de ver que el número "e" no es entero, puesto que está comprendido entre 2 y 3. Veremos ahora que tampoco puede ser fraccionario; pues si se verificase la igualdad:

$$\frac{m}{n} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots$$

multiplicando los dos miembros por $n!$, tendríamos:

$$m(n-1)! = n! + n! + 3 \times 4 \dots n + 4 \times 5 \dots n + \dots + 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

igualdad absurda, puesto que el primer miembro es un número entero, y el segundo miembro se compone de parte entera.

$$n! + n! + 3 \times 4 \dots n + 4 \times 5 + n + \dots + 1$$

seguida de una suma de fracciones.

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots$$

Evidentemente menor que la suma de la progresión:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots$$

$$\text{cuyo límite, según sabemos, es: } \frac{\frac{n+1}{1}}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n} < 1$$

Se deduce, pues, que la hipótesis $e = \frac{m}{n}$ es inadmisble

y, por tanto, el número "e" es irracional.

Se tendrá un valor aproximado del número "e" tomando en la suma que define este número, un número limitado de términos. Si se toman los $n+1$ primeros, el error cometido tendrá por expresión.

$$E = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \dots$$

Hallaremos un límite superior del error, por las siguientes transformaciones:

$$E = \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots \right]$$

$$E < \frac{1}{n!} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots \right] = \frac{1}{n!n}$$

La última desigualdad nos dice que, el error que se comete tomando por valor aproximado del número "e", la

suma de un cierto número de términos, es menor que el último de los términos tomados dividido por el número que indica los términos que le anteceden.

El valor aproximado del número "e" con seis cifras exactas es 2,718281.

Límite de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ cuando "m" crece indefinidamente.

Estamos en el caso de la forma indeterminada 1^∞ . Supongamos, en primer lugar, que "m" crece sin fin y sin límite, pasando únicamente por valores enteros y positivos. En este supuesto, desarrollando la potencia indicada tendremos:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= 1 + m \frac{1}{m} + \frac{m(m-1)}{2!} \frac{1}{m^2} + \\ &\quad \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \frac{1}{m^3} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!} \frac{1}{m^4} + \dots \end{aligned}$$

Desarrollo que puede ponerse en la forma:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \\ &\quad + \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \left(1 - \frac{3}{m}\right) + \dots \end{aligned}$$

Pero, es evidente que:

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) = 1 - \frac{1}{m} - \frac{2}{m} + \frac{2}{m^2} > 1 - \frac{1+2}{m} = 1 - \frac{2 \times 3}{2m}$$

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \left(1 - \frac{3}{m}\right) > \left(1 - \frac{1+2}{m}\right) \left(1 - \frac{3}{m}\right) > 1 -$$

$$\frac{1+2+3}{m} = 1 - \frac{3 \times 4}{2m}$$

y, como por otra parte, los productos contenidos en los primeros miembros de las anteriores desigualdades, son todos ellos menores que la unidad, por serlo cada uno de los factores que lo componen, tendremos:

$$1 > \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) > 1 - \frac{2 \times 3}{2m}$$

$$1 > \left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \left(1 - \frac{3}{m}\right) > 1 - \frac{3 \times 4}{2m}$$

de donde:

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) = 1 - k_1 \frac{2 \times 3}{2m}$$

$$\left(1 - \frac{1}{m}\right) \left(1 - \frac{2}{m}\right) \left(1 - \frac{3}{m}\right) = 1 - k_2 \frac{3 \times 4}{2m}$$

siendo $k_1, k_2, \dots$ números positivos convenientemente elegidos, menores todos que la unidad.

Sustituyendo en el desarrollo de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, resulta:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - k_1 \frac{2 \times 3}{2m}\right) + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \dots\right) - \frac{1}{2m} \left(1 + \frac{k_1}{1} + \frac{k_2}{2!} + \dots\right) \end{aligned}$$

y tomando límites:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \lim \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots\right) -$$

$$\lim \frac{1}{2m} \times \lim \left(1 + \frac{k_1}{1} + \frac{k_2}{2!} + \frac{k_3}{3!} + \dots\right)$$

Pero, el límite del primer paréntesis es el número "e"; el límite del segundo paréntesis es un valor finito no superior a "e", a causa de ser $k_1, k_2, k_3, \dots$ números menores que la unidad, y el límite de $\frac{1}{2m}$ es cero. Luego se tendrá en definitiva:

$$\lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

Si "m" es un número positivo, fraccionario o irracional, existirán siempre dos enteros consecutivos "n" y "n + 1", tales que satisfagan a la limitación:

$$n < m < n + 1$$

y al crecer "m" indefinidamente, crecerán del mismo modo "n" y "n + 1".

Cualquiera que sea el valor de "m" se tiene, en virtud de la limitación anterior:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Pero:

$$\begin{aligned} \lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n &= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \right] \\ &= \lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n-1} : \lim \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = e : 1 = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \times \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \times 1 = e \end{aligned}$$

Luego la expresión $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ comprendida constantemente entre otras dos que tienen por límite común el número "e", tiende al mismo límite.

Si m crece indefinidamente, siendo negativo, se tiene:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} &= \left(\frac{m-1}{m}\right)^{-m} = \left(\frac{m}{m-1}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^m \\ &= \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) \end{aligned}$$

De donde, tomando límites:

$$\begin{aligned} \lim \left(1 - \frac{1}{m}\right)^{-m} &= \lim \left(1 + \frac{1}{m-1}\right)^{m-1} \times \lim \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) \\ &= e \times 1 = e \end{aligned}$$

Queda pues demostrado, para todos los casos en que "m" es real, que la expresión $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ tiene por límite el número "e", cuando "m" crece indefinidamente.

Del resultado anterior se deduce, en la misma hipótesis $m \rightarrow \infty$:

$$\lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x$$

en efecto, se tiene:

$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^m = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}}\right]^x$$

Tomando límites, resulta:

$$\lim \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = \left[\lim \left(1 + \frac{1}{\frac{m}{x}}\right)^{\frac{m}{x}} \right]^x$$

$$\text{Esto es: } \lim \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e^x$$

Límite de $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ cuando α tiende a cero

Si en la expresión $\left(1 + \frac{1}{m}\right)$ hacemos $\alpha = \frac{1}{m}$, al crecer

"m" indefinidamente, α tenderá a cero, esto es, α será infinitamente pequeño, cuando "m" sea infinitamente grande, pero:

$$(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

y tomando límites de ambas expresiones:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = e$$

Logaritmos naturales

Los logaritmos naturales se definen por las progresiones:

$$\dots -2\alpha, -\alpha, 0, \alpha, 2\alpha, \dots, n\alpha, \dots$$

$$\dots (1 + \alpha)^{-2}, (1 + \alpha)^{-1}, 1, (1 + \alpha), (1 + \alpha)^2, \dots, (1 + \alpha)^n, \dots$$

en las cuales α es un número positivo que tiene por límite cero. Según esto, y teniendo en cuenta las definiciones dadas en el *Tratado de Aritmética y Álgebra*, la base de este sistema es el número "e", puesto que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$$



PROBLEMAS

RESUELTOS



1. Determine el valor de x en la ecuación:

$$[{}_4\log_8\sqrt{3}]^{1+\log_{27}2} - 27x = 0$$

Resolución:

Observar: $4^{\log_8\sqrt{3}} = \sqrt{3}^{\log_2 2^2} = \sqrt{3}^{\frac{2}{3}} = 4^{\log_8\sqrt{3}} = 3^{\frac{1}{3}}$

Reemplazando:

$$(3^{\frac{1}{3}})^{9 \times \log_{27}2} = 27^x$$

$$27^{\log_{27}2} = 27^x; \text{ bases iguales}$$

$$\Rightarrow 9^{\log_{27}2} = x \Rightarrow x = 2^{\log_3 3^2}$$

$$\Rightarrow x = 2^{\frac{2}{3}} \therefore x = \sqrt[3]{4}$$

2. Determine el valor de x en:

$$\log_3^{-1}(x-1) = 2 + \log_3(x-1)^{-1}$$

Resolución:

Transformando: $\frac{1}{\log_3(x-1)} = 2 - \log_3(x-1)$

Observar: $x > 1 \wedge x \neq 2$

De la ecuación:

$$1 = 2\log_3(x-1) - \log_3^2(x-1)$$

$$\Rightarrow \log_3^2(x-1) - 2\log_3(x-1) + 1 = 0$$

Conocido

$$\Rightarrow [\log_3(x-1) - 1]^2 = 0 \Rightarrow \log_3(x-1) = 1$$

$$\therefore x = 4$$

3. Sea $a > 0$; $x > 0$ y, además,

$$(7x)^{\log_a 7} - (5x)^{\log_a 5} = 0, \text{ determine el valor de } x.$$

Resolución:

$$\text{De } (7x)^{\log_a 7} = (5x)^{\log_a 5}$$

Tomando logaritmos en base "a":

$$\log_a 7 \times \log_a(7x) = \log_a 5 \times \log_a(5x)$$

$$\log_a 7 (\log_a 7 + \log_a x) = \log_a 5 (\log_a 5 + \log_a x)$$

Efectuando y transponiendo:

$$\log_a^2 7 - \log_a^2 5 = \log_a 5 \times \log_a x - \log_a 7 \times \log_a x$$

$$\log_a^2 7 - \log_a^2 5 = -\log_a x (\log_a 7 - \log_a 5)$$

$$(\log_a 7 + \log_a 5)(\log_a 7 - \log_a 5)$$

$$\Rightarrow \log_a 7 + \log_a 5 = \frac{-\log_a x}{\log_a 7 - \log_a 5}$$

$$\log_a 35 = \log_a x^{-1} \therefore x = \frac{1}{35}$$

4. Se define la función f , mediante:

$$f(x) = \log_2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}), \text{ entonces el } \text{Ran}(f), \text{ es:}$$

Resolución:

$$\text{De } f(x) = \log_2(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})$$

Obs.: $2+x \geq 0 \wedge 2-x \geq 0 \wedge (\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}) > 0$

$$\Rightarrow x \geq -2 \wedge x \leq 2$$

$$x \geq -2 \wedge x \leq 2$$

$$x \geq -2 \wedge x \leq 2$$

De aquí: $-2 < x \leq 2$

- Transformemos la expresión mostrada a radical doble, así:

$$\begin{aligned} \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} &= \sqrt{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x})^2} \\ &= \sqrt{4 + 2\sqrt{4-x^2}} \end{aligned}$$

Ahora, de $-2 \leq x \leq 2$

- Al cuadrado: $0 \leq x^2 \leq 4$
- Por (-1) : $-4 \leq x^2 \leq 0$
- Sumo 4: $0 \leq 4 - x^2 \leq 4$
- Saco $\sqrt{}$: $0 \leq \sqrt{4-x^2} \leq 2$
- Por 2: $0 \leq 2\sqrt{4-x^2} \leq 4$
- Sumo 4: $4 \leq 4 - 2\sqrt{4-x^2} \leq 8$
- Saco $\sqrt{}$: $2 \leq \sqrt{4-2\sqrt{4-x^2}} \leq 2\sqrt{2}$
- $2 \leq \sqrt{2+x} + \sqrt{2-x} \leq 2\sqrt{2}$

Obs.: $0 < f(x) \leq 2 \therefore \text{Ran}(f) = [2; 2\sqrt{2}]$

5. Halle el conjunto solución de la ecuación:

$$[(\log_{i^2} x) - 1]^{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

Resolución:

$$[(\log_{i^2} x) - 1]^{\sqrt{2}} = \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \log_{i^2} x - \log_{i^2} \sqrt{2} = \left(\sqrt{2} \sqrt{\frac{x}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$\Rightarrow \log_{i^2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} \sqrt{\frac{x}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \sqrt{\frac{x}{\sqrt{2}}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt[2]{\frac{x}{\sqrt{2}}} \sqrt{\frac{x}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2} = \sqrt[2]{\sqrt{2}^2} = \sqrt[2]{\sqrt{2}^{\sqrt{2} \sqrt{\frac{x}{\sqrt{2}}}}}$$

De donde: $\frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}+1} \Rightarrow \text{C. S.} = \{\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}\}$$

6. Determine la suma de las raíces de la siguiente ecuación: $[\log_2(2x+1)]^2 + \log_2(2x+1)^2 = 3$

Resolución:

$$[\log_2(2x+1)]^2 + \log_2(2x+1)^2 = 3$$

$$\log_2(2x+1) = a, \text{ la relación queda así:}$$

$$a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$a \begin{matrix} \searrow 3 \\ \nearrow -1 \end{matrix} \Rightarrow a = -3$$

$$a \begin{matrix} \searrow -1 \\ \nearrow 3 \end{matrix} \Rightarrow a = 1$$

$$\log_2(2x+1) = -3 \vee \log_2(2x+1) = 1$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 2^{-3} \vee 2x+1 = 2$$

$$x_1 = \frac{7}{16} \vee x_2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Luego: } x_1 + x_2 = -\frac{7}{16} + \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$$

7. Al resolver la ecuación logarítmica:

$$(\log_2 x) \log_x \left(\frac{\log_x 9\sqrt{3}}{\log_{\sqrt{3}} x} \right) = -1, \text{ el conjunto solución es}$$

$$\{a; b\}. \text{ Determine: } E = ab$$

Resolución:

$$(\log_2 x) \log_x \left(\frac{\log_x \sqrt[3]{3}}{\log_{\sqrt{3}} x} \right) = -1$$

Por la regla de la cadena:

$$\log_2(\log_x \sqrt[3]{3} \times \log_x \sqrt[3]{3}) = -1$$

$$\frac{1}{9} \log_2 3 \times \frac{1}{2} \log_2 3 = 2^{-1}$$

$$\Rightarrow \log_2^2 3 = 9 \Rightarrow \log_2 3 = 3 \vee \log_2 3 = -3$$

$$\Rightarrow x^3 = 3 \vee x^{-3} = 3$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{3} \vee x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow CS = \left\{ \sqrt[3]{3}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \right\} = \{a; b\}$$

$$\therefore ab = 1$$

8. Resolver: $\log_x \left[\frac{\log_3 2}{\log_3 (\log_{\sqrt{2}} x)} \right]^{\log_3 x} + 1 = 0$

Resolución:

$$\log_x \left[\frac{\log_3 2}{\log_3 (\log_{\sqrt{2}} x)} \right]^{\log_3 x} + 1 = 0$$

$$\text{Usando: } \frac{\log_b N}{\log_b a} = \log_a N$$

$$(\log_3 x) \log_x (\log_{\log_{\sqrt{2}} x} 2) = -1$$

$$\log_3 (\log_{\log_{\sqrt{2}} x} 2) = -1$$

$$(\log_{\log_{\sqrt{2}} x} 2) = 3^{-1} \Rightarrow \log_2 (\log_{\sqrt{2}} x) = 3$$

$$\Rightarrow (\log_{\sqrt{2}} x) = 2^3 \Rightarrow x = \sqrt{2}^{2^3} \therefore x = 16$$

9. Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 2 \\ \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3 \log_2 2} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

y determine el valor de: $\log_2 x$

Resolución:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 2 & \dots(1) \\ \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3 \log_2 2} = \frac{5}{4} & \dots(2) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} = \frac{5}{4} \dots(2)$$

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 2 & \dots(1) \\ \frac{1}{2} \log_2 x + \frac{1}{3} \log_2 y = \frac{5}{4} & \dots(2) \end{cases} \quad (-)$$

$$\frac{1}{2} \log_2 x - \frac{1}{3} \log_2 y = -\frac{1}{4}$$

$$\log_2 y \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \log_2 y = 3 \Rightarrow y = 2^3$$

$$\text{En (1): } \log_2 x + \log_{2^2} 2^3 = 2$$

$$\log_2 x + \frac{3}{2} = 2 \Rightarrow \log_2 x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \log_2 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 y} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

10. Si: $\begin{cases} \frac{\log_x(225)}{\log_{xy}(225)} = 7 - 2\log_x y \\ x^2 + y = 50 \end{cases}$, calcule $x + y$

Resolución:

$$\begin{cases} \frac{\log_x(225)}{\log_{xy}(225)} = 7 - 2\log_x y & \dots(1) \\ x^2 + y = 50 & \dots(2) \end{cases}$$

$$\text{De (1), por: } \frac{\log_a N}{\log_b N} = \log_a b$$

$$\Rightarrow \log_x(xy) = 7 - \log_x y^2 \Rightarrow \log_x(xy) + \log_x y^2 = 7$$

$$\Rightarrow \log_x(xy^3) = 7 \Rightarrow xy^3 = x^7 \Rightarrow y^3 = x^6 \Rightarrow y = x^2$$

$$\text{En (2): } 2y = 50 \Rightarrow y = 25$$

$$\text{Luego: } x^2 = 25 \Rightarrow x = 5 \ (x > 0) \therefore x + y = 30$$

11. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\log_{0,01} 0,00001 > 1$

II. Si $f(x) = \log_{0,125}(e^{2x} + e^x - 2) \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

III. Si $g(x) = e^{x+|x|}$ con $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Ran}(f) = [1; \infty)$

Resolución:

I. $\log_{0,01} 0,00001 = \log_{10^{-2}} 10^{-5}$

$$\log_{0,01} 0,00001 = \frac{-5}{-2} \log_{10} 10 = \frac{5}{2} > 1 \quad (V)$$

II. $(x) = \log_{0,125}(e^{2x} + e^x - 2)$

$$e^{2x} + e^x - 2 = (e^x + 2)(e^x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 = e^0$$

$$\Rightarrow x > 0 \Rightarrow \text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+ \neq \mathbb{R} \quad (F)$$

III. $g(x) = e^{x+|x|} = \begin{cases} 1; & x < 0 \\ e^{2x}; & x \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow g(x) \geq 1 \Rightarrow \text{Ran}(g) = [1; +\infty) \quad (V)$$

$\therefore VFF$

12. Si: $\log 5 = a \wedge \log \frac{2401}{125} = b$, calcular: $\log \left(\frac{343}{3125} \right)$

Resolución:

$$\log 5 = a \wedge \log \left(\frac{2401}{125} \right) = b$$

$$\Rightarrow \log 2401 - \log 125 = b \Rightarrow 4\log 7 - 3\log 5 = b$$

$$\Rightarrow \log 7 = \frac{b+3a}{4}$$

$$\log \left(\frac{343}{3125} \right) = \log 343 - \log 3125 = 3\log 7 - 5\log 5$$

$$= 3 \left(\frac{b+3a}{4} \right) - 5a = \frac{3b+9a-20a}{4} = \frac{3b-11a}{4}$$

13. Calcular el valor de la expresión:

$$A = \left[\exp_{27} \left(\frac{1}{6} \right) \right] \left[\exp_3 \left(-\frac{1}{2} \right) \right] \log_{1/2} \left(\frac{1}{4} \right)$$

Resolución:

$$\bullet \exp_a(x) = a^x; a > 0 \wedge a \neq 1$$

$$A = \left(\exp_{27} \left(\frac{1}{6} \right) \right) \left(\exp_3 \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \log_{1/2} \left(\frac{1}{4} \right)$$

$$A = (27^{\frac{1}{6}})(3^{-\frac{1}{2}})(\log_{2^{-1}} 2^{-2}) \therefore A = (3^{\frac{1}{2}})(3^{-\frac{1}{2}}) \left(\frac{-2}{-1} \right) = 2$$

14. A un cierto número "p" se le duplicó y se le toma su logaritmo neperiano y el resultado es igual al triple del logaritmo neperiano del número "p".

Si $\log(4p) = k \log(p)$, hallar el valor de "k".

Resolución:

Según el enunciado del problema:

$$\ln(2p) = 3\ln(p) \Rightarrow 2p = p^3$$

$$\text{Además: } \log(4p) = k\log(p)$$

$$\Rightarrow 4p = p^k \Rightarrow p^{k-1} = 4$$

$$\text{Como } p > 0 \Rightarrow p^2 = 2 \wedge p^{k-1} = 2^2$$

$$\Rightarrow p^{k-1} = (p^2)^2 = p^4 \Rightarrow k-1 = 4 \quad \therefore k = 5$$

15. Determinar cuáles de los enunciados son verdaderos:

I. $\log_2 a^2 = 2\log_a a \quad \forall a \neq 0$

II. Si $x^{\log x} = 10^4$, entonces $x \in [10^{-2}; 10^2]$

III. Si $2^{\log_4 x} = p$, entonces: $p = \sqrt{x}$

Resolución:

I. $\log_2 a^2 = 2\log_2 |a| \neq 2\log_a a \quad (F)$

II. $x^{\log x} = 10^4 \Rightarrow \log(x^{\log x}) = \log 10^4$
 $\Rightarrow (\log x)(\log x) = 4 \Rightarrow (\log x)^2 = 4$
 $\Rightarrow \log x = 2 \vee \log x = -2$
 $\Rightarrow x_1 = 10^2 \vee x_2 = 10^{-2} \quad (V)$

III. $2^{\log_4 x} = p \Rightarrow 2^{\log_2 \sqrt{x}} = p$
 $\Rightarrow \sqrt{x} = p \quad (V)$

Por lo tanto, son verdaderos: II y III

16. Sea: $A = \{x \in \mathbb{Z} / \log_{1/3}(11 - |x|) \geq -2\}$
 calcular el cardinal (A).

Resolución:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / \log_{1/3}(11 - |x|) \geq -2\}$$

De la inecuación:

$$11 - |x| > 0 \wedge 11 - |x| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\Rightarrow |x| < 11 \wedge |x| \geq 2 \Rightarrow 2 \leq |x| < 11$$

$$\Rightarrow -11 < x \leq -2 \vee 2 \leq x < 11$$

$$\text{Luego: } A = \mathbb{Z} \cap \{-11; -2\} \cup \{2; 11\}$$

$$A = \{-10; -9; \dots; -2; 2; 3; \dots; 10\} \quad \therefore n(A) = 18$$

17. Si $0 < a^9 < a^6$, determinar el conjunto solución de la inecuación: $\log_{a^3}(x-1)^2 < \log_{a^2}[(x-1)^3 \sqrt{3-x}]$

Resolución:

$$0 < a^9 < a^6 \Rightarrow 0 < a^3 < a^2$$

$$\Rightarrow a > 0 \wedge a^3 - a^2 < 0 \Rightarrow a^2(a-1) < 0$$

$$\Rightarrow a > 0 \wedge a-1 < 0 \Rightarrow 0 < a < 1$$

$$\text{De: } \log_{a^3}(x-1)^2 < \log_{a^2}[(x-1)^3 \sqrt{3-x}]$$

$$\Rightarrow \log_a(x-1)^{2/3} < \log_a \sqrt{(x-1)^3 \sqrt{3-x}}$$

$$\Rightarrow (x-1)^{2/3} > \sqrt{(x-1)^3 \sqrt{3-x}} > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 > \sqrt{(x-1)^3(3-x)} > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^4 > (x-1)^3(3-x) > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^3(x-1+x-3) > 0 \wedge (x-1)^3(3-x) > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x-4) > 0 \wedge (x-1)(x-3) < 0$$

$$\Rightarrow (x < 1 \vee x > 2) \wedge (1 < x < 3)$$

$$\Rightarrow 2 < x < 3 \quad \therefore \text{CS} = \{2; 3\}$$

18. Al resolver la inecuación logarítmica:

$$\sqrt{\log_2(3^x - 1)} < 1, \text{ se obtiene como conjunto solución } [\log_b; c), \text{ hallar: } a + b + c$$

Resolución:

$$\sqrt{\log_2(3^x - 1)} < 1 \Rightarrow 0 \leq \log_2(3^x - 1) < 1$$

$$\Rightarrow 3^x - 1 > 0 \wedge 2^0 \leq 3^x - 1 < 2^1$$

$$\Rightarrow 3^x > 1 \wedge 2 \leq 3^x < 3$$

$$\Rightarrow x > 0 \wedge \log_3 2 \leq x < 1$$

$$\Rightarrow \log_3 2 \leq x < 1 \Rightarrow x \in [\log_3 2; 1)$$

$$\Rightarrow \text{CS} = [\log_3 2; 1) = [\log_a b; c)$$

$$\text{De donde: } a = 3 \wedge b = 2 \wedge c = 1$$

$$\therefore a + b + c = 6$$

19. Si $A = \{a; b\}$ es el conjunto solución de:

$$(3 - \ln x)(x - 5) > 0, \text{ hallar: } T = ab$$

Resolución:

$$ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

$$(3 - \ln x)(x - 5) > 0$$

$$\Rightarrow (3 - \ln x > 0 \wedge x - 5 > 0) \vee (3 - \ln x < 0 \wedge x - 5 < 0)$$

$$\Rightarrow (\ln x < 3 \wedge x > 5) \wedge (3 < \ln x \wedge x < 5)$$

$$\Rightarrow (0 < x < e^3 \wedge x > 5) \vee (e^3 < x \wedge x < 5)$$

$$\Rightarrow 5 < x < e^3 \vee x \in \emptyset \Rightarrow 5 < x < e^3$$

$$\text{Luego: } A = \{5; e^3\} = \{a; b\}$$

$$\Rightarrow a = 5 \wedge b = e^3 \quad \therefore ab = 5e^3$$

20. Determinar el conjunto solución de la inecuación:

$$\log_a \sqrt{x - \sqrt{2x - 3}} \leq 0, \text{ donde "a" satisface la condición: } |2a^2 + 4a - 3| < 3$$

Resolución:

$$\log_a \sqrt{x - \sqrt{2x - 3}} \leq 0$$

$$\text{De: } |2a^2 + 4a - 3| < 3$$

$$-3 < 2a^2 + 4a - 3 < 3 \Rightarrow 0 < a^2 + 2a < 3$$

$$1 < (a+1)^2 < 3 \wedge \text{como } a > 0 \wedge a \neq 1$$

$$\Rightarrow 1 < a+1 < 2 \Rightarrow 0 < a < 1$$

$$\text{Luego: } \log_a \sqrt{x - \sqrt{2x - 3}} \leq 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{x - \sqrt{2x - 3}} \geq a^0 = 1$$

$$\Rightarrow x - \sqrt{2x - 3} \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq \sqrt{2x - 3}$$

$$\Rightarrow 2x - 3 \geq 0 \wedge (x-1)^2 \geq 2x - 3$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \wedge x^2 - 4x + 4 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{3}{2} \wedge (x-2)^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$\therefore \text{CS} = \left[\frac{3}{2}; +\infty\right)$$

21. Resolver: $\log_2(4^x - 2^x) < 1$

Resolución:

$$\log_2(4^x - 2^x) < 1 \Rightarrow 0 < 4^x - 2^x < 2^1$$

$$\Rightarrow 0 < 4^x - 2^x \wedge 4^x - 2^x < 2$$

$$\Rightarrow 2^x < 2^{2x} \wedge (2^x)^2 - (2^x) - 2 < 0$$

$$\Rightarrow x < 2x \wedge (2^x - 2)(2^x + 1) < 0$$

$$\Rightarrow 0 < x \wedge 2^x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow 0 < x \wedge 2^x < 2 \Rightarrow 0 < x \wedge x < 1$$

$$\Rightarrow 0 < x < 1 \quad \therefore \text{CS} = \{0; 1\}$$

22. Resolver la ecuación logarítmica:

$$\log_x 8 + \log_x (\log_x \sqrt[3]{2}) = 3$$

Resolución:

$$\log_x 8 + \log_x (\log_x \sqrt[3]{2}) = 3$$

$$\begin{aligned}\log_x(8 \times \log_x \sqrt[3]{2}) &= 3 \Rightarrow \log_x \sqrt[3]{2^8} = x^3 \\ \Rightarrow \sqrt[3]{2^8} &= x^{x^3} \Rightarrow 2^8 = (x^{x^3})^3 \\ \Rightarrow 4^4 &= (x^3)^{(x^3)} \Rightarrow x^3 = 4 \quad \therefore x = \sqrt[3]{4}\end{aligned}$$

23. Resolver:

$$\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{7-3x}{x+2}\right) - \log_{1/\sqrt{2}}(x+2) > \log_{1/2} 4$$

Resolución:

$$\begin{aligned}\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{7-3x}{x+2}\right) - \log_{1/\sqrt{2}}(x+2) &> \log_{1/2} 4 \\ \Rightarrow \frac{7-3x}{x+2} > 0 \wedge x+2 > 0 \wedge \\ \log_{\sqrt{2}}\left(\frac{7-3x}{x+2}\right) + \log_{\sqrt{2}}(x+2) &> -2 \\ \Rightarrow 7-3x > 0 \wedge x+2 > 0 \wedge \log_{\sqrt{2}}(7-3x) &> -2 \\ \Rightarrow x < \frac{7}{3} \wedge x > -2 \wedge 7-3x > \sqrt{2}^{-2} \\ \Rightarrow -2 < x < \frac{7}{3} \wedge 7-3x > \frac{1}{2} \\ \Rightarrow -2 < x < \frac{7}{3} \wedge \frac{13}{2} > 3x \\ \Rightarrow -2 < x < \frac{7}{3} \wedge x < \frac{13}{6} \Rightarrow -2 < x < \frac{13}{6} \\ \therefore \text{CS} &= \left(-2; \frac{13}{6}\right)\end{aligned}$$

24. Halle el conjunto solución de:

$$\frac{\sqrt{\ln(ex)} + \sqrt{\ln(x/e)}}{\sqrt{\ln(ex)} - \sqrt{\ln(x/e)}} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

Resolución:

Por propiedad de proporciones:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{\ln(ex)}}{\sqrt{\ln(x/e)}} &= \frac{(\sqrt{2} + 1)^2 + 1}{(\sqrt{2} + 1)^2 - 1} = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{2 + 2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{\ln(ex)}}{\sqrt{\ln(x/e)}} &= \frac{\sqrt{2}(2\sqrt{2} + 2)}{2 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\text{Al cuadrado: } \frac{\ln(ex)}{\ln(x/e)} = 2$$

$$\frac{\ln x + 1}{\ln x - 1} = 2 \Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x = e^3$$

$$\therefore \text{CS} = \{e^3\}$$

25. Resuelva la ecuación: $x^{e \ln x} - \frac{x^{2+e^2}}{e^{2e}} = 0$, e indique su raíz de menor valor.**Resolución:**

$$x^{e \ln x} - \frac{x^{2+e^2}}{e^{2e}} = 0$$

$$\Rightarrow e^{2e} = x^{2+e^2} - e \ln x$$

$$\Rightarrow \ln(e^{2e}) = \ln(x^{2+e^2} - e \ln x)$$

$$\Rightarrow 2e = (2 + e^2 - e \ln x) \ln x$$

$$\Rightarrow e(\ln x)^2 - (2 + e^2) \ln x + 2e = 0$$

$$\begin{array}{rcl} e(\ln x) & \begin{array}{l} \swarrow -2 \\ \searrow -e \end{array} & \\ \ln x & & \end{array}$$

$$\Rightarrow \ln x = \frac{2}{e} \vee \ln x = e$$

$$\Rightarrow x_1 = e^{\frac{2}{e}} \vee x_2 = e^e$$

∴ La menor es: $e^{2/e}$

$$\text{Pues: } \frac{2}{e} < e \Rightarrow e^{2/e} < e^e$$

26. Si $\log_{12} 18 = \alpha$ y $\log_{24} 54 = \beta$, halle el valor de: $E = \alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1$:**Resolución:**

$$\log_{12} 18 = \alpha \wedge \log_{24} 54 = \beta$$

$$\frac{\log_3 18}{\log_3 12} = \alpha \wedge \frac{\log_3 54}{\log_3 24} = \beta$$

$$\Rightarrow \frac{\log_3(2 \times 3^3)}{\log_3(2^2 \times 3)} = \alpha \wedge \frac{\log_3(2 \times 3^3)}{\log_3(2^3 \times 3)} = \beta$$

$$\Rightarrow \frac{\log_3 2 + 2}{2 \log_3 2 + 1} = \alpha \wedge \frac{\log_3 2 + 3}{3 \log_3 2 + 1} = \beta$$

$$\Rightarrow \log_3 2 = \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} \wedge \log_3 2 = \frac{3-\beta}{3\beta-1}$$

$$\Rightarrow \frac{2-\alpha}{2\alpha-1} = \frac{3-\beta}{3\beta-1}$$

$$\Rightarrow (2-\alpha)(3\beta-1) = (3-\beta)(2\alpha-1)$$

$$\Rightarrow 6\beta - 3\alpha\beta + \alpha - 2 = 6\alpha - 2\alpha\beta + \beta - 3$$

$$\Rightarrow \alpha\beta + 5(\alpha - \beta) - 1 = 0$$

27. Resolver: $[4^{\log_8 3}]^{9^{\log_2 2^{-1}}} = 27^x$ **Resolución:**

$$[4^{\log_8 3}]^{9^{\log_2 2^{-1}}} = 27^x \Rightarrow (4^{\log_8 3})^{9^{\log_2 2^{-1}}} = 27^x$$

$$(4^{\log_8 3})^{9^{\log_2 2^{-1}}} = 3^{3x} \Rightarrow (3^{\frac{1}{2}})^{9 \times \frac{1}{2}} = 3^{3x}$$

$$\Rightarrow 3 \times 2^{2/3} = 3x \quad \therefore x = 2^{2/3} = \sqrt[3]{4}$$

28. Si $\log_6 2 = a$; determine $\log_{24} 72$ en función de "a".**Resolución:**

$$\log_6 2 = a$$

$$\log_{24} 72 = \frac{\log_6 72}{\log_6 24} = \frac{\log_6(6^2 \times 2)}{\log_6(6 \times 2^3)}$$

$$\log_{24} 72 = \frac{2 + \log_6 2}{1 + 2 \log_6 2} = \frac{2 + a}{1 + 2a} = \frac{a + 2}{2a + 1}$$

29. Determine el valor de: $E = \log_{ab} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} \right)$; si se cumple que: $\log_{ab} a = 4$ **Resolución:**

$$\log_{ab} a = 4 \wedge \log_{ab}(ab) = 1$$

$$\Rightarrow \log_{ab} a + \log_{ab} b = 1 \Rightarrow \log_{ab} b = -3$$

$$E = \log_{ab} \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}} \right) = \log_{ab} \sqrt[3]{a} - \log_{ab} \sqrt{b}$$

$$E = \frac{1}{3} \log_{ab} a - \frac{1}{2} \log_{ab} b$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{3}(4) - \frac{1}{2}(-3) = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \quad \therefore E = \frac{17}{6}$$

30. Simplificar:

$$A = \log_{\frac{2}{5}} \sqrt{5} - \log_{\frac{5}{2}} \sqrt[5]{5} + \log_{(i+1)} (4 + 2\sqrt{3})$$

Resolución:

$$A = \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} - \log_{\sqrt{5}} \sqrt{5} + \log_{(\sqrt{3}-1)} (4 + 2\sqrt{3})$$

$$A = \left(\log_{\sqrt{5}} 5^{\frac{1}{2}} \right)^2 - 1 + \log_{(\sqrt{3}-1)} (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 1 + 2 = \left(\frac{5}{2} \right)^2 + 1 = \frac{29}{4}$$

31. Hallar la suma de las raíces de la ecuación:

$$1 + 2\log x - \log(x + 2) = 0$$

Resolución:

$$1 + 2\log x = \log(x + 2) = \log 10 + \log x^2 = \log(x + 2)$$

$$\Rightarrow \log 10x^2 = \log(x + 2)$$

$$\Rightarrow 10x^2 = x + 2$$

Por lo tanto, resolviendo resulta: $x = 1/2$

32. Hallar el valor de x diferente de la unidad que satisfice la ecuación: $\log x^2 = (\log x)^2$

Resolución:

$$(\log x)^2 = \log x^2 = 2\log x, \text{ de donde: } (\log x)^2 - 2\log x = 0$$

$$\text{Luego: } \log x(\log x - 2) = 0,$$

$$\text{Resultado: } \begin{cases} \log x = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \log x = 2 \Rightarrow x = 100 \end{cases}$$

$$\therefore x = 100$$

33. Hallar el cologarismo en base 10 de $\sqrt{10}$.

Resolución:

$$\text{colog } \sqrt{10} = -\log \sqrt{10} = -1/2$$

34. Si el logaritmo del número "e" vale 0,434294, hallar cuánto vale el logaritmo natural de 1000.

Resolución:

Por dato, se tiene: $\log e = 0,434294$

$$\log_e 1000 = \ln 1000 = \frac{\log 1000}{\log e} = \frac{3}{0,434294} = 6,9077$$

35. Hallar xyz , si: $\log_3 x^2 = -2$; $\log_4 16 = \sqrt{y}$; $\log_2 9 = 2/3$

Resolución:

$$\text{Si: } \log_3 x^2 = -2 \Rightarrow x^2 = 3^{-2} \Rightarrow x = 3^{-1}$$

$$\log_4 16 = \sqrt{y} \Rightarrow 2 = \sqrt{y} \Rightarrow y = 4$$

$$\log_2 9 = 2/3 \Rightarrow z^{2/3} = 9 \Rightarrow z = 27$$

$$\therefore xyz = 36$$

36. Si se sabe que: $\log_{27} x = 4$, hallar: $\log_3 x$

Resolución:

Sabemos que: $\log_a x = \log_b x / \log_b a$

De donde tenemos que: $\log_b x = \log_a x \log_b a$

$$\therefore \log_3 x = \log_{27} x \log_3 27 = 4 \log_3 3^3 = 12$$

37. Hallar x , si: $\log_b x \log_5 b = 3$

Resolución:

Pasando a base 10

$$\frac{\log x}{\log b} \times \frac{\log b}{\log 5} = 3 \Rightarrow \frac{\log x}{\log 5} = 3$$

$$\log_5 x = 3 \quad \therefore x = 125$$

38. Si: $\log 2 = 0,301$, determinar: $\log[\text{antilog}(\text{colog} 2)]$

Resolución:

De la definición de log y antilog, se tiene:

$$\log[\text{antilog}(\text{colog} 2)] = \text{colog} 2 = -\log 2 = -0,301$$

39. Determinar x en: $(8 - x)^{\log_{16} 7} = 7$

Resolución:

Por propiedad: $m^{\log_b n} = n^{\log_b m}$

la ecuación se convierte en: $7^{\log_{16}(8-x)} = 7$

$$\Rightarrow 8 - x = 16 \quad \therefore x = -8$$

40. Hallar para que valor de "m" se cumple que:

$$\log_m(m^m)^m = (m^2)^m - 2$$

Resolución:

Por propiedad: $m^m(m \log_m m) = m^{2m-4}$

Simplificando tenemos: $m^m - 1 = m^{2m-4}$

Por bases iguales: $m + 1 = 2m - 4$

$$\therefore m = 5$$

41. Hallar x , si: $\log[\log(\log x)] = 0$

Resolución:

Se sabe que: $\log 1 = 0$

$$\Rightarrow \log[\log(\log x)] = \log 1$$

Aplicando el antilogaritmo, se tiene: $\log(\log x) = 1$

Así mismo se tiene que: $\log 10 = 1$

$$\Rightarrow \log(\log x) = \log 10$$

Por el antilogaritmo tenemos: $\log x = 10 \Rightarrow 10^{10} \approx x$

$$\therefore x = (100)^5$$

42. Hallar x , en la siguiente expresión:

$$\log x = 3\log 6 - 2\log 3 + 3\log 2 - 3\log 4$$

Resolución:

Por propiedad:

$$\log x = \log 6^3 - \log 3^2 + \log 2^3 - \log 4^3$$

$$\Rightarrow \log x = \log\left(\frac{6^3}{3^2}\right) + \log\left(\frac{2^3}{4^3}\right)$$

$$\Rightarrow \log x = \log\left(\frac{6^3}{3^2} \times \frac{2^3}{4^3}\right)$$

$$\Rightarrow \log x = \log \frac{2^3 \times 3^3 \times 2^3}{3^2 \times 2^3 \times 2^3} \Rightarrow \log x = \log 3$$

$$\therefore x = 3$$

43. Resolver: $\sqrt[3]{x} \sqrt[3]{(256)^{\log_{4x} x}} = x^x$

Resolución:

De la ecuación: $(256)^{\log_{4x} x} = (x^x)^{x^3}$

Por propiedad: $x^{\log_{4x} 256} = x^{x^4}$

$$\log_4 256 = x^4 \Rightarrow \log_4 4^4 = x^4 \quad 4 = x^4 \quad \therefore x = \sqrt[4]{4}$$

44. Si: $\text{antilog}_{256} x = 625$, hallar x , sabiendo que: $\log_2 = p$

Resolución:

$$256^x = 625 \Rightarrow 4^{4x} = 5^4 \Rightarrow 4^x = 5$$

$$\Rightarrow \log 4^x = \log 5 \Rightarrow \log 2^{2x} = \log(10/2)$$

Por propiedad:

$$2x \log 2 = 1 - \log 2 \Rightarrow 2xp = 1 - p$$

$$\therefore x = \frac{1-p}{2p}$$

45. Hallar x en la siguiente ecuación: $\log_{\log_7(x-2)} 32 = 5$

Resolución:

Aplicando la definición: $[\log_7(x-2)]^5 = 32$

$$\Rightarrow \sqrt[5]{[\log_7(x-2)]^5} = \sqrt[5]{32} \Rightarrow \log_7(x-2) = 2$$

Por definición: $7^2 = x - 2$

$$\therefore x = 51$$

46. Determinar el valor de:

$$w = \log\{\text{antilog}_4[(\log_2 5 + 2) - 1]\}$$

Resolución:

Si efectuamos por partes:

$$\log_2 5 + 2 = \log_2 5 + \log_2 4 = \log_2 20$$

Reemplazando: $w = \log\{\text{antilog}_4(\log_2 20 - 1)\}$

Efectuamos:

$$\log_2 20 - 1 = \log_2 20 - \log_2 2 = \log_2 10$$

$$w = \log\{\text{antilog}_4(\log_2 10)\}$$

$$w = \log\{\text{antilog}_4(\log_4 100)\} \Rightarrow w = \log 100$$

$$\therefore w = 2$$

47. Hallar x : $\log_{(x-1)}(x+5) = 2$

Resolución:

Por definición: $(x-1)^2 = x+5$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 5 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 4 \vee x = -1$$

Se descarta el valor (-1) porque la base no puede ser negativa.

$$\therefore x = 4$$

48. Resolver: $E = 2^{\log_2 3 + 2} + 3^{\log_3 4 - 2} + 5^{\log_5 6 \cdot 2}$

Resolución:

Recordemos la propiedad: $b^{\log_b m} = m$

Desarrollando cada sumando:

$$2^{\log_2 3 + 2} = 2^{\log_2 3} \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$$

$$3^{\log_3 4 - 2} = 3^{\log_3 4} \times 3^{-2} = 4 \times 9 = 36$$

$$5^{\log_5 6 \cdot 2} = 5^{\log_5 6} \times 5^2 = 6 \times 25 = 150$$

Reemplazando los valores en E:

$$E = 12 + 36 + 150 \quad \therefore E = 198$$

49. Hallar la base del logaritmo para la cual debe cumplirse: $\log_a(x^2)^{x^x} = (x^2)^{x-2}$

Resolución:

Por definición: $x^{(x^2)^{x^x}} = (x^2)^{x^x} \Rightarrow x^{2x-4} = x^{x+1}$

Por bases iguales se tiene: $2x - 4 = x + 1$

$$\therefore x = 5$$

50. Si: $\log_5(x-2) = 3 \quad \dots(1)$

$$\log_2(3m-5) = 4 \quad \dots(2)$$

calcular: $x - m$

Resolución:

Aplicando la definición:

De (1): $5^3 = (x-2) \Rightarrow 125 = x-2 \Rightarrow m = 127$

De (2): $2^4 = 3m-5 \Rightarrow 16 = 3m-5 \Rightarrow m = 7$

$$\therefore x - m = 120$$

51. Determine el conjunto solución de la siguiente inecuación: $\log_2(2^x - 2)\log_{1/2}(2^{x+1} - 4) > -2$

Resolución:

$$2^x - 2 > 0 \wedge 2^{x+1} - 4 > 0$$

$$2^x > 2^1 \wedge 2^{x+1} > 2^2 \Rightarrow x > 1 \quad \dots(\alpha)$$

De la inecuación:

$$\log_2(2^x - 2)[- \log_2(2^x - 2)] > -2$$

$$\Rightarrow \log_2(2^x - 2)\log_2[2(2^x - 2)] < 2$$

$$\Rightarrow [\log_2(2^x - 2)][1 + \log_2(2^x - 2)] < 2$$

$$\Rightarrow \log_2(2^x - 2) + \log_2(2^x - 2) - 2 < 0$$

$$\Rightarrow [\log_2(2^x - 2) + 2][\log_2(2^x - 2) - 1] < 0$$

$$\Rightarrow -2 < \log_2(2^x - 2) < 1$$

$$\Rightarrow 2^{-2} < 2^x - 2 < 2^1 \Rightarrow \frac{9}{4} < 2^x < 4$$

Tomando logaritmos en base 2: $\log_2\left(\frac{9}{4}\right) < x < 2$

Intersecando con (α) : $\log_2(9/4) < x < 2$

$$\therefore \text{CS} = (\log_2(9/4); 2)$$

52. Hallar x , en la ecuación: $[4^{\log_8 \sqrt{3}}]^{9^{1-\log_2 2}} - 27x = 0$

Resolución:

Dando forma en el corchete:

$$4^{\log_8 \sqrt{3}} = \sqrt[3]{5^{\log_2 2^2}} = \sqrt[3]{5^2} \Rightarrow 4^{\log_8 \sqrt{3}} = 3^{\frac{2}{3}}$$

Reemplazando:

$$(3^{\frac{2}{3}})^{9 \times 9^{\log_2 2}} = 27^x \Rightarrow 27^{9 \log_2 2} = 27^x$$

$$\Rightarrow 9^{\log_2 2} = x \Rightarrow x = 2^{\log_2 3} \Rightarrow x = 2^{2/3}$$

$$\therefore x = \sqrt[3]{4}$$

53. ¿Cuántos ceros, entre la coma decimal y la primera cifra significativa, tiene el número 0.006^{60} ?

Datos: $\log 2 = 0.301030$ y $\log 3 = 0.477121$

Resolución:

Sea: $N = 0.006^{60} = \left(\frac{6}{10^3}\right)^{60}$

$$\Rightarrow \log N = 60(\log 6 - \log 10^3)$$

$$\Rightarrow \log N = 60(\log 2 + \log 3 - 3) = 60(-2.221849)$$

$$\Rightarrow \log N = -133.31094$$

$$\log N = \underline{-134} + 0.68906 \therefore 133$$

característica

54. Hallar el conjunto solución de la inecuación:

$$\log_3|3 - 4x| > 2$$

Resolución:

$$\log_3|3 - 4x| > 2 \quad \dots(1)$$

$$3 - 4x \neq 0 \Rightarrow x \neq 3/4$$

$$|3 - 4x| > 9$$

$$3 - 4x < -9 \vee 3 - 4x > 9$$

$$x > 3 \vee x < -3/2$$

$$\therefore CS = \langle -\infty; -3/2 \rangle \cup \langle 3; +\infty \rangle$$

55. Calcular el número de cifras del producto $7^{12} \times 12^8$

Datos:

$$\log 7 = 0,84509; \log 2 = 0,301030; \log 3 = 0,477121$$

Resolución:

$$\text{Sea: } N = 7^{12} \times 12^8$$

$$\log N = 12 \log 7 + 8 \log (2^2 \times 3)$$

$$\Rightarrow \log N = 12 \log 7 + 16 \log 2 + 8 \log 3$$

$$\Rightarrow \log N = 4(3 \log 7 + 4 \log 2 + 2 \log 3)$$

Reemplazando valores:

$$\log N = 18,774528 = 18 + 0,774528$$

→ característica

$$\therefore 19$$

56. Si x es un número positivo que tiene en su escritura 6 dígitos en la parte entera, hallar el intervalo de: $\log x$.

Resolución:

$$\text{Asumamos: } x = \overbrace{abcdef}^{6 \text{ cifras}}, mnp$$

$$\text{Donde: } 0 < \overline{mnp} \Rightarrow \log x = 5 + \text{mantisa}$$

$$0 < \text{mantisa} < 1 \Rightarrow 5 < \log x < 6$$

$$\therefore \langle 5; 6 \rangle$$

57. Sea $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, tal que:

$$\log_{ab} \left[\text{co} \log_{ab} \left(\frac{\sqrt{a}}{a} \right) + \frac{1}{2} \log_{ab} b \right] = \log_{ab}^2 a - \log_{ab}^2 b$$

y se define la función "f" de modo que:

$$f(x) = \text{antilog}_2 x + \log_4 x, \text{ hallar: } f\left(\frac{b}{a}\right)$$

Resolución:

Dando forma en el corchete:

$$\text{co} \log_{ab} \left(\frac{\sqrt{a}}{a} \right) = \log_{ab} \left(\frac{a}{\sqrt{a}} \right) = \log_{ab} \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log_{ab} a$$

Reemplazando en la igualdad:

$$\log_{ab} \left[\frac{1}{2} (\log_{ab} a + \log_{ab} b) \right] = (\log_{ab} a + \log_{ab} b)(\log_{ab} a - \log_{ab} b)$$

$$\text{De aquí: } \log_{ab} \left[\frac{1}{2} \log_{ab} ab \right] = \log_{ab} ab \times \log_{ab} (a/b)$$

$$\Rightarrow \log_{ab} (1/2) = \log_{ab} (a/b) \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

$$\text{Si: } f(x) = \text{antilog}_2 x + \log_4 x$$

$$\Rightarrow f(2) = \text{antilog}_2 2 + \log_2 2 \cdot 2^1 = 2^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(2) = 9/2$$

58. Determine el conjunto solución de la inequación:

$$x + \sqrt[3]{8x+3} < x - \sqrt[3]{32^{2x-5}}$$

Resolución:

$$\text{Por teoría de exponentes: } (2^3)^{\frac{x+3}{x+1}} < (2^5)^{\frac{2x-5}{x-1}}$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{3(x+3)}{x+1}} < 2^{\frac{5(2x+5)}{x-1}} \Rightarrow 3 \left(\frac{x+3}{x+1} \right) < 5 \left(\frac{2x+5}{x-1} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{10x+25}{x-1} - \frac{3x+9}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{7x^2+29x+34}{(x-1)(x+1)} > 0$$

$$\Rightarrow 7x^2 + 29x + 34 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Dado que: } \Delta < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x+1) > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$\therefore CS = \langle -\infty; -1 \rangle \cup \langle 1; +\infty \rangle$$

59. Al resolver la siguiente inequación:

$$(x-1)^{\sqrt{x-2}} < \sqrt[3]{(x-1)^{x-2}}$$

el conjunto solución es: $\langle m; +\infty \rangle$, hallar m^2 .

Resolución:

$$\text{De: } (x-1)^{\sqrt{x-2}} < (x-1)^{\frac{x-2}{3}} \quad \dots (1)$$

$$\text{Se sabe que: } x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad \dots (2)$$

De (1), analizamos dos casos:

$$\bullet \quad x-1 > 1 \wedge \sqrt{x-2} < \frac{x-2}{3}$$

$$x > 2 \wedge 9(x-2) < (x-2)^2$$

$$x > 2 \wedge x > 11$$

$$S_1: x > 11$$

$$\bullet \quad 0 < x-1 < 1 \wedge \sqrt{x-2} > \frac{x-2}{3}$$

$$1 < x < 2 \quad \exists x$$

Luego $S_2: x \in \emptyset$

$$CS = (S_1 \cup S_2) \cap (II) = \langle 11; +\infty \rangle \cap [2; +\infty)$$

$$CS = \langle 11; +\infty \rangle$$

$$\Rightarrow m = 11 \quad \therefore m^2 = 121$$

60. Determinar el conjunto solución de la inequación.

$$(1,25)^{1-\log_2^2 x} < (0,64)^{2+\log_2 x}$$

Resolución:

$$\text{De la inequación: } x > 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{Luego: } \left(\frac{5}{4} \right)^{1-\log_2^2 x} < \left[\left(\frac{5}{4} \right)^{-2} \right]^{2+\log_2 x}$$

$$\text{Como base: } \frac{5}{4} > 1$$

$$\Rightarrow 1 - \log_2^2 x < -4 - 2 \log_2 x^2$$

$$\log_2^2 x - 4 \log_2 x - 5 > 0$$

$$\text{Factorizando: } (\log_2 x + 1)(\log_2 x - 5) > 0$$

$$\Rightarrow \log_2 x < -1 \vee \log_2 x > 5$$

$$\Rightarrow x < \frac{1}{2} \vee x > 32$$

Intersecando con (1), se tiene:

$$0 < x < \frac{1}{2} \vee x > 32$$

$$\therefore CS = \langle 0; 1/2 \rangle \cup \langle 32; +\infty \rangle$$

61. Calcular:

$$A = \frac{3}{2} \log a - 5 \text{colog} c - 2 \text{colog} b + \log \frac{\sqrt{a^3}}{c^5 b^2}$$

Resolución:

$$A = \frac{3}{2} \log a - 5(-\log c) - 2(-\log b) + \log \sqrt{a^3} - \log c^5 b^2$$

$$A = \frac{3}{2} \log a + 5 \log c + 2 \log b + \frac{3}{2} \log a - (\log c^5 + \log b^2)$$

$$A = \frac{3}{2} \log a + 5 \log c + 2 \log b + \frac{3}{2} \log a - 5 \log c - 2 \log b$$

$$\therefore A = 3 \log a$$

62. Si: $P = \log \frac{75}{16} - 2 \log \frac{5}{9} + \log \frac{32}{243}$

calcular: $\text{antilog} P$

Resolución:

Cuando se tenga sumas y restas conviene transformar la expresión a logaritmos de un producto o un cociente. Entonces:

$$P = \log \frac{75}{16} + \log \frac{32}{243} - \log \left(\frac{5}{9} \right)^2$$

$$P = \log \frac{75}{16} \times \log \frac{32}{243} - \log \frac{25}{81}$$

$$P = \log \frac{81 \times 75 \times 32}{25 \times 16 \times 243} = \log 2$$

Tomando antilog en ambos miembros:

$$\text{antilog} P = \text{antilog}(\log 2)$$

$$\therefore \text{antilog} P = 2$$

63. Si: $\log_a 00 = m$, hallar: $\log_a 00$

Resolución:

$$\log(a \times 100) = m$$

$$\log a + \log 100 = m \Rightarrow \log a = m - 2 \quad \dots(1)$$

Cambiando de base:

$$\log_a 00 = \frac{\log a \times 10}{\log a} = \frac{\log a + 1}{\log a} \quad \dots(2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\log_a 00 = \frac{m - 2 + 1}{m - 2} = \frac{m - 1}{m - 2}$$

64. Si: $\log 15 = a$; $\log 21 = b$; $\log 35 = c$

calcular: $\log 49$

Resolución:

$$\text{Tenemos: } \log 15 = \log 3 + \log 5 = a \quad \dots(1)$$

$$\log 21 = \log 3 + \log 7 = b \quad \dots(2)$$

Restando (2) menos (1):

$$\log 7 - \log 5 = b - a \quad \dots(3)$$

$$\log 35 = \log 7 + \log 5 = c \quad \dots(4)$$

$$\text{Sumando (3) y (4): } 2\log 7 = b + c - a$$

$$\therefore \log 49 = b + c - a$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



PROBLEMA 1 (UNI 2003 - I)

Hallar el número de raíces que tiene la ecuación:

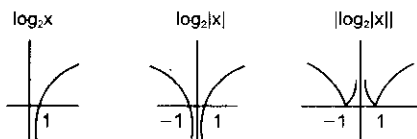
$$|\log_2 x| + x^2 - 5 = 0$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

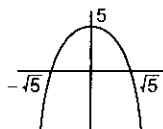
Resolución:

Del problema tenemos: $|\log_2 x| + x^2 = 5 - x^2$

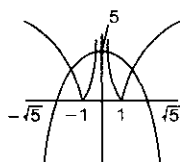
Graficando $|\log_2 x|$:



Graficando $5 - x^2$:



Intersecando ambas gráficas:



Luego:

n.º de intersecciones = n.º de soluciones

Por lo tanto, n.º de soluciones = 4

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2013 - II)

Las soluciones reales de la ecuación:

$$\log_5(x^2 - 20x) = 3 \text{ son:}$$

- A) no existen B) únicamente $x = 25$
C) únicamente $x = 5$ D) $x_1 = 5$; $x_2 = 25$
E) $x_1 = -5$; $x_2 = 25$

Resolución:

Hallando el CVA: $x^2 - 20x > 0$

$$x(x - 20) > 0 \Rightarrow x < 0 \vee x > 20$$

$$\text{Luego: } \log_5(x^2 - 20x) = \log_5 125$$

$$x^2 - 20x = 125 \Rightarrow x^2 - 20x - 125 = 0$$

$$\text{Resolviendo: } (x - 25)(x + 5) = 0$$

$$x = -5 \vee x = 25$$

Como estos valores satisfacen al CVA, entonces son las soluciones reales: $x_1 = -5$; $x_2 = 25$

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2004 - II)

Determine la base "a", tal que: $\log_a \sqrt{27} = -\frac{1}{2}$

- A) $1/243$ B) $1/81$ C) $1/27$
D) $1/9$ E) $1/3$

Resolución:

Sabemos: $\log_b N^n = n \log_b N$

$$\text{Aplicando: } \frac{1}{2} \log_a 27 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \log_a 27 = -1$$

$$\text{Luego: } a^{-1} = 27 \Rightarrow a = \frac{1}{27}$$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2005 - I)

 El conjunto solución de la inequación: $\log_3|3 - 4x| > 2$ es:

A) $\left(-\frac{3}{2}; 3\right)$ B) $\mathbb{R} - \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$ C) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}$

D) $\mathbb{R}$ E) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\}$

Resolución:

De la inequación se tendrá:

$$x \neq \frac{3}{4}; \log_3|3 - 4x| > 2 \Leftrightarrow \log_3|3 - 4x| > \log_3 9$$

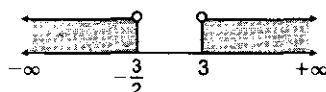
Siendo la base mayor que 1:

$$\Rightarrow |3 - 4x| > 9;$$

$$\text{De donde: } 3 - 4x > 9 \vee 3 - 4x < -9$$

$$\text{Resolviendo: } -\frac{3}{2} > x \vee 3 < x$$

Grafiquemos las desigualdades:



Entonces: $CS = \mathbb{R} - \left[-\frac{3}{2}; 3\right]$

Clave: B
PROBLEMA 5 (UNI 2005 - II)

Al resolver la ecuación:

 $x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x \log_{1424} 712 + \log_{1424} 72$ entonces podemos decir, que el número de soluciones es:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Resolución:

$$x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x \log_{1424} 712 + \log_{1424} 72$$

$$x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x \log_{1424} \left(\frac{1424}{2}\right) + \log_{1424} 72$$

$$x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x \log_{1424} 1424 - x \log_{1424} 2 + \log_{1424} 72$$

$$x + \log_{1424}(1 + 2^x) = x - \log_{1424} 2^x + \log_{1424} 72$$

$$\log_{1424}(1 + 2^x) = \log_{1424} \left(\frac{72}{2^x}\right) \Rightarrow 1 + 2^x = \frac{72}{2^x}$$

$$(2^x)^2 + 2^x - 72 = 0 \Rightarrow (2^x + 9)(2^x - 8) = 0$$

$$\text{Como: } 2^x + 9 > 0 \Rightarrow 2^x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 2x = 8 = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

Por lo tanto, la ecuación tiene una única solución.

Clave: B



PROBLEMAS

PROPUESTOS



1. Si $3^x = 2$; $2^y = 3$, hallar: $\log x + \log y$
A) 0 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

2. Halle x en: $\log x^2 + \log x^3 = 10$
A) 10 B) 100 C) 1000
D) 0 E) 1

3. Si $\log_{35} 7 = a$, halle $\log_{35} 35$ en función de "a".
A) $\frac{1}{1+a}$ B) $\frac{1}{1-a}$ C) $\frac{1}{3+a}$
D) $\frac{1}{a}$ E) 0

4. Indicar el equivalente reducido de:
 $\frac{1}{\log_8 15 + 1} + \frac{1}{\log_3 40 + 1} + \frac{1}{\log_5 24 + 1}$
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

5. Reducir: $\log_7 3^{\log_8 7^{\log_5 6}}$
A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

6. Resolver la ecuación: $\log \sqrt{x} - \log 3 = \frac{1}{2}$ y determinar el valor de x .
A) $9\sqrt{10}$ B) 90 C) $3\sqrt{10}$
D) 60 E) 30

7. Si $\log_6 2 = a$, cuánto vale $\log_6 3$.
A) $2a$ B) a^1 C) $1 - a$
D) $a + 1$ E) $2a - 1$

8. ¿Cuál es el número que es igual a su logaritmo en base $\sqrt{2}$? Dar la suma de los valores que cumplan.
A) 4 B) 6 C) 5
D) 8 E) 7

9. Calcular $(x + y)$, si se verifica la relación:
 $\log x = \frac{\log(2x)}{2} = \frac{\log(2y)}{3}$
A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

10. Resolver: $\frac{\log_7 x^2}{5^{\log_7 x}} = 64$
A) 8 B) 6 C) 5
D) 4 E) 3

11. Si: $\log_{16} a = \frac{4}{n+2}$, calcular: $\sum_{k=2}^n \log_{x_{16}} k$
A) n B) $n + 1$ C) 0
D) $n - 1$ E) $\frac{n(n+1)}{2}$

12. Si: $\log_2 x = y$, halle: $\log_{2^2} x^3$
A) 1 B) x C) y
D) y^2 E) $9y^2$

13. Reducir: $(\log_2 3^4 + \log_4 9)(\log_2 2)$
A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{4}{5}$ C) $\frac{9}{5}$
D) 1 E) 2

14. Efectuar: $\log_{15/512} 8^{\sqrt[5]{64}} + \log_{15/216} 6^{\sqrt[6]{36}}$
A) 14 B) 12 C) 16
D) 18 E) 20

15. Si: $\log_2 3 = a$ y $\log_2 5 = b$
calcular: $\log_2 1,5 + \log_5 10$
A) $\frac{ab+1}{b}$ B) ab C) $\frac{a-1}{b}$
D) $\frac{a^2}{b}$ E) $\frac{a}{b}$

16. De las ecuaciones: $\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 3 \\ 7^{\log_2(x-7)} = 6 \end{cases}$
determinar el valor de: $(3x + 5y)$
A) 26 B) 30 C) 40
D) 49 E) 50

17. Si $\log 15 = m$; $\log \frac{3}{5} = n$
calcular $\log_{25} 9$ en función de m ; n .
A) $\frac{m+n}{m-n}$ B) $\frac{2m+n}{m}$ C) $\frac{2m-n}{m+3n}$
D) $\frac{m-n^2}{m+5n}$ E) $\frac{m+4n}{m-3n}$

18. Luego de resolver $(\log_2 x)(\log_2 x - 4) = \log_2 x - 6$, indicar la suma de soluciones.
A) 12 B) 15 C) 16 D) 14 E) 10

19. Si $M = \log_3 6$ y $N = \log_3 2$, halle: $M - N$
A) 1 B) 0 C) -1 D) 2 E) -2

20. Suma $\log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 1024$
A) 50 B) 55 C) 110
D) 220 E) 1024

21. Si $a = \log_2 16$; $b = \log_{16} 27$, halle: $a + 2b$
A) 25 B) 28 C) 23
D) 16 E) 18

22. Reducir: $\frac{\log_2 15 - \log_2 5}{\log_2 3}$
A) $\sqrt[3]{2}$ B) $1/2$ C) 2 D) $\sqrt{3}$ E) 1

23. Halle $M = 4^{\log_2 5} + 27^{\log_3 4}$
 A) 85 B) 86 C) 89
 D) 92 E) 95
24. Si $A = 3^{\log_3 5} + 6^{\log_3 9} + (9^3)^{\log_9 2}$, determine el valor de: $A + 5$
 A) 22 B) 27 C) 21
 D) 16 E) 20
25. Resuelva la ecuación:
 $\log_3 x + \log_3(6x - 5) - \log_3 21 = 0$
 A) $(7/3)$ B) $(3/2)$ C) $(7/3; 3/2)$
 D) $(2/3)$ E) $(4/5)$
26. Resuelva: $\log x + \log y = 8 \wedge x^{\log y} = 10^7$
 calcule $\sqrt[3]{xy}$.
 A) 0 B) 1 C) 10
 D) 100 E) 1000
27. Indique el mayor valor de x que verifica:
 $2^{\log_7(x^2 - 7)} = 3^{\log_7 4}$
 A) -4 B) -2 C) 0
 D) 2 E) 4
28. Calcule el valor de:
 $W = 6\log_9 12 \log_{24} 18 - 2\log_9 12 - \log_{24} 18$
 A) 1 B) 2 C) 3
 D) 6 E) 12
29. Sabiendo que: $b = \sqrt[4]{10^7} \wedge T_n = n^{-1} + 1$
 determine el valor de la expresión: $S = \sum_{n=1}^{999} \log_b T_n$
 A) 5/7 B) 12/7 C) 7/5
 D) 8/5 E) 13/4
30. Resuelva $\log_7(x - 5) < 1$ e indique la suma de valores enteros de su conjunto solución.
 A) 30 B) 40 C) 51
 D) 57 E) 63
31. Si $x = \log_{6/2} \sqrt[3]{4 \cdot 2} + \log_{2/5} \frac{4}{25}$, calcule: $y = 3^x = x$
 A) $\log_3 7$ B) $\log_3 5$ C) $\log_3 4$
 D) $\log_7 3$ E) $\log_7 5$
32. Resuelva:
 $5^{\log_7 3} + 2^{\log_2 x} + \frac{1}{\log_3 4} < 3^{\log_7 5} + \log_3 9 + \log_4 12$
 A) $\{0; 3\}$ B) $\{-\infty; 3\}$ C) $\{0; 7\}$
 D) $\{0; 9\}$ E) $\{0; 10\}$
33. Resuelva $\log_3^2 x + 10 = \log_3 x^7$ e indique la mayor solución.
 A) 9 B) 81 C) 243
 D) 3 E) 24
34. Si $3^{\log_3(x - 5)} + x^{\log_3(3x - 5)} = 20$, hallar el valor de x .
 A) 5 B) 2 C) 3
 D) 4 E) No existe
35. Teniendo en cuenta que:
 $\log_b(x^2 - 2\sqrt{a}x + 2a)^{\log_a b} = 1; a > 1$; señale $\log_a a^2$
 A) 1 B) 2 C) 3
 D) 4 E) 0
36. Si: $a; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, además $\log_{ab} a = 5$,
 halle: $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$
 A) 3^{-1} B) 3 C) $7/3$
 D) $11/3$ E) 1
37. Si $\frac{1 + \log_a b}{1 - \log_a b} = 4$; $a; b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, determine el valor de: $\frac{\sqrt{ab}}{a + b}$
 A) 1 B) $1/2$ C) $1/4$
 D) 2 E) 4
38. Grafique $f(x) = \log x^5$. Si $x \in [1; 10]$, calcule su rango.
 A) $[0; 5]$ B) $[0; 15]$ C) $[0; 10]$
 D) $[0; 16]$ E) $[0; 12]$
39. Halle los valores de x que verifican: $\log x^2 = (\log x)^2$
 A) 10; 1 B) 2; -1 C) 100; 1
 D) $\frac{1}{10}$; 1 E) $\frac{1}{100}$; 1
40. Halle la suma de soluciones de la ecuación:
 $1 + 2\log_2 \log_4(10 - x) = \frac{2}{\log_4 x}$
 A) 6 B) 10 C) 8
 D) 2 E) 24
41. Resuelva:
 $\log_{\sqrt{5}} \sqrt{4x^4 + 32x^2 + 64} + \log_{\sqrt{5}} \sqrt[3]{2(x^2 + 4)} = 8$
 e indique el valor de: $x^3 - 2x^2 - 4$
 A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6
42. Halle x en: $a^{(\log_a \log x^2)(\log_a b)} + b^{(\log_a \log x^3)(\log_a a)} = 1$;
 si $\{a; b\} \subset \mathbb{R}^+ \wedge a \neq 1 \wedge b \neq 1$.
 A) $\sqrt[5]{10}$ B) $\sqrt[10]{5}$ C) 10
 D) 5 E) $\sqrt[5]{5}$
43. Determine "a" para que la siguiente ecuación
 $2\log(x + 3) = \log(ax)$ tenga una solución única.
 A) -12 B) 12 C) $\{-12; 12\}$
 D) $\{2; 12\}$ E) $\{0; 12\}$
44. Resuelva: $\log_5(5^x + 10) = \log_5(5^x + 4) + x$
 A) $\{-1; \log_5 2\}$ B) $\{\log_5 2\}$ C) $\{5\}$
 D) $\{\log_5 2\}$ E) $\{1; \log_5 2\}$
45. Dada la ecuación: $\log_a a + \log_a 3 = \log_a 9$, halle:
 $a_{\max} + a_{\min}$

- A) $1/9$ B) $9/2$ C) $2/3$
 D) $10/3$ E) $3/4$
46. Resuelva: $\log_x \sqrt{x}^{4x-8} = 3x + 2$
- A) $\left\{\frac{1}{4}\right\}$ B) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ C) $\{4\}$
 D) $\{2\}$ E) $\left\{\frac{1}{8}\right\}$
47. Cuántas soluciones tiene la ecuación:
- $$\frac{1}{2} \log_x(x-2)^2 + \frac{1}{3} \log_x(x+1)^3 = 2 \log_x x$$
- A) 3 B) 2 C) 1
 D) 0 E) 4
48. Resuelva $\log(x+1) + \log(x-1) = \log 8$, e indique el número de soluciones.
- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4
49. Calcule la suma del valor absoluto de las soluciones de la ecuación: $\log_2^2 x^2 = 16$
- A) $\frac{17}{2}$ B) $\frac{17}{4}$ C) 17
 D) $\frac{17}{3}$ E) 18
50. Calcule x, si: $\log_5(\log_3(\log_2 x)) = 0$
- A) 125 B) 5 C) 9
 D) 4 E) 8
51. Resuelva $\log_3 x = \sqrt{3 \log_3 x - 2}$, e indique la suma de soluciones.
- A) 3 B) 6 C) 9
 D) 12 E) 8
52. Si (x_0, y_0) es una solución del sistema:
 $7(\log_x x + \log_y y) = 50 \wedge xy = 256$; calcule: $x_0 + y_0$
- A) 100 B) 200 C) 150
 D) 130 E) 190
53. Resuelva: $\log_2(2x+1) \geq \log_2(x+5)$
- A) $(0; +\infty)$ B) $[4; +\infty)$ C) $\mathbb{R}$
 D) $\emptyset$ E) $\left(-\frac{1}{2}; 4\right)$
54. Halle la menor solución entera de la inecuación:
 $\log_7(3x-2) < \log_7(4x-5)$
- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 7
55. Calcule el valor de: $\log_n n^{\sqrt{n}} + \log_5 25$, para $n = 0,2$
- A) $14/3$ B) $3/14$ C) 5
 D) $-1/3$ E) 2
56. Halle x en: $\log_5 5x \log_{5x} 4x \log_{4x} 9x = \log_{2x} 8x^3$
- A) 4 B) 3 C) 5
 D) 6 E) 7

57. Calcule "b" en la ecuación: $\log_{\frac{1}{3}}(b-5) = 2$
- A) $1/9$ B) 4 C) $45/9$
 D) $46/9$ E) $46/3$
58. Resuelva:
- $$\begin{cases} 2\log x + 3\log y = 5 \\ \log y^{-3} + \log x = -2 \end{cases}$$
- A) 10 B) 100 C) 1000
 D) 20 E) 200
59. Determine el valor de x en:
- $$\frac{\log \log \sqrt[3]{10}}{\log \log \log x} = \log x^{\frac{1}{x}}$$
- A) 1 B) $1/3$ C) 3
 D) 10 E) $\sqrt[3]{10}$
60. Calcule el logaritmo de $a^m \sqrt[n]{a}$ en la base $a^m \sqrt[n]{a}$, donde: $\{m; n; a\} > 0 \wedge a \neq 1$
- A) $\frac{n}{m}$ B) mn C) $\frac{m}{n}$
 D) m E) n
61. Si $2^x = 3^y$, halle $\log_2 6$ en términos de x e y.
- A) $\frac{x}{y}$ B) $\frac{y}{x}$ C) $\frac{x+y}{x}$
 D) $\frac{x+y}{y}$ E) $\frac{x-y}{2}$
62. Calcule el valor de
 $(\log_5 2)(\log_2 5) + (\log_2 5)(\log_5 2) - (\log_5 10)(\log_2 10)$
- A) $\log_5 2$ B) $\log_2 5$ C) -2
 D) -3 E) $(\log_5 2)(\log_2 5)$
63. Siendo $a > 1 \wedge b > 1$, halle x en:
 $\log_{\sqrt{a}} a^{(1+\log_a b)} = 2$
- A) 1 B) a C) b
 D) b/a E) ab
64. Si $\log_2 2 = m$, indique el equivalente de $\log_{36} 81$
- A) $\frac{2}{3-m}$ B) $\frac{3}{1-m}$ C) $\frac{m+1}{m-1}$
 D) $\frac{1}{2-m}$ E) $\frac{2}{1+m}$
65. Si $\log_5 \left(\frac{7}{6}\right)^{\frac{1}{8}} = (\log_5 x - \log_5 y)(\log_5 e^7)$;
 $(\log_5 729)(\log_2 4) = \frac{18}{y}$; halle x + y
- A) 4 B) 6 C) 5 D) 10 E) 3
66. Si se cumple que:
- $$\log_3 30 = \frac{1}{x} \wedge \log_5 30 = \frac{1}{y} \wedge \log_6 30 = \frac{1}{z}$$
- calcule $\frac{x+y}{z-3}$

- A) 3 B) $\frac{1}{3}$ C) $-\frac{1}{3}$
 D) -3 E) 1

67. Resuelva: $(\log_a 64)(\log_a a)(\log_c b) = (3\log_c b)(\log_c x^2)$
 e indique $x^2 + 1$

- A) 2 B) 6 C) 7
 D) 5 E) 3

68. Halle la mayor solución de: $e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$

- A) $\ln 8$ B) $\ln 5$ C) $\ln 10$
 D) $\ln 3$ E) $\ln 4$

69. Resuelva: $8 + \operatorname{colog}_x(\log_x 8) = 0$

- A) $\sqrt[8]{8}$ B) $\sqrt[8]{4}$ C) 2
 D) $\sqrt{8}$ E) $\sqrt{5}$

70. Si se cumple: $(\log \sqrt[17]{x-40})(\log \sqrt{x+1} + 1)^{-1} = 17^{-1}$
 calcule: $\sqrt{x+1}$

- A) 48 B) 6 C) 49
 D) 7 E) 5

71. Indique el mayor elemento del dominio de:

$$f(x) = \sqrt{\ln \sqrt{\ln(-x)}}$$

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) e E) -e

72. Indique el número de soluciones reales de la ecuación: $\log_3 x - \log_{\frac{1}{9}}(x+2) = 0$

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

73. Averigüe el conjunto de valores que garantice que la ecuación admita solución real:

$$\log_4(\log_3(\log_2(8-x))) = \ln 1$$

- A) $\{8; +\infty\}$ B) $\{4; +\infty\}$ C) $\{-\infty; 8\}$
 D) $\{-\infty; 4\}$ E) $\{-\infty; 6\}$

74. Resuelva: $2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-2 \cdot 3^{\frac{1}{3}}}$

- A) $\{1; 2\}$ B) $\{-\infty; -1\} \cup \{1; +\infty\}$
 C) $\{1; 3\}$ D) $\{-\infty; 1\} \cup \{3; +\infty\}$
 E) $\{2; 3\}$

75. Resuelva: $\ln(e^2 - 1 + e^{2-x}) > x$
 indique el número de soluciones enteras positivas.

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

76. Resuelva: $x - \operatorname{antilog}_5\{\operatorname{colog}_3[\operatorname{anti}\log_{\frac{1}{9}} 4]\} = 0$

- A) 0,01 B) 0,02 C) 0,04
 D) 0,08 E) 0,05

77. Sean las siguientes proposiciones:

- I. $b^x > 0; \forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{II. } e^{\ln x^2} = x^2; \forall x \neq 0$$

$$\text{III. Si } a; b, \log_2\left(\frac{a}{b}\right) = \log_2 a = \log_2 b$$

es (son) verdadera(s):

- A) Solo I B) Solo II C) Solo III
 D) I y II E) II y III

78. Sabiendo que $a + b > 0$, simplifique para que obtenga el valor de:

$$L = \frac{\log_3 \log_9(a+b)^{18}}{1 + \log_3 \log_3(a+b)}$$

- A) 2 B) $3/2$ C) 1
 D) $1/2$ E) $1/4$

79. Si: $\alpha = \log_{12} 8$ y $\beta = \log_{24} 54$, determine el valor de:
 $E = \alpha\beta + 5(\alpha - \beta) - 1$

- A) 0 B) 1 C) 2
 D) 3 E) 4

80. Determine el conjunto solución de:

$$\frac{\sqrt{\ln(ex)} + \sqrt{\ln(x/e)}}{\sqrt{\ln(ex)} - \sqrt{\ln(x/e)}} = (\sqrt{2} + 1)^2$$

- A) $\{e/3\}$ B) $\{e/2\}$ C) $\{e\}$
 D) $\{e^2\}$ E) $\{e^3\}$

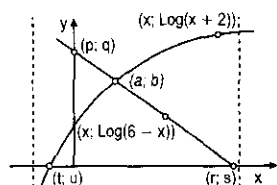
81. Si: $a = \sqrt[4]{10^7} \wedge c_k = 1 + \frac{1}{k}$, determine el valor de:

$$T = \sum_{i=1}^{999} \log_a c$$

- A) $5/7$ B) $12/7$ C) $7/5$
 D) $8/5$ E) $13/4$

82. En el siguiente gráfico de las funciones logarítmicas, determine el valor de:

$$a + b + p + q + r + s + t + u$$



- A) $3 + \log 4$ B) $6 + \log 6$ C) 6
 D) $6 + \log 24$ E) 24

83. Determine el conjunto solución de la inequación:
 $(4^x - 8)(\log_3 x - 2) \leq 0$

- A) $3/2 \leq x \leq 9$ B) $x \geq 2/3$ C) $x \leq -3/2$
 D) $0 \leq x \leq 2/3$ E) $x \geq 1$

84. Hallar el conjunto solución de:

$$(\log(\log x))^{\frac{5 \log x}{\log(\log x)}} = -15$$

- A) $\emptyset$ B) $\{0; +\infty\}$ C) $[10; +\infty)$
 D) $\{1; +\infty\}$ E) $\{10; +\infty\}$

85. Hallar el conjunto solución de:

$$(\log_{\sqrt{2}} x - 1)^2 = \frac{x\sqrt{2}}{2}$$

- A) $\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ B) $\{\sqrt{2}^{\sqrt{2}+1}\}$ C) $\{\sqrt{2}^{\sqrt{2}-1}\}$
 D) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}^{\sqrt{2}-1}}\right\}$ E) $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}^{\sqrt{2}-1}}\right\}$

86. Sea la función $F(x) = \log_a x^2$; $a < -1$. ¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) correcta(s)?

I. $F(x) = \log_a |x|$

II. $F(b^2) = 1 \Rightarrow b = \pm \sqrt{-a}$

III. F es inyectiva.

- A) Solo I B) I y II C) Solo II
 D) II y III E) Todas

87. Hallar la suma de elementos del conjunto solución de: $6a^{3x} + 32e^x = 25e^{2x} + 12$

- A) $\ln 2$ B) $2\ln 3$ C) $3\ln 2$
 D) 1 E) $\ln 3$

88. Al resolver la siguiente inecuación:

$$\log_{2/5}(3x - 2) > -2$$

el conjunto solución es $\langle a; b \rangle$.

Determine el valor de: $T = 3a + 4b$

- A) 11 B) 12 C) 13
 D) 15 E) 17

89. Si $a > 1$, al resolver la inecuación:

$$\log_a x + \log_a(x + 1) < \log_a(2x + 6)$$

se obtiene como conjunto solución el intervalo $\langle a; b \rangle$.

Hallar: $b - a$

- A) -3 B) -1 C) 1 D) 3 E) 4

90. En la escala de Richter, la intensidad M de un terremoto, se relaciona con su energía E por la fórmula: $\log E = 11,4 + 1,5M$

Si un terremoto tiene 1000 veces más energía que otro, ¿cuántas veces mayor es su índice de Richter M ?

- A) 3 unidades más B) 2 unidades más
 C) 3 unidades menos D) 2 unidades menos
 E) 1 unidad más

91. A un cierto número P se le duplicó y se le toma su logaritmo neperiano y el resultado es igual al triple del logaritmo neperiano del número P .

Si: $\log(4P) = k \log(P)$, entonces el valor de k es igual a:

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

92. Resuelva el sistema:
$$\begin{cases} x^{x+y} y^{y-x} \\ \log_{xy} \left(\frac{x}{y} \right) = \log_{x^3 y^3} \left(\frac{1}{x^6} \right) \end{cases}$$

indique el valor de "y".

- A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
 D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

93. Cuántas soluciones reales posee la ecuación:

$$\ln|x| + x^2 + 9 = 4^{\log_2(\sqrt{2}x)}$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

94. Determine el dominio de la función F , cuya regla de correspondencia es:

$$F(x) = \log_3 \left(\sqrt{\frac{9-x^2}{9}} \right) + \log_5(2x+1)$$

- A) $\langle -1/2; 1 \rangle$ B) $\langle -1/2; 3 \rangle$ C) $\langle 3; 4 \rangle$
 D) $\langle -1; 3 \rangle$ E) $\langle 1/2; +\infty \rangle$

95. Resolver: $(3 + \sqrt{8})^x + (3 - \sqrt{8})^x \leq 34$

- A) $-2 \leq x \leq 2$ B) $-4 \leq x \leq 4$
 C) $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$ D) $\sqrt{8} \leq x \leq 8$
 E) $-2 \leq x \leq \sqrt{2}$

CLAVES

- | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1. A | 13. C | 25. A | 37. B | 49. A | 61. D | 73. E | 85. B |
| 2. B | 14. A | 26. C | 38. A | 50. E | 62. D | 74. C | 86. B |
| 3. B | 15. A | 27. E | 39. C | 51. D | 63. E | 75. B | 87. A |
| 4. B | 16. A | 28. C | 40. B | 52. D | 64. E | 76. C | 88. C |
| 5. B | 17. A | 29. B | 41. C | 53. B | 65. D | 77. E | 89. D |
| 6. B | 18. A | 30. C | 42. A | 54. C | 66. C | 78. A | 90. B |
| 7. C | 19. A | 31. A | 43. B | 55. A | 67. D | 79. A | 91. E |
| 8. B | 20. B | 32. A | 44. B | 56. B | 68. D | 80. E | 92. D |
| 9. D | 21. D | 33. C | 45. D | 57. D | 69. A | 81. B | 93. C |
| 10. A | 22. E | 34. E | 46. D | 58. D | 70. D | 82. D | 94. B |
| 11. D | 23. C | 35. D | 47. D | 59. B | 71. E | 83. A | 95. A |
| 12. E | 24. B | 36. D | 48. B | 60. C | 72. B | 84. A | |

Límites y Derivadas

22

capítulo

Gottfried Wilhelm Leibniz, a veces von Leibniz, nació en Leipzig el 1 de julio de 1646 y murió en Hannover el 14 de noviembre de 1716. Fue un filósofo, lógico, matemático, jurista, bibliotecario y político alemán. Es considerado uno de los grandes pensadores de los siglos XVII y XVIII, y se le reconoce como «el último genio universal».

Aunque la noción matemática de función estaba implícita en la trigonometría y las tablas logarítmicas, las cuales ya existían en sus tiempos, Leibniz fue el primero, en 1692 y 1694, en emplearlas explícitamente para denotar alguno de los varios conceptos geométricos derivados de una curva, tales como abscisa, ordenada, tangente, cuerda y perpendicular.

La invención del cálculo infinitesimal es atribuida tanto a Leibniz como a Newton. De acuerdo con los cuadernos de Leibniz, el 11 de noviembre de 1675 tuvo lugar un acontecimiento fundamental: ese día empleó por primera vez el cálculo integral para encontrar el área bajo la curva de una función $y=f(x)$. Leibniz introdujo varias notaciones usadas en la actualidad, tal como el «signo integral $\int$ », que representa una S alargada, derivado del latín *summa*, y la letra «d» para referirse a los «diferenciales» (del latín *differentia*). Esta ingeniosa y sugerente notación para el cálculo es probablemente su legado matemático más perdurable.



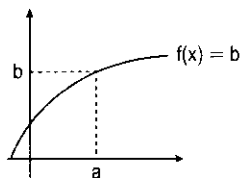
Gottfried Leibniz

Fuente: Wikipedia

◀ LÍMITE

Sea $f(x)$ una función, si cuando x se aproxima al valor de "a", $f(x)$ se aproxima al valor de "b", entonces se dice:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$



Para efectos de calculo, se procede: $f(a) = b$

◀ FORMAS DETERMINADAS

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{a} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0}{x} = 0$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow \infty}} \frac{y}{x} = \infty$$

◀ FORMAS INDETERMINADAS

Los casos que se presentan usualmente son:

$$\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty - \infty; 0 \times \infty; 1^{\infty}; 0^0$$

Estudio de la forma $\frac{0}{0}$

Regla para levantar la indeterminación. En este caso se factoriza tanto el numerador como el denominador, para cancelar los factores que indeterminan la fracción.

Ejemplos:

Se puede utilizar, también, la racionalización, binomio de Newton, etc.

1. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + 2x - 8}$

Resolución:

Factorizando el numerador y denominador

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+7)}{(x-2)(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+7}{x+4}$$

Evaluando para $x = 2$:

$$\frac{2+7}{2+4} = \frac{9}{6}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5x - 14}{x^2 + 2x - 8} = \frac{9}{6}$$

2. Levantar la indeterminación de: $\frac{\log^3 x + \log^2 x - 80}{\log^4 x - 256}$
para $x = 10^4$

Resolución:

$$\text{Si } x = 10^4 \Rightarrow \log x = \log 10^4 = 4$$

Haciendo: $\log x = m$

Luego la expresión será: $\frac{m^3 + m^2 - 80}{m^4 - 256}$ para $m = 4$

Factorizando el numerador por divisores binómicos para $m = 4$ se anula, luego tendría un factor $(m - 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 0 & -80 \\ 4 & & 4 & 20 & 80 \\ \hline & 1 & 5 & 20 & 0 \end{array}$$

Factorizando el denominador por diferencia de cuadrados:

$$m^4 - 256 = (m^2 - 16)(m^2 + 16)$$

$$m^4 - 256 = (m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)$$

En la expresión:

$$\frac{(m^2 + 5m + 20)(m - 4)}{(m - 4)(m + 4)(m^2 + 16)} = \frac{m^2 + 5m + 20}{(m + 4)(m^2 + 16)}$$

Evaluando para $m = 4$:

$$\frac{(4)^2 + 5(4) + 20}{(4 + 4)(4^2 + 16)} = \frac{56}{8(32)} = \frac{7}{32}$$

3. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x}$

Resolución:

Al reemplazar $x = 0$ se tiene la forma: $\frac{0}{0}$

Racionalizando:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} \cdot \frac{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})}{(\sqrt{2+x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{2+x} + \sqrt{2})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2+x} + \sqrt{2}}$$

Evaluando para $x = 0$: $\frac{1}{\sqrt{2+0} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

4. Si: $E = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{3x^3 - 18x^2 + 36x - 24}$, calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} E$

Resolución:

Al reemplazar $x = 2$ se obtiene: $\frac{0}{0}$

Factorizando numerador y denominador para levantar la indeterminación:

$$E = \frac{x^3 - 2x^2 - (x^2 - 4)}{3(x^3 - 6x^2 + 12x - 8)} = \frac{x^2(x-2) - (x-2)(x+2)}{3(x-2)^3}$$

$$E = \frac{(x-2)(x^2 - x - 2)}{3(x-2)^3}$$

$$\text{Luego: } E = \frac{x^2 - x - 2}{3(x-2)^2} = \frac{(x-2)(x+1)}{3(x-2)^2} = \frac{x+1}{3(x-2)}$$

$$\text{Entonces: } \lim_{x \rightarrow 2} E = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+1}{3(x-2)} = \frac{3}{0} \Rightarrow \infty$$

Respuesta: el límite tiende al infinito.

5. Si $A = \frac{x+1-\sqrt{x^2+7}}{x^2-9}$, calcular: $\lim_{x \rightarrow 3} A$

Resolución:

Al reemplazar $x = 3$ se obtiene: $\frac{0}{0}$

Racionalizando:

$$A = \frac{x+1-\sqrt{x^2+7}}{x^2-9} \cdot \frac{x+1+\sqrt{x^2+7}}{x+1+\sqrt{x^2+7}}$$

$$A = \frac{[(x+1)^2 - (\sqrt{x^2+7})^2]}{(x^2-9)(x+1+\sqrt{x^2+7})}$$

Efectuando en el numerador y desdoblado la diferencia de cuadrados en el denominador:

$$A = \frac{2(x-3)}{(x+3)(x-3)(x+1+\sqrt{x^2+7})}$$

$$A = \frac{2}{(x+3)(x+1+\sqrt{x^2+7})}$$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 3} A = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{(3+3)(3+1+\sqrt{9+7})} = \frac{2}{6(8)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} A = \frac{1}{24}$$

6. Si: $V = \frac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[5]{x+32}-2}$, calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} V$

Resolución:

Al reemplazar $x = 0$ se obtiene: $\frac{0}{0}$

$$\text{Transformando los radicales: } V = \frac{(x+27)^{1/3}-3}{(x+32)^{1/5}-2}$$

Aplicando el desarrollo del binomio de Newton cuando $n \in \mathbb{N}$ se tendrá:

$$V = \frac{\left[\binom{1/3}{0} 27^{1/3} + \binom{1/3}{1} 27^{1/3-1} x + \binom{1/3}{2} 27^{1/3-2} x^2 + \dots \right] - 3}{\left[\binom{1/5}{0} 32^{1/5} + \binom{1/5}{1} 32^{1/5-1} x + \binom{1/5}{2} 32^{1/5-2} x^2 + \dots \right] - 2}$$

$$V = \frac{3 + x \left[\frac{1}{3} \times 27^{-2/3} + \binom{1/3}{2} 27^{1/3-2} x + \dots \right] - 3}{2 + x \left[\frac{1}{5} \times 32^{-4/5} + \binom{1/5}{2} 32^{1/5-2} x + \dots \right] - 2}$$

Luego, como: $x \rightarrow 0$ tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} V = \frac{\frac{1}{3} \times 27^{-2/3}}{\frac{1}{5} \times 32^{-4/5}} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{9}}{\frac{1}{5} \times \frac{1}{16}} = \frac{80}{27}$$

DERIVADAS

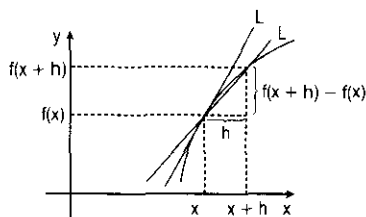
Sea $y = f(x)$ una función, la derivada de la función se denota de la siguiente manera:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Se define:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Gráficamente:



$$\text{Pendiente de } L: m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\text{Pendiente de } L: y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo:

Calcular la derivada de: $f(x) = 3x^2$

Resolución:

Por la definición de derivadas:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 3x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{6xh + 3h^2}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h)$$

Reemplazando $h = 0$

$$f'(x) = 6x$$

Fórmulas:

Sean $f(x)$, u , v , funciones de variable " x " y sean " n " y " c " constantes:

$$1. \quad f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

Ejemplos:

- $f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5x^4$
- $f(x) = 9x^6 \Rightarrow f'(x) = 54x^5$
- $f(x) = 8x \Rightarrow f'(x) = 8$

$$2. \quad f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$$

Ejemplo:

$$f(x) = 2^5 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$3. \quad f(x) = u + v \Rightarrow f'(x) = u' + v'$$

Ejemplos:

- $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 7x + 9$
 $f'(x) = 12x^2 - 10x + 7$
- $f(x) = 9x^5 - 5x^3 - 10x + 1$
 $f'(x) = 45x^4 - 15x^2 - 10$

$$4. \quad f(x) = \sqrt[n]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

Ejemplos:

$$f(x) = \sqrt[5]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$$

$$f(x) = \sqrt[9]{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$$

5. $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = nu^{n-1} u'$

Ejemplos:

- $f(x) = (3x^4 - 5x + 7)^{20}$
 $\Rightarrow f'(x) = 20(3x^4 - 5x + 7)^{19}(12x^3 - 5)$
- $f(x) = 4(7x^2 - 4x + 2)^{12}$
 $\Rightarrow f'(x) = 48(7x^2 - 4x + 2)^{11}(14x - 4)$

6. $f(x) = \sqrt[n]{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

Ejemplos:

- $f(x) = \sqrt[5]{7x^3 - 5x + 2} \Rightarrow f'(x) = \frac{21x^2 - 5}{5\sqrt[5]{(7x^3 - 5x + 2)^4}}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x^7} \Rightarrow f'(x) = \frac{7x^6}{3\sqrt[3]{x^{14}}}$

7. $f(x) = u \cdot v \quad f'(x) = u'v + u \cdot v'$

Ejemplos:

- $f(x) = (7x^3 + 9x + 2)(2x^7 - 5x + 1)$
 $f'(x) = (7x^3 + 9x + 2)'(2x^7 - 5x + 1) +$
 $(7x^3 + 9x + 2)(2x^7 - 5x + 1)'$
 $f'(x) = (21x^2 + 9)(2x^7 - 5x + 1) +$
 $(7x^3 + 9x + 2)(14x^6 - 5)$

- $f(x) = 7(x^3 + 2)^9 \sqrt[5]{3x^7 + 2}$
 $f'(x) = 63(x^3 + 2)^8 \cdot (3x^2) \sqrt[5]{3x^7 + 2} +$
 $\frac{21x^6 [7(x^3 + 2)^9]}{5\sqrt[5]{(3x^7 + 2)^4}}$

8. $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - u \cdot v'}{v^2}$

Ejemplos:

- $f(x) = \frac{7x^9 + 9x^5 + 2}{11x^4 + 9x + 3}$

$$f'(x) = \frac{(63x^8 + 45x^4)(11x^4 + 9x + 3) - (44x^3 + 9)(7x^9 + 9x^5 + 2)}{(11x^4 + 9x + 3)^2}$$

- $f(x) = \frac{6x^9 - 7x^3 + 2}{\sqrt{5x^9 + 2}}$

$$f'(x) = \frac{(54x^8 - 21x^2 + 2)(\sqrt{5x^9 + 2}) - 45x^8 + 6x^9 + 7x^3 + 2}{2\sqrt{5x^9 + 2}}$$

◀ REGLA DE L'HOSPITAL-BERNOULLI

Se emplea para levantar la indeterminación en los casos $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ u otros transformables a una de las formas anteriores.

Esta regla establece que dadas las expresiones $f(x)$ y $g(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Es más cómodo para el cálculo de muchos límites que se hacen por la forma tradicional.

Es importante aclarar que en muchos problemas puede aplicarse esta regla dos o más veces si es que fuera necesario hasta que se levante la indeterminación.

Ejemplos:

1. Calcular: $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

Resolución:

Aplicando la regla de L'Hospital-Bernoulli; derivando en el numerador y denominador por separado:

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2}{1} = 3x^2$$

Evaluando para $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3(-2)^2}{1} = 12$$

2. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 \sqrt{x+3} - 2x + x^3 - \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+7} - 2x^3}$

Resolución:

Derivando el numerador y denominador por separado:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 \sqrt{x+3})' - (2x)' + (x^3)' - (\sqrt{x})'}{(\sqrt[3]{x+7})' - (2x^3)'} =$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x \sqrt{x+3} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+3}} - 2 + 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+7)^2}} - 6x^2}$$

Evaluando para $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 + \frac{1}{4} - 2 + 3 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 6} = \frac{-57}{71}$$

3. Calcular: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax} - a^2 x^{-1}}{1 - ax^{-1}}$

Resolución:

Por L'Hospital-Bernoulli:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{ax})' - (a^2 x^{-1})'}{(1 - ax^{-1})'} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a}{2\sqrt{ax}} + \left(\frac{a^2}{x^2}\right)'}{\frac{a}{x^2}}$$

Evaluando para $x = a$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{a}{2a} + 1}{\frac{1}{a}} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{a}} = \frac{3}{2}a$$

4. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{x^{n+1} - (n+1)x + n}$

Resolución:

Derivando numerador y denominador por separado:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{nx^{n-1} - n}{(n+1)x^n - (n+1)}$$

Si evaluamos para $x = 1$; la expresión es de la forma $\frac{0}{0}$, entonces aplicamos por segunda vez

L'Hospital-Bernoulli para levantar la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(nx^n - 1)' - (n)'}{[(n+1)x^n]' - [(n+1)]'} = \frac{(n-1)}{(n+1)}$$

5. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}}{1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}}}$

Resolución:

Derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}})'}{(1 - \sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}})'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(\sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}})'}{-(\sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}})'}.$$

Teniendo en cuenta que: $\sqrt[n]{g(x)} = \frac{g'(x)}{n\sqrt[n]{g(x)^{n-1}}}$; en la expresión se tendrá:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(2 - \sqrt{4 - 3x})'}{2\sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}}}{\frac{(2 - \sqrt{3 - 2x})'}{2\sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}}}} = \frac{\frac{-(-3)}{2\sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}}}{\frac{2(3 - 2x)^{-2}}{2\sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}}}}$$

Efectuando en el numerador y denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{3}{-4\sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}\sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}}}}{\frac{2(3 - 2x)^{-2}}{4\sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}}\sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}}\sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}}{-2(3 - 2x)^{-2}\sqrt{2 - \sqrt{4 - 3x}}\sqrt{2 - \sqrt{3 - 2x}}}$$

Evaluando para $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3\sqrt{1}\sqrt{1}}{-2(\sqrt{1})\sqrt{1}\sqrt{1}} = \frac{-3}{2}$$

Estudio de la forma ∞/∞

Reglas para levantar la indeterminación. En este caso se divide tanto al numerador y denominador entre la expresión de mayor grado.

Ejemplos:

1. Sea: $V = \frac{4x^4 + 2x^3 + 1}{2x^4 + 5x - 2}$, calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} V$

Resolución:

Factorizando en el numerador y denominador:

$$V = \frac{x^4(4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4})}{x^4(2 + \frac{5}{x^3} - \frac{2}{x^4})} = \frac{4 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^4}}{2 + \frac{5}{x^3} - \frac{2}{x^4}}$$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow \infty} V = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \frac{4}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} V = 2$$

2. Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} M$, si: $M = \frac{3x^5 + 2x - 3}{x^2 + x + 1}$

Resolución:

Factorizando en el numerador y denominador.

$$M = \frac{x^5(3 + \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^5})}{x^2(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{x^3(3 + \frac{2}{x^4} - \frac{3}{x^5})}{(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}$$

$$\text{Luego } \lim_{x \rightarrow \infty} M = \frac{\infty(3 + 0 - 0)}{(1 + 0 + 0)} = \frac{\infty(3)}{(1)}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} M = \infty$$

3. Si: $P = \frac{x^4 + 2x - 1}{x^6 + x^4 + 2}$, calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} P$

Resolución:

Factorizando numerador y denominador:

$$P = \frac{x^4(1 + \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^4})}{x^6(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^6})} = \frac{1 + \frac{2}{x^5} - \frac{1}{x^4}}{x^2(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^6})}$$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow \infty} P = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 0 - 0}{\infty(1 + 0 + 0)} = \frac{1}{\infty}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} P = 0$$

Conclusiones:

- I. Si el grado del numerador es igual al grado del denominador por lo tanto el límite será el cociente de dividir el coeficiente del término de mayor grado del numerador entre el del denominador.
- II. Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador entonces el límite será infinito.
- III. Si el grado del numerador es menor que el grado del denominador entonces el límite será cero.

4. Si $A = \frac{5x + \sqrt{3x^2 + 36x^4} - 5}{2x + \sqrt{2x^2 + 4x^4} - 7}$, calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} A$

Resolución:

Factorizando numerador y denominador:

$$\frac{x(5 + \sqrt{3 + \sqrt{36 - \frac{5}{x^4}}})}{x(2 + \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^4}}})} = \frac{5 + \sqrt{3 + \sqrt{36 - \frac{5}{x^4}}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4 - \frac{1}{x^4}}}}$$

Luego evaluando para $x = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} A = \frac{5 + \sqrt{3 + \sqrt{36 - 0}}}{2 + \sqrt{2 + \sqrt{4 - 0}}} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2 + \sqrt{4}} = \frac{5 + 3}{2 + 2} = \frac{8}{4}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} A = 2$$

5. Dado: $M = \frac{(3x + 7)^{2m}(12x + 7)^{m-2}(4x + 7)^{m+4}}{(8x^2 - 7)^m(9x^2 + 7)^{m-1}}$

calcular m, si: $\lim_{x \rightarrow \infty} M = 256$

Resolución:

Extrayendo las "x" de los binomios:

$$M = \frac{x^{2m} \left(3 + \frac{7}{x}\right)^{2m} x^{m-2} \left(12 + \frac{7}{x}\right)^{m-2} x^{m+4} \left(4 + \frac{7}{x}\right)^{m+4}}{x^{2m} \left(8 - \frac{7}{x^2}\right)^m x^{2m+2} \left(9 + \frac{7}{x^2}\right)^{m+1}}$$

Simplificando y luego reemplazando $x = \infty$:

$$M = \frac{(3+0)^{2m} (12+0)^{m-2} (4+0)^{m+4}}{(8+0)^m (9+0)^{m+1}} = \frac{3^{2m} \cdot 12^{m-2} \cdot 4^{m+4}}{8^m 9^{m+1}}$$

$$M = 3^{m-4} \times 2^{m-4}$$

Por dato: $3^{m-4} \times 2^{m-4} = 256 = 2^8 \Rightarrow m + 4 = 8$

$$\therefore m = 4$$

6. Si: $E = \frac{x^m [C_x^{x+m}]^{-1}}{m}$, calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} E$

Resolución:

Desarrollando el número combinatorio:

$$E = \frac{x^m \left[\frac{(x+m)!}{m!x!} \right]^{-1}}{m} = \frac{x^m m!x!}{m(x+m)!}$$

$$E = \frac{x^m m!x!}{m x! (x+1)(x+2)(x+3) \dots (x+m)}$$

Simplificando y luego extrayendo las "x" de los binomios:

$$E = \frac{x^m m!}{m x \left(1 + \frac{1}{x}\right) x \left(1 + \frac{2}{x}\right) x \left(1 + \frac{3}{x}\right) \dots x \left(1 + \frac{m}{x}\right)}$$

Evaluando para $x = \infty$ se tendrá:

$$E = \frac{x^m m!}{m \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x} = \frac{x^m m!}{m x^m} = \frac{m!}{m}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} E = (m-1)!$$

Estudio de las formas $\infty - \infty$ y $0 \times \infty$

Reglas para levantar la indeterminación. En estos casos se efectúan operaciones o se racionaliza para transformar las indeterminaciones dadas a las formas conocidas $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$

Ejemplos:

1. Si: $M = \frac{3}{x^2 - x - 2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$, calcular: $\lim_{x \rightarrow 2} M$

Resolución:

Reemplazando $x = 2$ resulta $M = \infty - \infty$

Efectuando:

$$M = \frac{3x^2 - 9x + 6 - x^2 + x + 2}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - x - 2)} = \frac{2x^2 - 8x + 8}{(x^2 - 3x + 2)(x^2 - x - 2)}$$

Factorizando en el numerador y denominador:

$$M = \frac{2(x^2 - 4x + 4) - 2(x-2)^2}{(x-2)(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{2(x-2)^2}{(x-2)(x-1)(x-2)(x+1)} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 2} M = \frac{2}{(2-1)(2+1)} = \frac{2}{1(3)} = \frac{2}{3}$$

2. Si: $P = \sqrt{x} \left[\sqrt{\frac{1}{2x}} - \sqrt{x} \right]$, calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} P$

Resolución:

Reemplazando $x = 0$ resulta la forma $0 \times \infty$

$$\text{Multiplicando se tendrá: } P = \sqrt{\frac{1}{2}} - x$$

$$\text{Luego: } \lim_{x \rightarrow 0} P = \sqrt{\frac{1}{2}} - 0 = \lim_{x \rightarrow 0} P = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Si $M = \sqrt{4x^2 + 3x + 6} - \sqrt{4x^2 + x + 3}$, calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} M$

Resolución:

Reemplazando $x = \infty$ resulta: $\infty - \infty$

Racionalizando:

$$M = \frac{(\sqrt{4x^2 + 3x + 6} - \sqrt{4x^2 + x + 3})(\sqrt{4x^2 + 3x + 6} + \sqrt{4x^2 + x + 3})}{(\sqrt{4x^2 + 3x + 6} + \sqrt{4x^2 + x + 3})}$$

$$M = \frac{(4x^2 + 3x + 6) - (4x^2 + x + 3)}{\sqrt{4x^2 + 3x + 6} + \sqrt{4x^2 + x + 3}}$$

$$M = \frac{2x + 3}{\sqrt{4x^2 + 3x + 6} + \sqrt{4x^2 + x + 3}}$$

Extrayendo "x" en el numerador y denominador se tendrá:

$$M = \frac{x \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x \left[\sqrt{4 + \frac{3}{x} + \frac{6}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}} \right]}$$

Simplificando y luego evaluando para $x = \infty$:

$$M = \frac{2}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{2}{4} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} M = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

4. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} A$, si: $A = \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1 \right] \sqrt{x}$

Resolución:

Reemplazando $x = \infty$ resulta la forma $0 \times \infty$

Racionalizando:

$$A = \frac{(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1)(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)(\sqrt{x})}{(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1)} = \frac{\sqrt{\frac{1}{x}}(\sqrt{x})}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

$$\text{Efectuando: } A = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1}$$

$$\text{Evaluando para } x = \infty: A = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} A = \frac{1}{2}$$

5. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} R$, si: $R = \left[\left(1 + \frac{1}{x^m}\right)^{1/m} - 1 \right] x^m$

Resolución:

Reemplazando $x = \infty$ resulta la forma $0 \times \infty$

Desarrollando el binomio con exponente fraccionario:

$$R = \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^m} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{x^m} \right)^2 + \dots - 1 \right] x^m$$

Reduciendo y luego multiplicando:

$$R = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} - 1 \right) \frac{1}{x^m} - 1 \dots$$

Evaluando para $x = \infty$: $R = \frac{1}{n} + 0 + 0 + \dots$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} R = \frac{1}{n}$$

6. Si: $P = \sqrt{y^2 + y} - \sqrt[3]{y^3 + y^2}$, calcular: $\lim_{y \rightarrow \infty} P$

Resolución:

Efectuando en cada radical:

$$P = y \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{1/2} - y \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{1/3}$$

$$P = y \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{y} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{y^2} + \dots \right] - y \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \frac{1}{y^2} + \dots \right]$$

$$P = \left\{ y + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \cdot \frac{1}{y} + \dots \right\} + \left\{ -y - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \cdot \frac{1}{y} + \dots \right\}$$

Reduciendo y evaluando para $y = \infty$:

$$P = \left[\frac{1}{2} + 0 + 0 \dots \right] - \left[\frac{1}{3} + 0 + 0 \dots \right]$$

$$\therefore \lim_{y \rightarrow \infty} P = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

◀ MÁXIMOS, MÍNIMOS Y REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE FUNCIONES

Sea una función definida en $\mathbb{R}$: $y = f(x)$

Para determinar su máximo (mayor valor que puede tomar) o mínimo (menor valor que puede tomar), deberá de tenerse en cuenta los siguientes pasos:

- Se calcula la primera derivada de "y".
- Se hace $y' = 0$, para deducir los puntos críticos.
- Se reemplazan estos puntos críticos en la función original obteniéndose los valores (el mayor representará el máximo relativo y el menor representa el mínimo relativo).
- Se reemplazan los puntos críticos encontrados en la segunda derivada de "y", es decir, en y'' , donde podrán encontrarse las siguientes situaciones:
Si $y'' > 0$ entonces en dicho punto existe un mínimo.
Si $y'' < 0$ entonces en dicho punto existe un máximo.

Ejemplos:

- Hallar los máximos y mínimos relativos de la función: $f(x) = x^3 - 12x$

Resolución:

Calculando la primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12$

Encontrando los puntos críticos: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Reemplazando los puntos críticos en la función original $f(x)$.

$$\text{Si } x = 2: f(2) = 2^3 - 12(2) = -16$$

$$\text{Si } x = -2: f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) = 16$$

De donde: 16 representa el máximo relativo de la función y -16 representa el mínimo relativo.

- Calcular el máximo relativo de la función:

$$f(x) = \frac{2}{3} \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$$

Resolución:

Calculando la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \times \frac{-2x + 2}{2\sqrt{-x^2 + 2x + 8}} = \frac{-2x + 2}{3\sqrt{-x^2 + 2x + 8}}$$

Calculando los puntos críticos: $f'(x) = 0$

$$-2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Reemplazando este único valor en la función original se tiene: $f'(1) = \frac{2}{3} \sqrt{-1 + 2 + 8} = 2$

$\therefore$ El máximo relativo será 2.

- Hallar el máximo y el mínimo de la función siguiente:
 $y = f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$

Resolución:

Téngase en cuenta que este ejercicio no se están pidiendo el máximo y mínimo relativos, en consecuencia tendrá que utilizarse los criterios de primera y segunda derivada.

$$y' = 3x^2 - 2x - 1, \text{ luego: } 3x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$y'' = 6x - 2 \begin{cases} \text{Para } x = 1 \Rightarrow y'' = 4 > 0 \text{ (mínimo)} \\ \text{Para } x = -\frac{1}{3} \Rightarrow y'' = -4 < 0 \text{ (máximo)} \end{cases}$$

Ahora reemplazando los puntos críticos en la función original.

$$\text{Para } x = 1: y = 1 - 1 - 1 - 1 = -2 \text{ (mínimo)}$$

$$\text{Para } x = -\frac{1}{3}: y = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = -\frac{22}{27} \text{ (máximo)}$$

- Hallar los máximos y mínimos de la expresión:
 $y = 2x^2(3 - x)$ y los valores de "x" que dan lugar a ellos.

Resolución:

La expresión puede escribirse: $y = 6x^2 - 2x^3$

$$\text{Luego: } y' = 12x - 6x^2$$

Haciendo:

$$y' = 0 \Rightarrow 12x - 6x^2 = 0 \Rightarrow x(2 - x) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0; x = 2$$

Calculando y'' : $y'' = 12 - 12x$

$$\text{Para } x = 0: y'' = 12 > 0 \text{ (mínimo)}$$

$$\text{Para } x = 2: y'' = -12 < 0 \text{ (máximo)}$$

Verificando en la función original:

Para $x = 0$: $y = 0$ (mínimo)

Para $x = 2$: $y = 8$ (máximo)

5. Un rectángulo tiene 4 m de perímetro, hallar el que tenga la diagonal mínima.

Resolución:

Sean " x " e " y " el largo y el ancho, respectivamente, entonces:

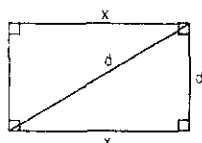
$$2x + 2y = 4 \quad x + y = 2$$

Luego:

$$y = 2 - x \quad \dots(1)$$

Sabemos que:

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad \dots(2)$$



$$(1) \text{ en } (2): d^2 = x^2 + (2 - x)^2 \Rightarrow d^2 = 2x^2 - 4x + 4$$

Calculando su primera y segunda derivada:

$$d' = 4x - 4; \text{ luego: } 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$d'' = 4, \text{ existe un mínimo porque } d'' > 0$$

Sustituyendo $x = 1$ en (2):

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

∴ Se trata de un cuadrado de lado 1.

6. Hallar la variación de la función siguiente y construir la curva correspondiente:

$$y = x^3 - 3x + 2$$

Resolución:

Encontrando los puntos máximos y mínimos:

$$y' = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$y'' = 6x$$

$$\text{Para } x = 1$$

$$\Rightarrow y'' = 6 > 0 \text{ (mínimo)}$$

$$\text{Para } x = -1$$

$$\Rightarrow y'' = -6 < 0 \text{ (máximo)}$$

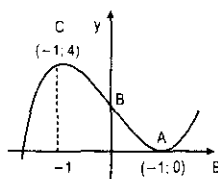
En la función primitiva:

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow y = 0 \text{ (mínimo)}$$

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow y = 4 \text{ (máximo)}$$

Luego la variación la tendremos en el siguiente cuadro

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	crece	4	decrece	0	crece	$+\infty$
			↑		↑		
			máximo		mínimo		



PROBLEMAS

1. Calcular: $S = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 - 2x + 3}{x^2 + x + 1}$

Resolución:

Aplicando la propiedad:

$$S = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} 5x^2 - 2x + 3}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + x + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (5x^2) - \lim_{x \rightarrow -1} (2x) + \lim_{x \rightarrow -1} 3}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1}$$

$$S = \frac{5 \lim_{x \rightarrow -1} x^2 - 2 \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 3}{\lim_{x \rightarrow -1} x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} x + \lim_{x \rightarrow -1} 1} = \frac{5(1) - 2(1) + 3}{1 + 1 + 1} = 2$$

2. Calcular: $A = \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 25}$

Resolución:

Como presenta la forma $\frac{0}{0}$, primero levantemos la indeterminación:

$$A = \frac{(\sqrt[3]{x} - 2) \cdot 3}{(x - 25)(\sqrt[3]{x} - 2)^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} - 2 + \sqrt[3]{9}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 25} \frac{\sqrt[3]{x} - 5}{(x - 25)(\sqrt[3]{x} - 2)^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} - 2 + \sqrt[3]{9}}$$

$$A = \frac{1}{[3\sqrt[3]{9}(10)]} = \frac{1}{30\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{90}$$

3. Calcular: $E = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{x^2 + 2ax}{x^3 - a^3} - \frac{1}{x - a} \right)$

RESUELTOS



Resolución:

$$E = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + 2ax - (x^2 + ax + a^2)}{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}$$

$$E = \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax - a^2}{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}$$

$$E = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a(x - a)}{(x - a)(x^2 + ax + a^2)} = \frac{a}{3a^2} = \frac{1}{3a}; a \neq 0$$

4. Calcular: $\lim_{a \rightarrow b} \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x} - 2\sqrt{x + \frac{a+b}{2}}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{b+x}}$

Resolución:

$$\lim_{a \rightarrow b} \left[\frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{x + \frac{a+b}{2}}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{b+x}} + \frac{\sqrt{b+x} - \sqrt{x + \frac{a+b}{2}}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{b+x}} \right]$$

$$\begin{aligned} & \lim_{a \rightarrow b} \frac{\left(\frac{a-b}{2} \right) (\sqrt{a+x} + \sqrt{b+x})}{(a-b)(\sqrt{a+x} + \sqrt{x + \frac{a+b}{2}})} \\ & + \lim_{a \rightarrow b} \frac{\left(\frac{b-a}{2} \right) (\sqrt{b+x} + \sqrt{x + \frac{a+b}{2}})}{(a-b)(\sqrt{b+x} + \sqrt{x + \frac{a+b}{2}})} \\ & = \frac{\left(\frac{1}{2} \right) 2\sqrt{b+x}}{2\sqrt{b+x}} + \frac{\left(\frac{-1}{2} \right) 2\sqrt{b+x}}{2\sqrt{b+x}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

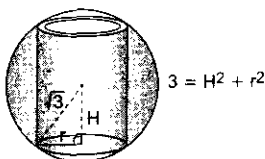
5. Calcular $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{a^x - a^a}$; $a > 1$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^a - a^x)'}{(a^x - a^a)'} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{ax^{a-1} - a^x \ln a}{a^x \ln a - 0} \\ &= \frac{aa^{a-1} - a^a \ln a}{a^a \ln a} = \frac{1 - \ln a}{\ln a} \end{aligned}$$

6. Halle el máximo valor del volumen del cilindro que se puede inscribir en una esfera de radio $\sqrt{3}$ m.

Resolución:



$$\begin{aligned} v &= \pi r^2 (2H) = \pi (3 - H^2) (2H) \\ v &= 2\pi (3H - H^3) \end{aligned}$$

Derivando respecto de H

$$v' = 2\pi (3 - 3H^2) = 0 \Rightarrow H = 1$$

Reemplazando en (α)

$$v = 2\pi (3 - 1) = 4\pi \Rightarrow v_{\max} = 4\pi \text{ m}^3$$

Es el volumen máximo porque:

$$v''(1) = 2\pi (-6(1)) < 0$$

7. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}$

Resolución:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x - x + 1)'}{(x - x^x)'} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 1 + 0}{1 - x^x (\ln x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{1}{x} - 1\right)'}{(1 - x^x \ln x - x^x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{-\left[x^x (\ln x + 1) \ln x + \frac{x^x}{x}\right] - x^x (\ln x + 1)'} \\ &= \frac{-1}{-1-1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

8. Sea la función: $f(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$ tal que tiene una raíz x_0 ; donde $x_0 \in (0; 1)$, si se cumple que: $\frac{a_0}{5} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{2} + a_4 = k$

Determine el valor de k.

Resolución:

Asumimos la función:

$$g(x) = \frac{a_0 x^5}{5} + \frac{a_1 x^4}{4} + \frac{a_2 x^3}{3} + \frac{a_3 x^2}{2} + a_4 x$$

Aplicamos el teorema del valor medio en el intervalo $(0; 1)$ para que $g(x)$ se tiene $\exists x_0 \in (0; 1)$ tal que:

$$g'(x_0) = \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} \dots (\alpha)$$

Pero observamos que $g'(x_0) = f(x_0)$ y como x_0 es raíz de x_0 entonces: $f(x_0) = 0 \Rightarrow g'(x_0) = 0$

Reemplazando en (α):

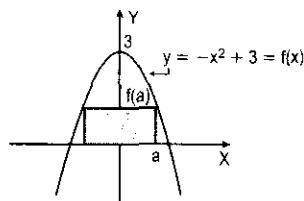
$$g(1) - g(0) = 0$$

$$g(1) = g(0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{a_0}{5} + \frac{a_1}{4} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{2} + a_4 &= 0 \\ \Rightarrow k &= 0 \end{aligned}$$

9. Calcular el área máxima del rectángulo inscrito en la región encerrada por la curva $y = -x^2 + 3$; y el eje x.

Resolución:



$$A = (2a)f(a) = (2a)(3 - a^2)$$

$$A = 2(3a - a^3) \dots (\alpha)$$

Derivando respecto de a

$$A' = 2(3 - 3a^2) = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\text{Reemplazando en (α): } A = 2(3 - 1) = 4u^2$$

$$\text{Es el área máxima porque: } A''(1) = 2(-6(1)) < 0$$

10. Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 16x + 28 & , x < -2 \\ x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + 6, |x| \leq 2 \vee -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^4}{4} + 4x & , x > 2 \end{cases}$$

determine los puntos máximos y mínimos, si los hubiere.

Resolución:

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + 16, x < -2 \\ 3x^2 + x - 2, -2 < x < 2 \\ x^3 + 4, x > 2 \end{cases}$$

$$f'(-2-) = 8 \wedge f'(-2+) = 8$$

$$\text{Además } f'(2) = 12 \wedge f'(2+) = 12$$

$$\text{Puntos críticos: } x = -4; -1; 2/3$$

Intervalos	Signo $f'(x)$	$f(x)$
$(-\infty; -4)$	-	decrece
$(-4; -2)$	+	crece
$(-2; -1)$	+	crece
$(-1; 2/3)$	-	decrece
$(2/3; 2)$	+	crece
$(2; +\infty)$	+	crece

} mínimo $x = -4$

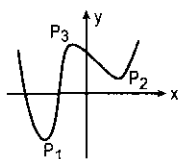
} máximo $x = -1$

} mínimo $x = 2/3$

Puntos de mínimo:

 $P_1(-4; -4)$, $P_2(2/3; 5,18)$

Puntos de máximo:

 $P_3(-1; 15,2)$ 

11. Un cilindro circular recto es inscrito en un cono circular recto de radio r . Encontrar el radio R del cilindro si su volumen es un máximo.

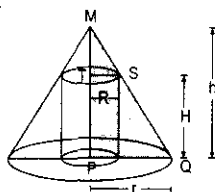
Resolución:Sea V_c el volumen del cilindro el cual hay que maximizar: $V_c = \pi R^2 H$... (i)Sea V_k el volumen del cono:

$$V_k = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

En el gráfico:

 $\triangle TMS \sim \triangle PMQ$

$$\frac{TM}{PM} = \frac{TS}{PQ} \Rightarrow TM = \frac{R}{r} \cdot h$$



$$h - H = \frac{R}{r} h \Rightarrow H = h - \frac{R}{r} h$$

En (1):

$$V = \pi R^2 \left(h - \frac{R}{r} h \right) = \pi h R^2 - \frac{\pi h}{r} R^3$$

$$\frac{dV}{dR} = V' = 2\pi h R - \frac{3\pi h R^2}{r} = 0$$

$$\Rightarrow V' = \pi h R \left(2 - \frac{3}{r} R \right) = 0$$

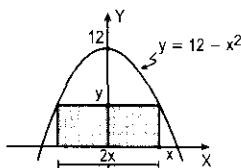
Puntos críticos:

$$R = 0, \frac{2}{3}r, \text{ donde solo admitimos: } R = \frac{2}{3}r$$

$$V'' = 2\pi h - \frac{6\pi h}{r} R \Rightarrow V'' \left(\frac{2}{3}r \right) = 2\pi h - \frac{6\pi h}{r} \left(\frac{2}{3}r \right)$$

$$V'' = -2\pi h < 0 \Rightarrow R = \frac{2}{3}r$$

12. Hallar el área del mayor rectángulo que tiene su base inferior en el eje x y con dos vértices en la curva $y = 12 - x^2$.

Resolución:

$$A = 2xy = 2xy = 2x(12 - x^2)$$

$$\Rightarrow A = 24x - 2x^3$$

$$\Rightarrow A'(x) = 24 - 6x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 8$$

$$\Rightarrow A = 2xy = 2(16) = 32$$

13. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = (2x^2 + 3x)e^x$.

Determine $\alpha + \beta + \gamma$, tal que:

$$\alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma e^x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Resolución:

$$f(x) = (2x^2 + 3x)e^x$$

$$f'(x) = (4x + 3)e^x + (2x^2 + 3x)e^x$$

$$= (2x^2 + 7x + 3)e^x$$

$$f''(x) = (4x + 7)e^x + (2x^2 + 7x + 3)e^x$$

$$f''(x) = (2x^2 + 11x + 10)e^x$$

$$\text{Se cumple: } \alpha f''(x) + \beta f'(x) + \gamma e^x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha(2x^2 + 11x + 10)e^x + \beta(2x^2 + 7x + 3)e^x + \gamma e^x = (2x^2 + 3x)e^x$$

$$\frac{2(\alpha + \beta)x^2 + (11\alpha + 7\beta)x + 10\alpha + 3\beta + \gamma}{2 \quad 3 \quad 0} =$$

$$2x^2 + 3x + 0$$

$$\text{Se deduce que: } \alpha + \beta = 1$$

$$11\alpha + 7\beta = 3$$

$$10\alpha + 3\beta + \gamma = 0$$

$$\alpha = -1, \beta = 2, \gamma = 4$$

$$\text{Por lo tanto: } \alpha + \beta + \gamma = -1 + 2 + 4 = 5$$

14. Un punto se mueve sobre la parábola $2y^2 = 7x$, de manera que la abscisa aumenta uniformemente 3 cm/s. ¿En qué punto aumenta la abscisa y la ordenada a la misma razón?

Resolución:

$$\text{Por dato: } \frac{dx}{dt} = 3 \text{ cm/s}$$

Tenemos que hallar el punto $(x; y)$, tal que:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$$

Como: $2y^2 = 7x$, derivando implícitamente con respecto al tiempo t , tenemos:

$$4y \frac{dy}{dt} = 7 \frac{dx}{dt}; \left(\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \right)$$

$$\Rightarrow 4y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{4}$$

$$\text{Además } 2y^2 = 7x \Rightarrow x = \frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow (x; y) = \left(\frac{7}{8}; \frac{7}{4} \right)$$

15. Un viaje subsidiado por un colegio costará 15 soles a cada alumno si viajan no más de 150 alumnos; sin embargo, el costo por alumno se reducirá 0,05 soles por cada uno que sobrepase los 150 soles. ¿Cuántos alumnos deben realizar el viaje a fin de que el colegio reciba los mayores ingresos brutos?

Resolución:Sea x : n.º de alumnos $l(x)$: ingreso bruto total por x alumnos

$$l(x) = \begin{cases} 15x; & x \leq 150 \\ (15 - 0,05(x - 150))x; & x > 150 \end{cases}$$

Piden: máximo valor de $l(x)$

$$\text{Cuando: } x \leq 150; l(x)_{\max} = 15(150)$$

Cuando: $x > 150$; $l(x) = 15x - \frac{x^2}{20} + \frac{150}{20}x$

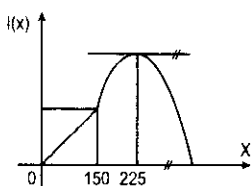
$$l'(x) = 15 - \frac{2x}{20} + \frac{150}{20} = 0 \Rightarrow x = 225$$

$$\text{Además: } l''(x) = -\frac{2}{20} < 0$$

Entonces para $x = 225$ habrá un máximo.

$$l(225) = 15(225) - \frac{(225)^2}{20} + \frac{150}{20}(225)$$

Gráfica de $l(x)$



$\therefore$ n.º de alumnos: 225

16. Dado: $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 1} + \sqrt[5]{x + 31}$, determine $f'(1)$, justificando si existe o no.

Resolución:

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+h)^3 - 1} + \sqrt[5]{1+h+31} - 2}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3h+3h^2+h^3} + \sqrt[5]{h+32} - 2}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{3h+3h^2+h^3}}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{h+32} - 2}{h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{h+32} - 2}{h}$$

Haciendo: $h + 32 = z^5$

$$\text{Si: } h \Rightarrow 0; z^5 = h + 32 \Rightarrow 32 \quad \therefore z = \sqrt[5]{32} = 2$$

$$\lim_{z \rightarrow 2} \frac{z - 2}{z^5 - 32} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{(z - 2)}{(z - 2)(z^4 + 2z^3 + 4z^2 + 8z + 16)} = \frac{1}{80}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^3+3h+h^2}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^3+3h+h^2}}{\sqrt[3]{h^2}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow f' = +\infty + \frac{1}{80} = +\infty \Rightarrow f'(1)$$

17. Determine: $f'(x)$ si: $f(x) = 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 4x^2$

Resolución:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[2\sqrt{x+h} + 3\sqrt[3]{x+h} + 4(x+h)^2] - [2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 4x^2]}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{x+h} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x+h} - 3\sqrt[3]{x} + 8xh + 4h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})}{h}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} (8x + 4h^2)$$

Racionalizando los numeradores en los dos primeros sumandos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})}{h} \cdot \frac{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x+h}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+h} + \sqrt[3]{x^2})}{h(\sqrt[3]{x+h}^2 + \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+h} + \sqrt[3]{x^2})} + \lim_{h \rightarrow 0} (8x + 4h^2)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h-x)}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(h+x-x)}{h^3/h + x^2 + \sqrt[3]{x}(\sqrt[3]{x+h} + \sqrt[3]{x^2})}$$

$$+ \lim_{h \rightarrow 0} (8x + 4h^2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 8x$$

18. Si: $y = \frac{2x^2 + 4x + 1}{x^2 - 2}$; hallar y'

Resolución:

Aplicando el teorema:

$$y = \frac{(x^2 - 2)(2x^2 + 4x + 1)' - (2x^2 + 4x + 1)(x^2 - 2)'}{(x^2 - 2)^2}$$

$$y' = \frac{(x^2 - 2)(4x + 4) - (2x^2 + 4x + 1)(2x)}{(x^2 - 2)^2}$$

$$y' = \frac{4x^3 + 8x + 4x^2 - 8 - 4x^3 - 8x^2 - 2x}{(x^2 - 2)^2}$$

$$\therefore y = \frac{4x^2 - 10x - 8}{(x^2 - 2)^2}$$

19. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 5}$

Resolución:

En estos casos se divide numerador y denominador por la variable elevada a su mayor exponente. Para este caso entre x^2 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2}} = \frac{3 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \frac{3}{1} = 3$$

20. Evaluar: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{x^2 - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt{x^2 - 4}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{4}{x^2}} = -1$$

21. Evaluar: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{16x^4 + 15x^3 - 2x + 1} - 2x)$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^4 + 15x^3 - 4x^2 - 2x + 1}{\sqrt{16x^4 + 15x^3 - 2x + 1} + 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16 + \frac{15}{x} - \frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}}{\sqrt{\frac{16}{x^4} + \frac{15}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}}} = \frac{16}{0^+} = +\infty$$

22. Evaluar: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[4]{\frac{x^6 + x^5 - 20x^4 - 16x^2 - 16x + 320}{x^2 - 1}}$

Resolución:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[4]{\frac{(x-2)(x+2)(x-4)(x+5)(x^2+4)}{(x+1)(x-1)}}$$

$$\text{Domf} = \langle -\infty; -5 \rangle \cup [-2; -1) \cup (1; 2] \cup [4; +\infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt[4]{-} = \sqrt[4]{\frac{270}{0^-}} = +\infty$$

23. Graficar la función: $f(x) = 2x - \tan(x)$, $x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$

Resolución:

Analizando la primera derivada:

$$f'(x) = 2 - \sec^2 x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \sec x = \pm \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \vee x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1, f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1$$

son máximas o mínimas.

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \sec^2 x < 2$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} < \sec x < \sqrt{2}$$

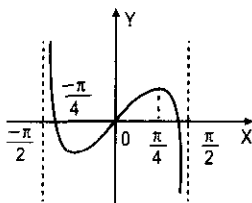
$$\therefore \text{En } \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right) \text{ es creciente}$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \sec^2 x > 2$$

$$\Rightarrow \sec x > \sqrt{2} \vee \sec x < -\sqrt{2}$$

$$\text{En } \left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \text{ es decreciente}$$

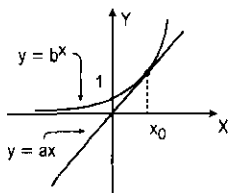
Realizando la gráfica se tiene:



24. Halle la relación entre "a" y "b" de modo que la ecuación: $ax = b^x$; $b > 1$ no tenga soluciones reales.

Resolución:

Graficando las funciones considerando inicialmente un punto de intersección.



En el punto x_0 se cumple:

$$b^{x_0} = ax_0 \quad \dots(1)$$

$$b^{x_0} \ln b = a \quad \dots(2)$$

$$(1) \text{ en } (2): ax_0 \ln b = a \Rightarrow x_0 = \log_b e$$

Reemplazando en (2):

$$b^{\log_b e} \ln b = a \Rightarrow a = e \ln b$$

Conclusiones:

I. Si $a = e \ln b \Rightarrow$ existe solamente una solución real.

II. Si $a > e \ln b \Rightarrow$ existen dos soluciones reales.

III. $0 \leq a < e \ln b \Rightarrow$ no tiene soluciones reales.

25. Hallar $\frac{dy}{dx}$, si $y = f\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)$, $f'(x) = \sin(x^2)$

Resolución:

$$\text{Hacemos: } g(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y = f(g(x))$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad \dots(1)$$

$$g(x) = \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow g'(x) = \frac{3}{(x+1)^2} \quad \dots(2)$$

$$f'(x) = \sin(x^2) \Rightarrow f'(g(x)) = \sin\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2 \quad \dots(3)$$

Se reemplaza (2) y (3) en (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(x+1)^2} \sin\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^2$$

26. Dada la función f , tal que: $f(x) = 5x^2 + \frac{a}{x^3}$, $x \in \mathbb{R}^+$

determine el menor valor positivo "a" para que se cumpla: $f(x) \geq 14$, $\forall x \in \text{Domf}$

Resolución:

Por dato: el mínimo valor de f es 14

$$\text{Derivando: } f'(x) = 10x - \frac{5a}{x^4}$$

$$\text{Igualando a cero y despejando se tiene: } x = \sqrt[7]{\frac{a}{2}}$$

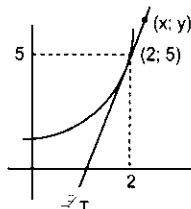
Reemplazando en la función f

$$5\sqrt[7]{\frac{a^2}{2}} + \frac{a}{\sqrt[7]{\frac{a^5}{2}}} = 14$$

$$\text{Al efectuar tenemos: } a = 16\sqrt{2}$$

27. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto de abscisa 2.

Resolución:



Hallamos su pendiente en $x_0 = 2$

$$m_1 = \lim_{x_1 \rightarrow 2} \frac{f(x_1) - f(2)}{x_1 - 2} = \lim_{x_1 \rightarrow 2} \frac{(x_1^2 + 1) - (2^2 + 1)}{x_1 - 2}$$

$$m_1 = \lim_{x_1 \rightarrow 2} \frac{x_1^2 - 4}{x_1 - 2} = \lim_{x_1 \rightarrow 2} \frac{(x_1 + 2)(x_1 - 2)}{x_1 - 2}$$

$$\Rightarrow m_1 = 2 + 2 = 4$$

Por definición de pendiente:

$$m_1 = 4 = \frac{y-5}{x-2} \Rightarrow y-5 = 4x-8$$

$$\therefore \mathcal{L}_1: y = 4x - 3$$

28. Hallar la derivada de la función: $f(x) = \ln x$ en x_0 ; $x_0 \in \mathbb{R}^+$

Resolución:

De la definición:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x_0 + h) - \ln x_0}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \ln\left(\frac{x_0 + h}{x_0}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\ln\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \ln\left[\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{h}}\right]^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0}; x_0 > 0$$

29. Encontrar la derivada de: $f(x) = 2x^3$, en el punto x_0 ; $x_0 \in \text{Dom}f$

Resolución:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0 + h)^3 - 2x_0^3}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3) - 2x_0^3}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} 6x_0^2 + 3x_0h + h^2 = 6x_0^2$$

$$\therefore f'(x_0) = 6x_0^2$$

30. Halle la derivada de $f(x) = \sin x$, en $x = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$

Resolución:

Por definición:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cosh + \cos x_0 \sinh - \sin x_0}{h}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 (\cosh - 1) + \cos x_0 \left(\frac{\sinh}{h}\right)}{h}$$

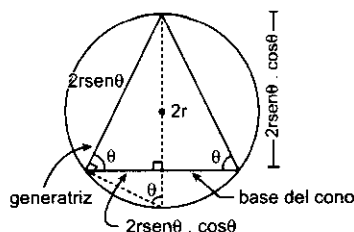
$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin x_0 \frac{\sin^2\left(\frac{h}{2}\right)^0}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \cdot \frac{h}{4} + \cos x_0 \left(\frac{\sinh}{h}\right)^1$$

$$f'(x_0) = \cos x_0$$

31. En una esfera de radio r se inscribe un cono circular recto de tal manera que el volumen de éste sea

el mayor posible. En este caso la generatriz y la base del cono forman un ángulo θ ; calcular: $\cos 2\theta$

Resolución:



Volumen del cono: $V = A_{\text{base}} \times h$

$$V = [\pi \times (2r \sen \theta \cos \theta)^2] \times 2r \sen^2 \theta$$

$$V = \pi \times r^2 (2 \sen \theta \cos \theta)^2 \times 2r \sen^2 \theta$$

$$V = \pi r^3 \sen^2 2\theta \times 2 \sen^2 \theta$$

$$\Rightarrow V(\theta) = \pi r^3 \sen^2 2\theta (1 - \cos 2\theta)$$

Para hallar: $V(\theta)$ máximo

Resolvamos: $V'(\theta) = 0$

$$\Rightarrow \pi r^3 [\sen^2 2\theta (2 \sen 2\theta) + (1 - \cos 2\theta) 4 \sen 2\theta \cos 2\theta] = 0$$

$$2 \sen^3 2\theta + 4 \sen 2\theta \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta) = 0$$

$$2 \sen 2\theta [\sen^2 2\theta + 2 \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)] = 0$$

$$2 \sen 2\theta [1 - \cos^2 2\theta + 2 \cos 2\theta - 2 \cos^2 2\theta] = 0$$

$$2 \sen 2\theta [1 + 2 \cos 2\theta - 3 \cos^2 2\theta] = 0$$

$$\begin{array}{c} 1 \quad \quad \quad 3 \cos 2\theta \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ 1 \quad \quad \quad - \cos 2\theta \end{array}$$

$$2 \sen 2\theta (1 + 3 \cos 2\theta) (1 - \cos 2\theta) = 0$$

Aquí se presentan 3 posibilidades:

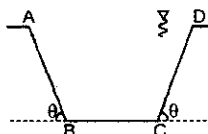
I. $\sen 2\theta \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 0^\circ \\ 2\theta = 180^\circ \end{cases}$ (no cumplen)

II. $1 + 3 \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{3}$
 $\Rightarrow 90^\circ < 2\theta < 180^\circ \Rightarrow 45^\circ < \theta < 90^\circ$
 (si es posible)

III. $1 - \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = 1$
 $\Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 0^\circ \\ 2\theta = 360^\circ \end{cases}$ (no cumplen)

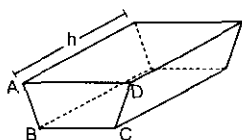
$\therefore$ Para que el volumen sea máximo, θ es tal que: $\cos 2\theta = -\frac{1}{3}$

32. Un ingeniero diseña un estanque cuyo corte de sección tiene la forma mostrada en la figura, donde: $AB = BC = CD = L$. ¿Qué valor le debe asignar a θ para que en el estanque se pueda depositar el mayor volumen posible de agua?



Resolución:

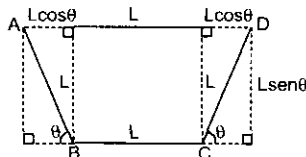
El estanque totalmente lleno de agua se vería así:



$$\text{Volumen de agua} = V = A_{ABCD} \times h$$

Considerando $h \rightarrow$ constante (asumimos así porque no se dice nada al respecto), tenemos que: $V \rightarrow$ máximo cuando: $A_{ABCD} \rightarrow$ máximo

Luego:



$$A_{ABCD} = A = \text{semisuma de bases} \times \text{altura}$$

$$A = \left(\frac{2L\cos\theta + L + L}{2} \right) L\sin\theta$$

$$A(\theta) = L^2(\cos\theta + 1)\sin\theta$$

Para que $A(\theta) \rightarrow$ máximo

$$\Rightarrow A'(\theta) = 0$$

$$A'(\theta) = L^2[(\cos\theta + 1)\cos\theta + \sin\theta(-\sin\theta)] = 0$$

$$\cos^2\theta + \cos\theta - \sin^2\theta = 0$$

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta + \cos\theta = 0$$

$$\cos 2\theta + \cos\theta = 0 \Rightarrow 2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

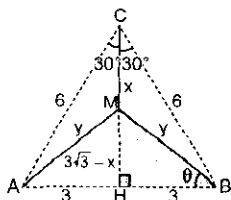
Dos posibilidades:

$$\text{I. } \cos\frac{3\theta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3\theta}{2} = 90^\circ \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\text{II. } \cos\frac{\theta}{2} = 0 \Rightarrow \frac{\theta}{2} = 90^\circ \Rightarrow \theta = 180^\circ \text{ (no cumple)}$$

$\therefore$ El mayor volumen de agua que se puede depositar es cuando: $\theta = 60^\circ$

33. Tres ciudades A, B y C se encuentran a 6 km de distancia una de otra. Se quiere construir un monumento que sea equidistante de A y B tal que la suma de las distancias de aquel a las tres ciudades sea la menor posible. ¿A qué distancia de C se debe construir dicho monumento?

Resolución:

$$\text{Suma de distancias: } S = x + 2y$$

$$\triangle MHB: y = 3\sec\theta$$

$$3\sqrt{3} - x = 3\tan\theta$$

$$\Rightarrow x = 3\sqrt{3} - 3\tan\theta$$

$$\text{Luego: } S = 3\sqrt{3} - 3\tan\theta + 2(3\sec\theta)$$

$$S = 3\sqrt{3} - 3\tan\theta + 6\sec\theta$$

$$\Rightarrow S(\theta) = 3\sqrt{3} - 3\tan\theta + 6\sec\theta$$

Debemos hallar: $S(\theta) \rightarrow$ mínimo

Entonces resolvamos: $S'(\theta) = 0$

$$\Rightarrow -3\sec^2\theta + 6\sec\theta\tan\theta = 0$$

$$\Rightarrow 3\sec\theta[-\sec\theta + 2\tan\theta] = 0$$

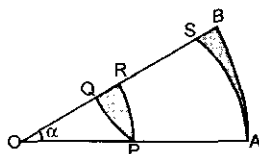
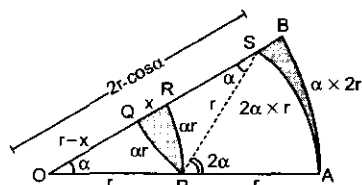
$$\Rightarrow -\sec\theta + 2\tan\theta = 0 \Rightarrow 2\tan\theta = \sec\theta$$

$$\Rightarrow 2\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

Nos piden: $x = 3\sqrt{3} - 3\tan\theta$

$$\Rightarrow x = 3\sqrt{3} - 3\frac{\sqrt{3}}{3} \therefore x = 2\sqrt{3}$$

34. En la figura se muestra el sector circular AOB, tal que: $OP = PA$. Tomando como centro a P, S y O se trazan respectivamente los arcos $\widehat{AS}$, $\widehat{PQ}$ y $\widehat{PR}$. Los perímetros de los triángulos mixtilíneos ABS y PQR son, respectivamente, p_1 y p_2 . Calcular, en el límite, cuando α tiende a 0, la relación: p_1 / p_2

**Resolución:**

$$\begin{aligned} \text{Perímetro de ABS} &= 2\alpha r + 2r\alpha + BS \\ &= 4\alpha r + BS \end{aligned}$$

$$p_1 = 4\alpha r + OB - OS$$

$$p_1 = 4\alpha r + 2r - 2r\cos\alpha$$

$$p_1 = 2r(2\alpha + 1 - \cos\alpha) \quad \dots(I)$$

$$\begin{aligned} \text{Perímetro de PQR} &= \alpha r + \alpha r + x \\ &= 2\alpha r + x \end{aligned}$$

Pero: $OQ + QS = OS$

$$r - x + r = 2r\cos\alpha$$

$$x = 2r - 2r\cos\alpha$$

$$\Rightarrow p_2 = 2\alpha r + 2r - 2r\cos\alpha$$

$$p_2 = 2r(\alpha + 1 - \cos\alpha) \quad \dots(II)$$

De (I) y (II):

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2r(2\alpha + 1 - \cos\alpha)}{2r(\alpha + 1 - \cos\alpha)} = \frac{2\alpha + 1 - \cos\alpha}{\alpha + 1 - \cos\alpha}$$

$$\text{Nos piden: } \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{p_1}{p_2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\alpha + 1 - \cos\alpha}{\alpha + 1 - \cos\alpha}$$

Evaluando para $\alpha = 0$, resulta: $\frac{0}{0}$

Aplicamos la regla de L'Hospital:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{p_1}{p_2} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{D_{\alpha}(2\alpha + 1 - \cos \alpha)}{D_{\alpha}[\alpha + 1 - \cos \alpha]} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2 + \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

Evaluando para $\alpha = 0$, resulta: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{p_1}{p_2} = \frac{2}{1} = 2$

35. Calcular: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan 3x - 3 \arctan x}{x^3} \right)$

Resolución:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arctan 3x - 3 \arctan x}{x^3} \right)$$

Evaluando resulta: $\frac{0}{0}$

Aplicamos la regla de L'Hospital:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D_x[\arctan 3x - 3 \arctan x]}{D_x[x^3]}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+(3x)^2} - 3\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{3x^2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{1+9x^2} - \frac{3}{1+x^2}}{3x^2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - (1+9x^2)}{x^2(1+9x^2)(1+x^2)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8x^2}{x^2(1+9x^2)(1+x^2)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-8}{(1+9x^2)(1+x^2)}$$

Evaluando para $x = 0$, resulta: $L = \frac{-8}{1 \times 1} = -8$

36. La recta normal a la gráfica de la función:

$f(x) = \cos 2x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, en el punto de abscisa a , pasa por el origen de coordenadas. Calcular el valor de: $\frac{\sin 4a}{4a}$

Resolución:

Datos: $f(x) = \cos 2x$, $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Abscisa del punto de tangencia: a

La ecuación de la recta normal es:

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) \quad \dots(I)$$

$$f(a) = \cos 2a \quad \dots(II)$$

$$\text{Si } f(x) = \cos 2x \Rightarrow f'(x) = -2\sin 2x$$

$$f'(a) = -2\sin 2a \quad \dots(III)$$

$$(II) \text{ y } (III) \text{ en } (I): y - \cos 2a = -\frac{1}{-2\sin 2a}(x - a)$$

$$y - \cos 2a = \frac{1}{2\sin 2a}(x - a)$$

Por dato, el punto $O(0; 0)$ pertenece a esta recta, entonces satisface a la ecuación. Reemplazando:

$$0 - \cos 2a = \frac{1}{2\sin 2a}(0 - a)$$

$$\Rightarrow -\cos 2a = \frac{-a}{2\sin 2a} \Rightarrow 2\sin 2a \cos 2a = a$$

$$\Rightarrow \sin 4a = a \quad \therefore \frac{\sin 4a}{4a} = \frac{1}{4}$$

37. Calcular: $L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x - 2x}{3x - \sin 3x} \right)$

Resolución:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x - 2x}{3x - \sin 3x} \right)$$

Evaluando para $x = 0$, resulta: $\frac{0}{0}$

Aplicando la regla de L'Hospital

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D_x[\tan 2x - 2x]}{D_x[3x - \sin 3x]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 2x - 2}{3 - 3\cos 3x}$$

Evaluando para $x = 0$, resulta: $\frac{0}{0}$

Seguimos aplicando la regla de L'Hospital:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{D_x[2\sec^2 2x - 2]}{D_x[3 - 3\cos 3x]}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(4\sec 2x \sec 2x \tan 2x)}{-3(-3\sin 3x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8\sec^2 2x \tan 2x}{9\sin 3x}$$

Evaluando para $x = 0$, resulta: $\frac{0}{0}$

Pero en vez de seguir aplicando la regla de L'Hospital, podemos hacer lo siguiente:

$$L = \frac{8}{9} \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 2x \cdot \frac{2 \tan 2x}{3 \sin 3x}$$

$$L = \frac{8 \times 2}{9 \times 3} \lim_{x \rightarrow 0} \sec^2 2x \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$$

$$\therefore L = \frac{16}{27} \times 1 \times \frac{1}{1} = \frac{16}{27}$$

38. Hallar el valor de:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\tan(1-x)| + |\sin(1-x)|}{\sin x - \sin 1}$$

Resolución:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\tan(1-x)| + |\sin(1-x)|}{\sin x - \sin 1}$$

Sea: $1-x = k \Rightarrow x = 1-k$

Si: $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow x > 1 \Rightarrow 0 > 1-x$

Es decir: $1-x < 0 \Rightarrow k < 0 \Rightarrow k \rightarrow 0^-$

$$\text{Reemplazando: } L = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{|\tan k| + |\sin k|}{\sin(1-k) - \sin 1}$$

Como:

$$\sin(1-k) - \sin 1 = 2\cos\left(\frac{1-k+1}{2}\right)\sin\left(\frac{1-k-1}{2}\right)$$

$$\sin(1-k) - \sin 1 = 2\cos\left(\frac{2-k}{2}\right)\sin\left(-\frac{k}{2}\right)$$

$$L = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{|\tan k| + |\sin k|}{2\cos\left(\frac{2-k}{2}\right)\sin\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$L = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{1}{2 \cos\left(\frac{2-k}{2}\right)} \frac{|\tan k| + |\senk|}{\sen\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$L = \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{1}{2 \cos\left(\frac{2-k}{2}\right)} \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{|\tan k| + |\senk|}{\sen\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$L = \frac{1}{2 \cos 1} \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{|\tan k| + |\senk|}{\sen\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$\text{Como: } k \rightarrow 0^- \Rightarrow k < 0 \\ \Rightarrow -k = |k|$$

$$L = \frac{1}{2 \cos 1} \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|\tan k|}{-k} + \frac{|\senk|}{-k}}{\sen\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$L = \frac{1}{2 \cos 1} \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|\tan k|}{|k|} + \frac{|\senk|}{|k|}}{\frac{1}{2} \times \sen\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$L = \frac{1 \times 2}{2 \cos 1} \lim_{k \rightarrow 0^-} \frac{\frac{|\tan k|}{k} + \frac{|\senk|}{k}}{\sen\left(-\frac{k}{2}\right)}$$

$$L = \frac{1}{\cos 1} \left[\frac{|1| + |1|}{1} \right] = \frac{1}{\cos 1} [2]$$

$$\therefore L = 2 \sec 1$$

39. Evaluar: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sec^2 x - 2 \sen 2x}{\cos 2x} \right)$

Resolución:

$$\text{Sea: } L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sec^2 x - 2 \sen 2x}{\cos 2x} \right)$$

$$\text{Evaluando para } x = \frac{\pi}{4}$$

$$L = \frac{\sec^2 \frac{\pi}{4} - 2 \sen \frac{\pi}{2}}{\cos \frac{\pi}{2}} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminado)}$$

Procuremos levantar la indeterminación:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 2 \sen 2x}{\cos 2x} \right)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{1 - 2 \cos^2 x \sen 2x}{\cos^2 x \cos 2x} \right)$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{1 - (1 + \cos 2x) \sen 2x}{\cos^2 x \cos 2x} \right]$$

$$L = \left[\frac{1 - \sen 2x - \cos 2x \sen 2x}{\cos^2 x \cos 2x} \right]$$

$$\text{Como: } 1 - \sen 2x = (\cos x - \sen x)^2$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{(\cos x - \sen x)^2 - (\cos^2 x - \sen^2 x) \sen 2x}{\cos^2 x (\cos^2 x - \sen^2 x)} \right]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{(\cos x - \sen x)^2 - (\cos x - \sen x)(\cos x + \sen x) \sen 2x}{\cos^2 x (\cos x + \sen x)(\cos x - \sen x)} \right]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x - \sen x)[\cos x - \sen x - (\cos x + \sen x) \sen 2x]}{\cos^2 x (\cos x + \sen x)(\cos x - \sen x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{[\cos x - \sen x - (\cos x + \sen x) \sen 2x]}{\cos^2 x (\cos x + \sen x)}$$

$$\text{Evaluando para } x = \frac{\pi}{4}:$$

$$L = \frac{\cos \frac{\pi}{4} - \sen \frac{\pi}{4} - (\cos \frac{\pi}{4} + \sen \frac{\pi}{4}) \sen \frac{\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\pi}{4} (\cos \frac{\pi}{4} + \sen \frac{\pi}{4})}$$

$$L = \frac{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \times 1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -2$$

$$\text{Otramanera de resolver: } L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sec^2 x - 2 \sen 2x}{\cos 2x} \right)$$

$$\text{Como: } \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$\sen 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

Reemplazando y efectuando operaciones se llega a:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x + 1)(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1) + 2(\tan x - 1)^2}{-(\tan x + 1)(\tan x - 1)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x + 1)(\tan^2 x + 1) + 2(\tan x - 1)}{-(\tan x + 1)}$$

$$\text{Evaluando para: } x = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore L = -2$$

40. Evaluar: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} \right)$

Resolución:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos mx - \cos nx}{x^2} \right)$$

Notemos que:

$$\cos mx - \cos nx = 2 \sen\left(\frac{nx + mx}{2}\right) \sen\left(\frac{nx - mx}{2}\right)$$

Luego:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sen \frac{(n+m)x}{2} \sen \frac{(n-m)x}{2}}{x^2}$$

$$L = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen \frac{(n+m)x}{2} \sen \frac{(n-m)x}{2}}{x}$$

$$L = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sen \frac{(n+m)x}{2}}{\left(\frac{n+m}{2}\right)x} \left(\frac{n+m}{2}\right) \frac{\sen \frac{(n-m)x}{2}}{\left(\frac{n-m}{2}\right)x} \left(\frac{n-m}{2}\right)$$

$$L = 2 \left(\frac{n+m}{2} \right) \left(\frac{n-m}{2} \right) \frac{\sin \frac{(n+m)x}{2}}{\frac{(n+m)x}{2}} - \frac{\sin \frac{(n-m)x}{2}}{\frac{(n-m)x}{2}}$$

$$L = 2 \left(\frac{n+m}{2} \right) \left(\frac{n-m}{2} \right) \times 1 \times 1$$

$$\therefore L = \frac{n^2 - m^2}{2}$$

41. La ecuación de la demanda de un juguete es $p^2x = 5000$, donde se venden x juguetes por mes cuando el precio es p unidades monetarias (um) por juguete. Se espera que en t meses, cuando $t \in [0; 6]$, el precio del juguete será p um, donde $20p = t^2 + 7t + 100$. ¿Cuál será la intensidad esperada de cambio de la demanda después de 5 meses? No exprese x en términos de t ; use la regla de la cadena.

Resolución:

$$x = \frac{5000}{p^2} \wedge p = \frac{1}{20}(t^2 + 7t + 100)$$

$$\frac{dx}{dt} = x' (p_{(t)}) \times p'_{(t)} \Rightarrow x' = -\frac{10000}{p^3}$$

$$p' = \frac{1}{20}(2t + 7)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{10000}{\left[\frac{1}{20}(t^2 + 7t + 100) \right]^3} \times \frac{1}{20}(2t + 7)$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{8 \times 10^7 (2t + 7)}{(t^2 + 7t + 100)^3 \times 20}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}_{t=5} = -\frac{4 \times 10^6 (2t + 7)}{(t^2 + 7t + 100)^3} = -16,6$$

42. Dada $f(x) = x^3$ y $g(x) = f(x^2)$, calcule: (a) $f(x^2)$; (b) $g'(x)$

Resolución:

a) Si $f(x) = x^3$, entonces: $f(x^2) = (x^2)^3$

Haciendo: $x^2 = u$

$$f(u) = u^3$$

$$= f'(u) = 3u^2 \therefore f'(x^2) = 3x^4$$

b) Si $f(x) = x^3$

$$g(x) = f(x^2) \Rightarrow g(x) = x^6$$

$$\Rightarrow g'(x) = 6x^5$$

43. Hallar $f'(x)$, si: $f(x) = (5 - 3x)^{2/3}$

Resolución:

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5 - 3x)^{-1/3} D_x(5 - 3x)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(5 - 3x)^{-1/3}(-3) \therefore f'(x) = \frac{-2}{(5 - 3x)^{1/3}}$$

44. Si: $g(x) = \sqrt[3]{4x^2 - 1}$, hallar: $g'(x)$

Resolución:

$$g'(x) = \frac{1}{3}(4x^2 - 1)^{-2/3} D_x(4x^2 - 1)$$

$$g'(x) = \frac{1}{3}(4x^2 - 1)^{-2/3}(8x) \therefore g'(x) = \frac{8x}{3(4x^2 - 1)^{2/3}}$$

45. Si: $g(y) = \frac{1}{\sqrt{25 - y^2}}$, hallar: $g'(y)$

Resolución:

$$g'(y) = \frac{1}{2}(25 - y^2)^{-3/2} D_y(25 - y^2)$$

$$g'(y) = \frac{1}{2}(25 - y^2)^{-3/2}(-2y) \therefore g'(y) = \frac{y}{(25 - y^2)^{3/2}}$$

46. Si: $f(x) = (5 - 2x^2)^{-1/3}$, hallar: $f'(x)$

Resolución:

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(5 - 2x^2)^{-4/3} D_x(5 - 2x^2)$$

$$f'(x) = -\frac{1}{3}(5 - 2x^2)^{-4/3}(-4x) \therefore f'(x) = \frac{4x}{3(5 - 2x^2)^{4/3}}$$

47. Si: $f(y) = 3\cos\sqrt[3]{2y^2}$, hallar: $f'(y)$

Resolución:

$$f'(y) = 3\sin\sqrt[3]{2y^2} D_y(\sqrt[3]{2y^2})$$

$$f'(y) = -3\sin\sqrt[3]{2y^2} \left[\frac{1}{3}(2y^2)^{-2/3} \times (4y) \right]$$

$$f'(y) = -3\sin\sqrt[3]{2y^2} \times \left[\frac{4y}{3(2y^{2/3})} \right]$$

$$\therefore f'(y) = \frac{-4y\sin\sqrt[3]{2y^2}}{(2y^2)^{2/3}}$$

48. Si: $g(x) = \sqrt{\frac{2x-5}{3x+1}}$, hallar: $g'(x)$

Resolución:

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2x-5}{3x+1} \right]^{-1/2} D_x \left[\frac{2x-5}{3x+1} \right]$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2x-5}{3x+1} \right]^{-1/2} \left[\frac{(3x+1)D_x(2x-5) - (2x-5)D_x(3x+1)}{(3x+1)^2} \right]$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2x-5}{3x+1} \right]^{-1/2} \left[\frac{(3x+1)(2) - (2x-5)(3)}{(3x+1)^2} \right]$$

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{2x-5}{3x+1} \right]^{-1/2} \left[\frac{6x+2-6x+15}{(3x+1)^2} \right]$$

$$\therefore g'(x) = \frac{17}{2(3x+1)^{3/2}(2x-5)^{1/2}}$$

49. Si: $h(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$, hallar: $h'(t)$

Resolución:

$$h'(t) = \frac{\sqrt{t+1}D_t(\sqrt{t-1}) - \sqrt{t-1}D_t(\sqrt{t+1})}{t+1}$$

$$h'(t) = \frac{\sqrt{t+1} \left(\frac{1}{2} \right) (t-1)^{-1/2} - \sqrt{t-1} \left(\frac{1}{2} \right) (t+1)^{-1/2}}{t+1}$$

$$h'(t) = \frac{\frac{\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t-1}} - \frac{\sqrt{t-1}}{2\sqrt{t+1}}}{t+1}$$

$$\therefore h'(t) = \frac{1}{2} \left[\frac{(t+1) - (t-1)}{(t+1)^{3/2}(t-1)^{1/2}} \right] = \frac{1}{(t+1)^{3/2}(t-1)^{1/2}}$$

50. Hallar: $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right)$

Resolución:

$$F'(x) = \frac{x D_x \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} D_x(x)}{x^2}$$

$$F'(x) = \frac{\frac{x}{2}(x^2-1)^{-1/2}(2x) - (x^2-1)^{1/2}}{x^2}$$

$$\therefore F'(x) = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x^2 \sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$$

51. Hallar: $\frac{d}{dx} \sqrt[3]{x^2-5} \sqrt[3]{x^2+3}$

Resolución:

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2-5} D_x \sqrt[3]{x^2+3} + \sqrt[3]{x^2+3} D_x \sqrt[3]{x^2-5}$$

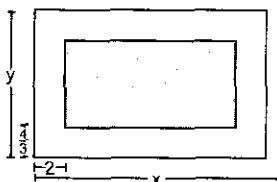
$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2-5} \left(\frac{2x}{3} \right) (x^2+3)^{-2/3} + \sqrt[3]{x^2+3} \left(\frac{2x}{3} \right) (x^2-5)^{-1/2}$$

$$f'(x) = x(x^2+3)^{-2/3}(x^2-5)^{-1/2} \left[\frac{2}{3}(x^2-5) + (x^2+3) \right]$$

$$\therefore f'(x) = \frac{x}{3} (x^2+3)^{-1/2} (x^2-5)^{-1/2} (5x^2-1)$$

52. Un anuncio de cartón de 32 m² de zona impresa, debe tener márgenes superior e inferior de 2 m y de $\frac{4}{3}$ m en los laterales. Determine las dimensiones del trozo más pequeño en cartón que pueda usarse para este propósito.

Resolución:



Del gráfico se observa:

$$s = xy = 32 \quad \dots(1)$$

$$s_1 = (x-4) \left(y - \frac{8}{3} \right) \quad \dots(2)$$

Operando (2) y reemplazando (1) en (2):

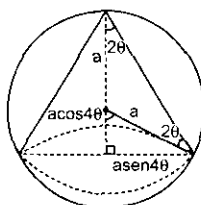
$$s_1 = \frac{128}{3} - \frac{128}{x} - \frac{8}{3}x$$

$$\text{Derivando: } s'_1 = \frac{128}{x^2} - \frac{8}{3} = 0$$

$$\therefore x = 4\sqrt{3} \text{ e } y = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

53. Calcule la altura del cono circular recto de mayor volumen posible que puede ser inscrito en una esfera de radio a unidades. Sea 2θ la medida en radianes del ángulo vertical del cono.

Resolución:



El volumen del cono:

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \dots(1)$$

De la figura: $r = a \operatorname{sen} 4\theta$ y $h = a + a \cos 4\theta$

Reemplazando en (1):

$$V = \frac{1}{3} \pi a^2 \operatorname{sen}^2 4\theta (a + a \cos 4\theta)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi a^3 \operatorname{sen}^2 4\theta (1 + \cos 4\theta)$$

$$V' = \frac{1}{3} \pi a^3 (2 \operatorname{sen} 4\theta \cos 4\theta) (1 + \cos 4\theta) - (\operatorname{sen}^2 4\theta \operatorname{sen} 4\theta) = 0$$

$$2 \cos 4\theta (1 + \cos 4\theta) - \operatorname{sen}^2 4\theta = 0$$

$$3 \cos^2 4\theta + 2 \cos 4\theta - 1 = 0$$

$$\text{Resolviendo: } \cos 4\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 4\theta = -1$$

Se descarta el segundo resultado.

$$\therefore \text{Reemplazando en h: } h = a + a \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}a$$

54. Determinar una ecuación de la recta normal a la curva $y = \frac{10}{(14-x^2)}$ en el punto $(4; -5)$

Resolución:

$$y' = m = \frac{20x}{(14-x^2)^2}, \text{ para: } x = 4$$

$$m = \frac{80}{4} \Rightarrow m = 20; \text{ pendiente de la recta tangente}$$

$$m \times m_1 = -1 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{20} \text{ (pendiente de la recta tangente)}$$

Ecuación de la recta normal:

$$y - y_1 = m_1(x - x_1); \quad (x_1; y_1) = (4, -5)$$

$$y + 5 = -\frac{1}{20}(x - 4) \Rightarrow 20y + 100 = -x + 4$$

$$\therefore x + 20y + 96 = 0$$

55. Halle una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{8}{(x^2+4)} \text{ en el punto } (2; 1)$$

Resolución:

$$y' = m = \frac{-16x}{(x^2+4)^2}, \text{ para: } x = 2$$

$$m = -\frac{32}{64} \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \text{ (pendiente de la recta tangente)}$$

Ecuación de la recta tangente en el punto $(2; 1)$:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow 2y - 2 = -x + 2$$

$$\therefore x + 2y - 4 = 0$$

56. Hallar $g'(x)$, si: $g(x) = \frac{x^3+1}{x^2+3}(x^2-2x^{-1}+1)$

Resolución:

$$g'(x) = \left[\frac{x^3+1}{x^2+3} \right] D_x(x^2-2x^{-1}+1) + (x^2-2x^{-1}+1) D_x \left[\frac{x^3+1}{x^2+3} \right]$$

$$g'(x) = \left[\frac{x^3+1}{x^2+3} \right] D_x(x^2-2x^{-1}+1) + (x^2-2x^{-1}+1) \left[\frac{(x^2+3)D_x(x^3+1) - (x^3+1)D_x(x^2+3)}{(x^2+3)^2} \right]$$

$$g'(x) = \left[\frac{x^3+1}{x^2+3} \right] (2x+2x^{-2}) + (x^2-2x^{-1}+1) \left[\frac{(x^2+3)(3x^2) - (x^3+1)(2x)}{(x^2+3)^2} \right]$$

$$= \frac{(x^3+1)(2x+2x^{-2})}{x^2+3} + (x^2-2x^{-1}+1) \left[\frac{3x^4+9x^2-2x^4-2x}{(x^2+3)^2} \right]$$

$$= \frac{(x^3+1)(2x+2x^{-2})}{x^2+3} + (x^2-2x^{-1}+1) \left[\frac{x^4+9x^2-2x}{(x^2+3)^2} \right]$$

$$g'(x) = \frac{(x^3+1)(2x+2x^{-2})}{x^2+3} + \frac{(x^2-2x^{-1}+1)(x^4+9x^2-2x)}{(x^2+3)^2}$$

57. Halle una ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 - 4$ en el punto (2; 4)

Resolución:

Cálculo de la pendiente m:

$$m = y' = 3x^2, \text{ para } x = 2 \Rightarrow m = 12$$

Calculemos a continuación la ecuación de la recta tangente, aplicando la fórmula punto-pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1); [m = 12; (x_1; y_1) = (2; 4)]$$

$$y - 4 = 12(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 12x - 24$$

$$\therefore 12x - y - 20 = 0$$

58. Hallar $f'(x)$, si: $f(x) = \frac{2x+1}{x+5}(3x-1)$

Resolución:

$$f'(x) = (3x-1) D_x \left[\frac{2x+1}{x+5} \right] + \left[\frac{2x+1}{x+5} \right] D_x(3x-1)$$

$$= (3x-1) \left[\frac{(x+5)D_x(2x+1) - (2x+1)D_x(x+5)}{(x+5)^2} \right] + \left[\frac{2x+1}{x+5} \right] (3)$$

$$= (3x-1) \left[\frac{(x+5)(2) - (2x+1)(1)}{(x+5)^2} \right] + \left[\frac{2x+1}{x+5} \right] (3)$$

$$f'(x) = (3x-1) \left[\frac{2x+10-2x-1}{(x+5)^2} \right] + \frac{6x+3}{x+5}$$

$$= (3x-1) \left[\frac{9}{(x+5)^2} \right] + \frac{6x+3}{x+5} = \frac{27x-9}{(x+5)^2} + \frac{6x+3}{x+5}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{6(x^2+10x+1)}{(x+5)}$$

59. Calcular: $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos^8 x - \sin^8 x}{\cos x - \sin x}$

Resolución:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left[\frac{(\cos^4 x)^2 - (\sin^4 x)^2}{\cos x - \sin x} \right]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^4 x + \sin^4 x)(\cos^4 x - \sin^4 x)}{(\cos x - \sin x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^4 x - \sin^4 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{(\cos x - \sin x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\cos^4 x + \sin^4 x)(\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)}{(\cos x - \sin x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\cos^4 x + \sin^4 x)(\cos x + \sin x)$$

Evaluando para $x = \frac{\pi}{4}$, resulta:

$$\therefore L = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 \right] \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

60. Calcular: $L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sec^2 3x + 1}{\sec^2 x - 1} \right)$

Resolución:

$$\sec^2 3x + 1 = (\sec 3x + 1)(\sec^2 3x - \sec 3x + 1)$$

$$\sec^2 x - 1 = (\sec x - 1)(\sec^2 x + \sec x + 1)$$

Reemplazando:

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sec 3x + 1)(\sec^2 3x - \sec 3x + 1)}{(\sec x - 1)(\sec^2 x + \sec x + 1)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sec 3x + 1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec^2 3x - \sec 3x + 1)}{(\sec x - 1) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec^2 x + \sec x + 1)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(3 \sec x - 4 \sec^3 x + 1) \times (1 - (-1) + 1)}{(\sec x - 1) (1 + 1 + 1)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[3 \sec x - 3 \sec^3 x + 1 - \sec^3 x]}{-(1 - \sec x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[3 \sec x(1 - \sec^2 x) + (1 - \sec^3 x)]}{-(1 - \sec x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{[3 \sec x(1 + \sec x)(1 - \sec x) + (1 - \sec x)(1 + \sec x + \sec^2 x)]}{1(1 - \sec x)}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -[3 \sec x(1 + \sec x) + 1 + \sec x + \sec^2 x]$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} -[4 \sec x + 1 + 4 \sec^2 x]$$

$$\therefore L = -[4 + 1 + 4] = -9$$

61. Calcular: $E = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sin(5\pi x) + \cos(\pi x) + 1}{1 - x^2} \right]$

Resolución:

Evaluando para $x = 1$:

$$E = \frac{\sin 5\pi + \cos \pi + 1}{0} = \frac{0}{0} \text{ (indeterminado)}$$

Hagamos algunas transformaciones:

$$\text{Sea: } x - 1 = h \Rightarrow x = 1 + h$$

$$\text{Si } x \rightarrow 1 \Rightarrow h \rightarrow 0$$

Reemplazando en E:

$$E = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin 5\pi(1+h) + \cos \pi(1+h) + 1}{1 - (1+h)^2} \right]$$

$$E = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(5\pi + 5\pi h) + \cos(\pi + \pi h) + 1}{1 - (1+2h+h^2)} \right]$$

Como:

$$\sin(5\pi + 5\pi h) = \sin(4\pi + \pi + 5\pi h) = -\sin 5\pi h$$

$$\cos(\pi + \pi h) = -\cos \pi h$$

Reemplazando:

$$E = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-\sin 5\pi h - \cos \pi h + 1}{-h(h+2)} \right]$$

$$E = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h+2} \left[\frac{-\sin 5\pi h + 1 - \cos \pi h}{-h} \right]$$

$$E = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(h+2)} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{-\sin 5\pi h}{-h} + \frac{1 - \cos \pi h}{-h} \right]$$

$$E = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[5\pi \frac{\sin 5\pi h}{5\pi h} - \frac{2\sin^2 \frac{\pi h}{2}}{h} \right]$$

$$E = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[5\pi \frac{\sin 5\pi h}{5\pi h} - 2 \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 h \frac{\sin^2 \frac{\pi h}{2}}{\left(\frac{\pi h}{2} \right)^2} \right]$$

$$E = \frac{1}{2} \left[5\pi \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 5\pi h}{5\pi h} - \frac{\pi^2}{2} \lim_{h \rightarrow 0} h \left(\frac{\sin \frac{\pi h}{2}}{\frac{\pi h}{2}} \right)^2 \right]$$

$$\therefore E = \frac{1}{2} \left[5\pi(1) - \frac{\pi^2}{2}(0)(1)^2 \right] = \frac{5\pi}{2}$$



PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI



PROBLEMA 1 (UNI 1978)

Una pelota proyecta verticalmente hacia arriba 5 pies del punto de partida. En el instante t (segundos) donde:

$$S = 64t - 16t^2$$

¿Cuál es la máxima altura alcanzada?

- A) 64 B) 0 C) 16
D) 32 E) Infinita

Resolución:

Por condición: $S = f(t)$

Como se quiere calcular una altura máxima en un instante determinado, calcularemos la primera derivada de S con respecto a t . $\frac{dS}{dt} = 64 - 32t$

Para que la altura sea máxima: $64 - 32t = 0 \Rightarrow t = 2$ s

Reemplazando en la igualdad inicial:

$$S = 64(2) - 16(2)^2 \quad \therefore S = 64 \text{ pies}$$

Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI - 1987)

$$\text{Sea: } L = \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

¿a qué valor se aproxima L , cuando x se aproxima a 1?

- A) 1/2 B) -1/3 C) -4/3 D) 3/4 E) -3/4

Resolución:

Para $x = 1$, toma la forma: $\frac{0}{0}$ (forma indeterminada)

Aplicando la regla de L'Hospital-Bernoulli:

$$\frac{\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{1}{2}}(2) - \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

Evaluando para $x = 1$ se tendrá:

$$\frac{\frac{1}{2}(1)(2) - \frac{1}{3}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{4}{3}$$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2001 - I)

Un agricultor quiere levantar una cerca alrededor de un terreno rectangular que está ubicado en la ribera de un río, usando 1000 m de material. ¿Cuál es el área más grande que puede cercar, considerando que no va a poner una cerca a lo largo del río?



- A) 50 000 m² B) 62 500 m²
C) 67 500 m² D) 100 000 m²
E) 125 000 m²

Resolución:

Del gráfico:

$$\begin{array}{c} x \quad \boxed{} \quad x \\ y \end{array} \quad \begin{array}{l} A(x, y) = xy \\ 2x + y = 1000 \end{array}$$

Luego: $A(x) = x(1000 - 2x)$

$$A(x) = 1000x - 2x^2$$

Derivando e igualando a cero:

$$A'(x) = 1000 - 4x = 0 \Rightarrow x = 250$$

$$\text{Entonces: } A(250) = 1250 \, 000 \text{ m}^2$$

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2002 - II)

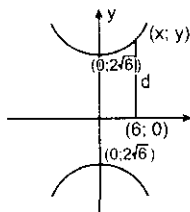
Un avión realiza una maniobra a velocidad supersónica, según la trayectoria: $2y^2 - x^2 = 48$

Hallar la menor distancia de la trayectoria al punto $(6; 0)$

- A) 9 B) 8 C) 7 D) 6 E) 5

Resolución:

Graficando:



Del gráfico:

$$d(x; y) = [(x - 6)^2 + y^2]^{1/2}$$

Escribiendo en función de una variable:

$$d(x) = [(x - 6)^2 + \frac{x^2}{2} + 24]^{1/2}$$

$$d(x) = (3x^2/2 - 12x + 60)^{1/2}$$

Derivándose e igualando a cero:

$$d'(x) = 0 \Rightarrow \frac{(1/2)(3x - 12)}{(3x^2/2 - 12x + 60)} = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Luego: } d(4) = 6 \Rightarrow d_{\min} = 6$$

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2003 - I)

La población de venados de una región está dada por la función: $V(t) = -t^4 + 21t^2 + 100$, donde t es el tiempo en años. Entonces, el intervalo de tiempo, donde ocurre la población máxima de venados es:

- A) $[0; 1]$ B) $[1; 2]$ C) $[2; 3]$
D) $[3; 4]$ E) $[4; 5]$

Resolución:

Del problema: $V(t) = -t^4 + 21t^2 + 100; t > 0$

Derivando e igualando a cero:

$$V'(t) = -4t^3 + 42t = 0 \Rightarrow t = 0; t = \sqrt{21/2}$$

$$\text{Luego: } t = \sqrt{21/2} = 3,24 > 0$$

$$\text{Entonces: } t = 3,24 \in [3; 4]$$

Clave: D

PROBLEMAS

PROPUESTOS

1. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5} \right)^{8x^2 + 3}$

A) e^4 B) e^8 C) e^2
 D) e^{-6} E) e^{-10}

2. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^p - 1}{x^q - 1}$ $p, q \in \mathbb{Z}^+$

- A) pq B) $\frac{pq}{p+q}$ C) $\frac{p}{q}$
 D) $\frac{q}{p}$ E) 1

3. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{3x^2 - 4} - \frac{x^2}{3x + 2} \right)$

- A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{3}{2}$ C) $\frac{2}{9}$
 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{4}{5}$

4. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{\ln(1 + 4x)}$

- A) 5 B) 5/2 C) 5/4
 D) 1/3 E) 2/5

5. Si: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[5]{x}}$

- A) 15 B) 3 C) 3/5
 D) 5/3 E) 10

6. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + d}{ax + c}$

si: $\lim_{x \rightarrow \infty} (ax + b - \sqrt[3]{6x^2 - x^3}) = 0$

- A) 3 B) 6 C) -6
 D) 4 E) 2/3

7. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}{\sin(4x)}$

- A) 3/2 B) 5/4 C) 1/8
 D) 2/5 E) 7/3

8. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sin x - x^2 + x^3}{\tan x + 2\sin x + 5x^4}$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) -1 E) -2

9. Calcular las constantes "a" y "b", si:

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(ax + b - \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1} \right) = 0$. Indicar: ab

- A) 1 B) 0 C) 2
 D) 3 E) -4

10. Calcular: $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+z^2} - \sqrt[4]{1-2z}}{z^2 + z}$

- A) 1 B) 1/2 C) -1/2
 D) -2 E) 3/2

11. Calcular: $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17} - 2}$

- A) 16 B) 24 C) 32 D) 26 E) 8

12. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{e^x - x - 1}$

- A) 2 B) 1 C) 3 D) -1 E) -2

13. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$

- A) 2 B) 3 C) $\frac{2}{3}$
 D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

14. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-4} - \sqrt{3x-14}}{x-5}$

- A) 1 B) -1 C) 2
 D) -2 E) $\frac{1}{2}$

15. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x} - 3}$

- A) 3 B) 12 C) 27
 D) 54 E) 18

16. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^m}} - 1 \right) x^m$

- A) $\frac{1}{n}$ B) $\frac{m}{n}$ C) m
 D) n E) mn

17. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

- A) 1 B) e^{-1} C) e
 D) $e^{-\frac{1}{2}}$ E) 2

18. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

- A) 1 B) 2 C) -1
 D) e E) $\frac{e}{3}$

19. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x+a)(x+b)} - x$

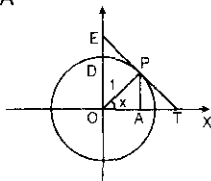
- A) ab B) $\frac{a+b}{2}$ C) $\frac{a}{b}$
 D) $\frac{b}{a}$ E) ab + 1

20. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2} + \sqrt[3]{2x-3}}$

- A) $2\sqrt{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\sqrt{3}$
 D) $\frac{1}{3}$ E) $\frac{2}{3}$

21. En la figura, C es una circunferencia unitaria, cuyo centro es el origen de coordenadas, T es la recta tangente a C en el punto P y
- $0 < x < \pi/2$
- .

Halle $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{DE}{OA}$



- A) 1 B) 2 C) 3
 D) 0 E) 4

22. Si: $f(x) = \sqrt{\tan^3 3x + \sqrt{1+2x^3}}$, halle: $f'(0)$

- A) 1 B) 3 C) 2
 D) 0 E) 4

23. Si
- $g(x) = mx + b$
- , es la ecuación de la recta tangente a la curva de la ecuación:
- $f(x) = \sin\left(\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)$
- en el punto de abscisa 1, determine
- $g(0)$
- .

- A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{4}$
 D) $\frac{\pi^2}{2}$ E) $\frac{\pi^2}{4}$

24. Dada la función
- f
- , definida por:
- $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$
- halle el límite, cuando
- $h \rightarrow 0$
- , de la pendiente de la secante, que une los puntos de la curva de abscisas 1 y
- $1+h$
- .

- A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{5}{4}$
 D) $\frac{7}{2}$ E) $\frac{7}{4}$

25. Mostrar el equivalente de: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[5]{1+x} - 2}{\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[7]{1+x} - 2} \right)$

- A) $31/45$ B) $-14/17$ C) $32/45$
 D) $13/5$ E) $21/13$

26. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{1+12x} - 7} \right)$

- A) $3/5$ B) $1/7$ C) $7/8$
 D) -1 E) $7/18$

27. Si: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(2x+1)(4x+1)(8x+1) \dots n \text{ factores}}{(2x-1)^n} \right)$

 es igual a 8^{15} , ¿cuál es el valor de n ?

- A) 10 B) 12 C) 7 D) 3 E) 13

28. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x-2} + \sqrt[3]{1-x} + x^2}{x^2 - 1}$

- A) 1 B) 2 C) 3
 D) $1/3$ E) $1/2$

29. Calcular: $\lim_{x \rightarrow -3} \left\{ (2x^2 + 5x - 3) \left(\frac{x+4}{x^2+x-6} \right) \right\}$

- A) $1/5$ B) $3/5$ C) $7/5$
 D) 1 E) $5/6$

30. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$

- A) $\sqrt[3]{e}$ B) $\sqrt[4]{e^2}$ C) $\sqrt[5]{e^2}$
 D) $\sqrt[4]{e^3}$ E) 1

31. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} \right)^{x^2}$

- A) -1 B) 0 C) 1
 D) 2 E) $1/4$

32. Si:
- $F(x) = 2x^5 - 3x^4 + x^2 + 7x + 4$
- , calcular el valor de
- $F(x)$
- cuando:
- $x = -1$

- A) 10 B) 0 C) 27
 D) 23 E) 29

33. Si: $F(x) = \sqrt{2x^2 - 3}$, encontrar: $F'(x)$

- A) $\frac{2x}{\sqrt{2x-3}}$ B) $\frac{x}{\sqrt{2x^2-3}}$ C) $\frac{2x}{\sqrt{2x^2-3}}$
 D) $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ E) $\frac{x}{\sqrt{2x-3}}$

34. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva:
- $y = 3x^2 - 4$
- , que es paralela a la recta:
- $3x + y = 4$

- A) $6x + 2y + 9 = 0$ B) $6x - 2y + 9 = 0$
 C) $12x - 4y + 19 = 0$ D) $12x + 4y + 19 = 0$
 E) $6x + 4y = 0$

35. Efectuar: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x2^x}{1 + x3^x} \right) x^{\frac{1}{2}}$

- A) $2/3$ B) $3/2$ C) 1
 D) $9/4$ E) $4/9$

36. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$

- A) 1 B) $2/3$ C) $3/2$
 D) $9/4$ E) $4/9$

37. Si: $F(x) = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x-1)^2}}$, calcular: $F'(2)$

- A) $\frac{\sqrt[3]{10}}{10}$ B) $\frac{\sqrt[3]{10}}{30}$ C) $10\sqrt[3]{10}$
 D) $100\sqrt[3]{10}$ E) $-\frac{7\sqrt[3]{10}}{30}$

38. Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} [\sin \sqrt{x+2} - \sin \sqrt{x}]$

- A) -1 B) 1 C) 0
 D) $1/2$ E) $1/3$

39. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi x}{2}}{1 - x}$

- A) 1 B) π C) $1/\pi$
D) $2/\pi$ E) $\pi/2$

40. Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 4^x}{x}$

- A) 1 B) 2 C) $\ln\left(\frac{a}{2}\right)$
D) $\ln\left(\frac{a}{4}\right)$ E) $\ln\left(\frac{a}{8}\right)$

41. Calcular:

$$M = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

- A) 2 B) $1/3$ C) $1/4$
D) $1/2$ E) $1/9$

42. Tenemos:

$$F(x) = \begin{cases} 5x - 1; & x \leq 1 \\ 4 - x; & x > 1 \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} 3 - 2x; & x < 1 \\ x - 1; & x = 1 \\ 4x - 2; & x > 1 \end{cases}$$

calcular: $\lim_{x \rightarrow 1} (F + G)(x)$

- A) -1 B) 1 C) -2 D) 3 E) 5

43. Si: $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1}(f(x) - 1) = 1$,

calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} [f(mx) - f(nx)]$

- A) 0 B) $m + n$ C) $\frac{m^2 - n^2}{mn}$
D) $\frac{n^2 - m^2}{2}$ E) $m - n$

44. Determinar la constante "a", de modo que la función: $F(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ tenga un mínimo en $x = 3$.

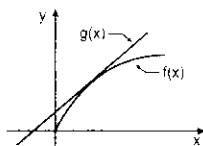
- A) 18 B) 16 C) 12
D) 20 E) 54

45. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área y con los lados paralelos a los ejes coordenados que pueden inscribirse en la figura limitada por las dos parábolas: $3y = 12 - x^2$; $6y = x^2 - 12$

Indicar la suma de tales dimensiones (base y altura)

- A) 8 B) 2 C) -2 D) 4 E) -4

46. Dado el gráfico:



donde: $f(x) = 2\sqrt{x}$; $g(x) = \frac{x}{2} - a$

Determinar el valor de "a".

- A) 1 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

47. Dado: $F(x) = x^2 \ln x$, hallar: $f^{100}(1)$

donde: $f^n(1)$ es la enésima derivada.

- A) $(9n)!$ B) $2(97)!$ C) $-2(7)!$
D) $\frac{1}{2}(97)!$ E) $96!$

48. Un cono recto circular es circunscrito a una esfera de radio conocido. Encontrar la razón de la altura al radio de la base del cono del volumen mínimo.

- A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\frac{1}{2}$

49. Dado: $g(x) = f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, si f es diferenciable en $\mathbb{R}$, y

$f'(-1) = 2$, hallar: $g'(0)$

- A) 4 B) -4 C) 3 D) -3 E) 0

50. Determinar: $g'(0)$, si: $g(x) = (x^2 + 2x + 3)f(x)$

donde: $f(10) = 5$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 4$

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 22

51. Dadas las funciones polinomiales $f(x)$ y $g(x)$, donde: $f(x) = g'(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$

Calcular el valor de:

$$|f(a^2 + 1) - g(a^2 + 1)| - |f(b + 1) - g(b + 1)|$$

donde: $a, b \in \mathbb{R} \wedge a^2 \in b$

- A) 0 B) 1 C) -1
D) ab E) $a - b$

CLAVES

1. B	8. A	15. D	22. D	29. C	36. C	43. E	50. E
2. C	9. B	16. A	23. D	30. B	37. E	44. E	51. A
3. C	10. B	17. A	24. A	31. B	38. C	45. D	
4. C	11. C	18. A	25. C	32. C	39. B	46. B	
5. D	12. B	19. B	26. E	33. C	40. D	47. B	
6. C	13. C	20. B	27. A	34. D	41. D	48. C	
7. C	14. B	21. D	28. D	35. A	42. E	49. B	